数理解析研究所講究録
第390巻 1980年 64-80

三次元波束型攪乱の発達

航技研　伊藤信毅

1. 序論

二次元 Poiseuille 流や Blasius 型境界層において，点源から発生する波束型攪乱の振舞いを調べる研究は Gaster や Nayfeh などによって進められてきた。[1-6] 筆者も Whitham の運動学的波動理論[7]に基づく方法で二次元の波束型攪乱に対する線型安定理論を導いたが，[8] 本論文ではこの理論を拡張して三次元攪乱に適用するとともに，非線型効果の影響もあわせて調べる。

基本流としては平行流の仮定が厳密に成り立つ二次元 Poiseuille 流を選び，主流の方向に x，平板に垂直方向に y，スパン方向に z の座標軸を取る。すべての量は平板間の半幅 h と基本流の最大流速 U_0 で無次元し，Reynolds 数を $R = U_0 h/\nu$（ν は動粘性係数）で定義する。基本流 $U(y) = 1 - y^2$ に重ねられた三次元攪乱の速度 $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ を支配する方程式は，Navier-Stokes 方程式と連続の式からつぎの形に書ける。

$$\left\{\left(\frac{1}{R}\nabla^2-U\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2+\frac{d^2U}{dy^2}\frac{\partial}{\partial x}\right\}v$$
$$=-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)w \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{1}{R}\nabla^2-U\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u+\left\{\left(\frac{1}{R}\nabla^2-U\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\frac{dU}{dy}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}v$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)w \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1.3}$$

境界条件は壁面上で攪乱速度が0になることから定まる。

$$y=\pm 1 \text{ で} \qquad u=v=w=0 \tag{1.4}$$

2. 線型理論

攪乱が十分小さい場合には，攪乱方程式の非線型項が省略できる。また，二次元Poiseuille流の線型安定解析では通常平板間の中心線 $y=0$ に対して反対称な攪乱だけを考慮すればよいから，問題は線型方程式

$$\left\{\left(\frac{1}{R}\nabla^2-U\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2+\frac{d^2U}{dy^2}\frac{\partial}{\partial x}\right\}v=0 \tag{2.1}$$

を境界条件

$$y=0 \text{ で } \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}=0, \quad y=1 \text{ で } \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.2}$$

のもとに解くことに帰着される。v が定まれば u と w は線型化された(1.2)と(1.3)を解くことによって容易に求まる。

いま，攪乱の局所的な波長で代表される短い尺度と波束全体の広がりで代表される長い尺度の比を表わす微小パラメタ

εを用いて，x，z，tの代りに大きな尺度の座標

$$\xi=\varepsilon x,\qquad \zeta=\varepsilon z,\qquad \tau=\varepsilon t \tag{2.3}$$

を導入し，つぎの形で表わされる解を求める。

$$v=\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\Theta(\xi,\zeta,\tau)\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n v_{1n}(y,\xi,\zeta,\tau) \tag{2.4}$$

ここで最初の添字1は，この解がのちに与える非線型解析の基本波になることを考慮して付けた。局所的なx方向波数α，z方向波数γ，振動数ωはそれぞれ

$$\alpha(\xi,\zeta,\tau)=\partial\Theta/\partial\xi,\quad \gamma(\xi,\zeta,\tau)=\partial\Theta/\partial\zeta,\quad \omega(\xi,\zeta,\tau)=-\partial\Theta/\partial\tau \tag{2.5}$$

で定義され，いずれも複素数と見なされる。上式からΘを消去すると，つぎの関係式が得られる。

$$\partial\alpha/\partial\tau+\partial\omega/\partial\xi=0,\quad \partial\gamma/\partial\tau+\partial\omega/\partial\zeta=0,\quad \partial\alpha/\partial\zeta=\partial\gamma/\partial\xi \tag{2.6}$$

(2.4)を(2.1)と(2.2)に代入し，εの各べきの係数を0に等置すると，最低次の係数からはよく知られたOrr-Sommerfeld固有値問題が得られる。

$$(L+i\omega M)v_{10}=0\ ;\quad \frac{\partial v_{10}}{\partial y}=\frac{\partial^3 v_{10}}{\partial y^3}=0\quad (y=0);\ v_{10}=\frac{\partial v_{10}}{\partial y}=0\quad (y=1) \tag{2.7}$$

ただし，LとMはつぎのように定義される作用素である。

$$L=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha^2-\gamma^2\right)^2-i\alpha U\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha^2-\gamma^2\right)+i\alpha\frac{d^2U}{dy^2},\quad M=\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha^2-\gamma^2 \tag{2.8}$$

αとγの任意な組合せに対して固有値ωは無限個存在するが，線型安定理論ではそのうち最も不安定なものだけ考えればよい。このような固有値をαとγの函数と見なして

$$\omega=\Omega(\alpha,\gamma) \tag{2.9}$$

と書き，対応する固有函数を $v_{10}^{(0)}(y;\alpha,\gamma)$ とする。$v_{10}^{(0)}$ が $y=0$ で1になるように正規化されているものとすると，(2.7)の解は

$$v_{10}=a_0(\xi,\zeta,\tau)\,v_{10}^{(0)}(y;\alpha,\gamma) \tag{2.10}$$

のように書ける。ここで a_0 はこの段階では任意函数である。複素数の分散関係式(2.9)を(2.6)に代入すると，複素波数 α と γ の時間的および空間的変化を支配する方程式が得られる。

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}+\Omega_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}+\Omega_\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\tau}+\Omega_\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}+\Omega_\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\zeta}=0 \tag{2.11}$$

偏微分係数 Ω_α と Ω_γ は ξ 方向と ζ 方向の複素群速度を表わす。

連立偏微分方程式(2.11)は楕円型であるが，ξ と ζ を複素領域に拡張してやることにより特性曲線法を適用できる。(2.11)に対応する特性微分方程式

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\Omega_\alpha(\alpha,\gamma),\quad \frac{d\zeta}{d\tau}=\Omega_\gamma(\alpha,\gamma),\quad \frac{d\alpha}{d\tau}=0,\quad \frac{d\gamma}{d\tau}=0 \tag{2.12}$$

は，特性曲線に沿って α と γ が不変であり，したがって特性曲線が $\alpha=\alpha_r+i\alpha_i$，$\gamma=\gamma_r+i\gamma_i$，$\xi=\xi_r+i\xi_i$，$\zeta=\zeta_r+i\zeta_i$ で構成される8次元位相空間中の直線群で表わされることを示めす。複素 ξ 平面と複素 ζ 平面上のそれぞれ実軸が物理空間に対応しているのであるから，位相空間中の直線群のうち，ξ と ζ が常に実数値を取るものだけが物理的に意味を持つ。すなわち

$$\Omega_\alpha^{(i)}(\alpha_r,\alpha_i,\gamma_r,\gamma_i)=0,\qquad \Omega_\gamma^{(i)}(\alpha_r,\alpha_i,\gamma_r,\gamma_i)=0 \tag{2.13}$$

なる条件をみたす複素波数 α と γ だけが現実の流れ場の中を伝播できる。ここで上添字 (i) は虚数部を表わす。一方(2.12)を

積分し，$\tau=0$ で $\xi=\zeta=0$ なる初期条件を課すと

$$\xi/\tau=\Omega_\alpha^{(r)}(\alpha_r,\alpha_i,\gamma_r,\gamma_i),\quad \zeta/\tau=\Omega_\gamma^{(r)}(\alpha_r,\alpha_i,\gamma_r,\gamma_i) \tag{2.14}$$

なる解が得られるので，これと(2.13)を連立させることによって α と γ を ξ/τ と ζ/τ の函数として定めることができる。

(2.13)をみたす各波数成分はそれぞれ固有の群速度で下流に伝播するので，各成分の増幅率は位相函数 Θ の虚数部の特性曲線に沿う変化によって与えられる。

$$G\equiv-\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\Omega_\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}+\Omega_\gamma\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}\right)=\Omega^{(i)}-\alpha_i\Omega_\alpha^{(r)}-\gamma_i\Omega_\gamma^{(r)} \tag{2.15}$$

(2.13)から α_i と γ_i が α_r と γ_r の函数として定まるので，G は α_r と γ_r だけの函数と見なせる。負の増幅率を持つ波数成分は十分下流では減衰して消えてしまうので，波束は正の増幅率を持つ波数成分だけから構成されることになり，波束の周縁は

$$G(\alpha_r,\gamma_r)=0 \tag{2.16}$$

で表わされる中立安定条件をみたす波数成分で形成される。さらに波束中心は G を最大にする波数によって占められ，この波数はつぎの条件式を解くことによって定まる。

$$\partial G/\partial\alpha_r=0,\qquad \partial G/\partial\gamma_r=0 \tag{2.17}$$

(2.17)の解は $\alpha_i=\gamma_r=\gamma_i=0$ をみたすことが容易に示されるので，波束中心では主流の方向にだけ波数を持つことが判る。

図1は中立条件(2.16)をみたす α_r, $\Omega_\alpha^{(r)}$, $\Omega_\gamma^{(r)}$ を γ_r の函数として計算した例である。この結果と(2.14)を用いると，図2に示め

すような波束の平面形が得られる。同図には波束中心の位置および周縁に沿っての波頭の向きも示した。この結果は文献2)の実験結果(図8)と比較できる。波束の平面形については，Gaster[1]も計算を試みている。彼は波数を実数として扱う時間依存型安定計算の結果を利用して，いわゆるGaster変換によって(2.13)と(2.16)をみたす近似解を導びき，Reynolds数が大きくなると波束の周縁線が交叉する現象(wave caustics)が生じるという結果を得た。これに対して，(2.13)と(2.16)をみたす複素波数αとγを直接に数値計算して得た図2ではこの現象が生じていない。この事実はより高いReynolds数に対しても確められている。したがって，Gasterの用いた変換は本問題において十分精度のよい近似を与えなかったことになる。

3. 振幅函数

(2.4)を(2.1)に代入してϵで展開したとき，ϵ^1次の係数から定まる方程式は非同次型Orr-Sommerfeld方程式

$$(L+i\omega M)v_{11}=N(\partial/\partial\tau,\partial/\partial\xi,\partial/\partial\zeta)\,a_0 v_{10}^{(0)} \tag{3.1}$$

の形に書ける。ここでNはτ，ξ，yの偏微分を含む作用素である。上式が解を持つためには，右辺に$v_{10}^{(0)}$に随伴な固有函数を乗じ，yに関して0から1まで積分したものが0になる必要がある。この可解条件は振幅函数a_0を支配する方

程式の形に書ける。

$$\frac{\partial a_0}{\partial \tau}+\Omega_\alpha\frac{\partial a_0}{\partial \xi}+\Omega_\gamma\frac{\partial a_0}{\partial \zeta}+\frac{1}{2}\left(\Omega_{\alpha\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}+\Omega_{\gamma\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta}+2\Omega_{\alpha\gamma}\frac{\partial \alpha}{\partial \zeta}\right)a_0=0 \qquad (3.2)$$

(2.14)を用いて若干の変形を行なったのち，(2.12)に与えられた特性曲線に沿って積分するとつぎの解が得られる。

$$a_0=\frac{1}{\tau}\,\overline{a}_0(\alpha,\gamma) \qquad (3.3)$$

ただし $\overline{a}_0$ は α と γ の任意函数で，初期条件が与えられれば定まるものである。

振幅函数の変化をもっと詳しく調べるため，条件(2.13)をみたすある波数成分 $\alpha=\alpha_0$，$\gamma=\gamma_0$ に着目し，その波数の存在する点近傍を適当に拡大して振幅の局所的形状を求めることにする。この波数成分は x および z 方向に群速度 $\Omega_\alpha^{(0)}\equiv\Omega_\alpha(\alpha_0,\gamma_0)$ および $\Omega_\gamma^{(0)}\equiv\Omega_\gamma(\alpha_0,\gamma_0)$ で伝播するから，上記の目的に適する新しい座標系はつぎの変換で与えられる(文献8参照)。

$$\xi-\Omega_\alpha^{(0)}\tau=\varepsilon^{\frac{1}{2}}X,\qquad \zeta-\Omega_\gamma^{(0)}\tau=\varepsilon^{\frac{1}{2}}Z,\qquad \tau=T \qquad (3.4)$$

注目している領域での波数は α_0 と γ_0 に十分近いから

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\alpha_1(X,Z,T)+\frac{\varepsilon}{2}\alpha_2(X,Z,T)+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})\\ \gamma&=\gamma_0+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\gamma_1(X,Z,T)+\frac{\varepsilon}{2}\gamma_2(X,Z,T)+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})\end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

と展開してよい。これを(2.11)に代入して $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ で展開すると，最低次の係数から α_1 と γ_1 を支配する方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_1}{\partial T}+(\Omega_{\alpha\alpha}^{(0)}\alpha_1+\Omega_{\alpha\gamma}^{(0)}\gamma_1)\frac{\partial \alpha_1}{\partial X}+(\Omega_{\alpha\gamma}^{(0)}\alpha_1+\Omega_{\gamma\gamma}^{(0)}\gamma_1)\frac{\partial \alpha_1}{\partial Z}&=0\\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial T}+(\Omega_{\alpha\alpha}^{(0)}\alpha_1+\Omega_{\alpha\gamma}^{(0)}\gamma_1)\frac{\partial \gamma_1}{\partial X}+(\Omega_{\alpha\gamma}^{(0)}\alpha_1+\Omega_{\gamma\gamma}^{(0)}\gamma_1)\frac{\partial \gamma_1}{\partial Z}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

点源から発生する波束型撹乱は初期状態では全ての波数成分を含むから，$T=X=Z=0$ で α_1 と γ_1 が任意という初期条件を課して(3.6)を解くとつぎの解を得る。

$$X/T = \Omega^{(0)}_{\alpha\alpha}\alpha_1 + \Omega^{(0)}_{\alpha\gamma}\gamma_1, \qquad Z/T = \Omega^{(0)}_{\alpha\gamma}\alpha_1 + \Omega^{(0)}_{\gamma\gamma}\gamma_1 \tag{3.7}$$

一方，考えている領域での速度成分 v は

$$v = \exp(i\alpha_0 x + i\gamma_0 z - i\Omega^{(0)}t)A_0(X,Z,T)v^{(0)}_{10}(y;\alpha_0,\gamma_0) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \tag{3.8}$$

と書けるから，これと(2.4)および(2.10)を比較することによって，A_0 がつぎの展開式の初項で与えられることが判る。

$$a_0(\xi,\zeta,\tau)\exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\{\Theta(\xi,\zeta,\tau) - \alpha_0\xi - \gamma_0\zeta + \Omega^{(0)}\tau\}\right]$$
$$= A_0(X,Z,T) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}A_1(X,Z,T) + O(\varepsilon) \tag{3.9}$$

上式を ξ, ζ, τ でそれぞれ偏微分するとつぎの関係を得る。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial \xi} &= -\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left(i\alpha_1 - \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial X}\right) - \left(\frac{i}{2}\alpha_2 - \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_1}{\partial X} - \frac{A_1}{A_0^2}\frac{\partial A_0}{\partial X}\right) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \\
\frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial \zeta} &= -\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left(i\gamma_1 - \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial Z}\right) - \left(\frac{i}{2}\gamma_2 - \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_1}{\partial Z} - \frac{A_1}{A_0^2}\frac{\partial A_0}{\partial Z}\right) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \\
\frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial \tau} &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\{\Omega^{(0)}_{\alpha}\left(i\alpha_1 - \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial X}\right) + \Omega^{(0)}_{\gamma}\left(i\gamma_1 - \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial Z}\right)\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial T} + \frac{i}{2}\Omega^{(0)}_{\alpha\alpha}\alpha_1^2 + i\Omega^{(0)}_{\alpha\gamma}\alpha_1\gamma_1 + \frac{i}{2}\Omega^{(0)}_{\gamma\gamma}\gamma_1^2\right. \\
&\quad \left. + \Omega^{(0)}_{\alpha}\left(\frac{i}{2}\alpha_2 - \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_1}{\partial X} - \frac{A_1}{A_0^2}\frac{\partial A_0}{\partial X}\right) + \Omega^{(0)}_{\gamma}\left(\frac{i}{2}\gamma_2 - \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_1}{\partial Z} + \frac{A_1}{A_0^2}\frac{\partial A_0}{\partial Z}\right)\right\} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

$\varepsilon \to 0$ に対して右辺が発散しないための条件から

$$i\alpha_1 = \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial X}, \qquad i\gamma_1 = \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial Z} \tag{3.11}$$

なる関係を得る。さらに(3.10)を(3.2)に代入して微小項を省略

すると，つぎの振幅方程式が導びかれる。

$$\frac{\partial A_0}{\partial T}-\frac{i}{2}\Omega^{(0)}_{\alpha\alpha}\frac{\partial^2 A_0}{\partial X^2}-i\Omega^{(0)}_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 A_0}{\partial X\partial Z}-\frac{i}{2}\Omega^{(0)}_{\gamma\gamma}\frac{\partial^2 A_0}{\partial Z^2}=0 \qquad (3.12)$$

(3.7) と (3.11) を用いれば，上の方程式は解くことができる。

$$A_0=\frac{\overline{A}_0(\alpha_0,\gamma_0)}{T}\exp\left\{\frac{i}{2T}\frac{\Omega^{(0)}_{\gamma\gamma}X^2-2\Omega^{(0)}_{\alpha\gamma}XZ+\Omega^{(0)}_{\alpha\alpha}Z^2}{\Omega^{(0)}_{\alpha\alpha}\Omega^{(0)}_{\gamma\gamma}-\Omega^{(0)\,2}_{\alpha\gamma}}\right\} \qquad (3.13)$$

ただし，$\overline{A}_0$ は α_0 と γ_0 の任意函数である。特別な場合として，α_0 と γ_0 を波束中心の波数に選べば，ここでは $\Omega^{(0)}_{\alpha\gamma}=0$ が成り立つために (3.12) の第三項が消えて解はつぎのように簡単化される。

$$A_0=\frac{\overline{A}_0(\alpha_0,\gamma_0)}{T}\exp\left\{\frac{i}{2T}\left(\frac{X^2}{\Omega^{(0)}_{\alpha\alpha}}+\frac{Z^2}{\Omega^{(0)}_{\gamma\gamma}}\right)\right\} \qquad (3.14)$$

A_0 は一般に複素数であるから，(3.13) あるいは (3.14) の絶対値を取れば実際の攪乱の局所的な振幅形状が描ける。

4. 非線型効果

攪乱の振幅が幾分大きくなった段階では，非線型性の効果が無視できなくなると思われる。ここでは波束型攪乱に対して弱い非線型安定理論を適用し，非線型効果がどのように表示されるかを調べる。

振幅の大きさを表わす微小パラメタを σ とし，攪乱の主要項が線型理論で仮定されたものと同じ形で表わされるものとする。このとき攪乱の基本波成分はつぎのように書かれる。

$$v_1 = \sigma e^{i\Theta(\xi,\zeta,\tau)/\varepsilon}\{a_0(\xi,\zeta,\tau)\,v_{10}^{(0)}(y;\alpha,\gamma) + O(\varepsilon)\}$$
$$+\sigma^3 e^{(i\Theta-2\Theta_i)/\varepsilon}\{v_{10}^{*}(y,\xi,\zeta,\tau)+O(\varepsilon)\} + O(\sigma^5) \qquad (4.1)$$

ここで $v_{10}^{(0)}$ は線型理論で定まる固有函数であり，v_{10}^{*} が非線型効果による補正項である。なお，上式が $\varepsilon\to 0$ に対しても意味を持つためには σ が

$$\sigma \sim o\{\exp(-G_{max}\tau/\varepsilon)\} \qquad (4.2)$$

の程度の微小量であることが必要である。ここで G_{max} は (2.15) で定義された G の最大値である。基本波が (4.1) で表わされるとき，二倍高調波と平均流のゆがみ成分は次式で与えられる。

$$v_2 = \sigma^2 e^{2i\Theta/\varepsilon}\{v_{20}(y,\xi,\zeta,\tau)+O(\varepsilon)\} + O(\sigma^4) \qquad (4.3)$$

$$v_0 = \sigma^2 e^{-2\Theta_i/\varepsilon}\{v_{00}(y,\xi,\zeta,\tau)+O(\varepsilon)\} + O(\sigma^4) \qquad (4.4)$$

弱い非線型理論ではこれ以外の高調波を考える必要がない。v_1 に対する境界条件は (2.2) と同じであるが，v_2 および v_0 は y の奇函数になるのでつぎの条件を適用する。

$$y=0 \text{ で } \quad v=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \qquad y=1 \text{ で } \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (4.5)$$

以上では攪乱速度の y 方向成分だけを記述したが，x 方向と z 方向の成分に対しても (4.1)，(4.3)，(4.4) と同型の表示がなされるものとする。

v_1，v_2，v_0 および v_1 と v_2 の共役複素数を加え合せて攪乱方程式 (1.1)－(1.3) に代入し，各 Fourier 係数および ε と σ の各べきの係数を分離することによって各成分を支配する方程群を

導びく。v_{20} に対する方程式はつぎのようになる。

$$[L(2\alpha,2\gamma)+2i\omega M(2\alpha,2\gamma)]v_{20}=a_0^2\Big[-4(\alpha^2+\gamma^2)(\boldsymbol{v}_{10}^{(0)}\cdot\nabla_1)v_{10}^{(0)}$$
$$-2i\frac{\partial}{\partial y}\{\alpha(\boldsymbol{v}_{10}^{(0)}\cdot\nabla_1)u_{10}^{(0)}+\gamma(\boldsymbol{v}_{10}^{(0)}\cdot\nabla_1)w_{10}^{(0)}\}\Big] \tag{4.6}$$

ここで，$\nabla_1=(i\alpha,\ \partial/\partial y,\ i\gamma)$ はベクトル作用素であり，$L(2\alpha,2\gamma)$ と $M(2\alpha,2\gamma)$ は (2.8) で定義された L と M において $\alpha\to2\alpha$，$\gamma\to2\gamma$ に置き換えたものである。2ω は (4.6) の右辺を 0 に置き換えた同次方程式の固有値とは一致しないので，上式は通常の強制項を持つ常微分方程式である。右辺の a_0^2 の係数は既知量であるから，解を a_0^2 に比例する形に置くことにより，この方程式は容易に解ける。これに応じて u_{20}，w_{20} も a_0^2 に比例した形で一意に定まる。

一方，平均流のゆがみ成分については事情が若干異なる。v_{00} と u_{00} に対する方程式を書くとつぎのようになる。

$$[L(2i\alpha_i,2i\gamma_i)-2\omega_i M(2i\alpha_i,2i\gamma_i)]v_{00}=|a_0|^2\Big[4(\alpha_i^2+\gamma_i^2)(\boldsymbol{v}_{10}^{(0)}\cdot\tilde{\nabla}_1)\tilde{v}_{10}^{(0)}$$
$$+2\frac{\partial}{\partial y}\{\alpha_i(\boldsymbol{v}_{10}^{(0)}\cdot\tilde{\nabla}_1)\tilde{u}_{10}^{(0)}+\gamma_i(\boldsymbol{v}_{10}^{(0)}\cdot\tilde{\nabla}_1)\tilde{w}_{10}^{(0)}\}+(\mathrm{c.c.})\Big] \tag{4.7}$$

$$\Big\{\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+4\alpha_i^2+4\gamma_i^2\Big)+2\alpha_i U-2\omega_i\Big\}(4\alpha_i^2+4\gamma_i^2)u_{00}$$
$$=\Big[2\alpha_i\Big\{\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+4\alpha_i^2+4\gamma_i^2\Big)+2\alpha_i U-2\omega_i\Big\}+4\gamma_i^2\frac{dU}{dy}\Big]v_{00}$$
$$+|a_0|^2\Big[4\gamma_i^2(\boldsymbol{v}_{10}^{(0)}\cdot\tilde{\nabla}_1)\tilde{u}_{10}^{(0)}-4\alpha_i\gamma_i(\boldsymbol{v}_{10}^{(0)}\cdot\tilde{\nabla}_1)\tilde{w}_{10}^{(0)}+(\mathrm{c.c.})\Big] \tag{4.8}$$

ここで，～は共役複素数を示し，(c.c.) は前に書かれた式の複素共役式を表わす。(4.7) の右辺における $|a_0|^2$ の係数は既

知量であるから，もし $\alpha_i^2+\gamma_i^2\neq 0$ ならば，(4.6) の場合と全く同様な方法で v_{00} が求まり，対応する u_{00} と w_{00} も定まる。ところが；$\alpha_i=\gamma_i=0$ の場合には，(4.7) の右辺は 0 になり，$2i\omega_i$ がこの同次方程式の固有値とは一致しないから，$v_{00}\equiv 0$ 以外に解はない。このときには (4.8) の右辺も 0 となり，左辺の作用素も同時に 0 となるため，u_{00} は不定という結果を得る。α_i と γ_i がともに 0 になるのは波束中心であるから，以上の事実は波束中心近傍における振幅の局所的形状を求めるためには，(4.1) の展開が不適当であることを示す。そこで波束中心に適する展開法は次節で与えることにし，ここではそれ以外の領域に対して解析を進める。

$\alpha_i^2+\gamma_i^2\neq 0$ の場合には (4.6) と (4.7) の解が

$$v_{20}=a_0^2 v_{20}^*(y;\alpha,\gamma),\quad v_{00}=|a_0|^2 v_{00}^*(y;\alpha,\gamma) \tag{4.9}$$

の形に書けることは上に述べた。このとき基本波の非線型効果による補正項 v_{10}^* を支配する方程式はつぎの形に書ける。

$$\begin{aligned}[L(\alpha+2i\alpha_i,\gamma+2i\gamma_i)+i(\omega+2i\omega_i)M(\alpha+2i\alpha_i,\gamma+2i\gamma_i)]\,v_{10}^*\\ =a_0|a_0|^2 H[v_{10}^{(0)},\tilde{v}_{10}^{(0)},v_{20}^*,v_{00}^*]\end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで H は $v_{10}^{(0)}$ と v_{00}^*，$\tilde{v}_{10}^{(0)}$ と v_{20}^* の相乗項からなる既知量を表わす。α_i，γ_i，ω_i のすべてが 0 である場合以外は (4.10) が通常の非同次型常微分方程式であり，その解が $a_0|a_0|^2$ に比例した形で求まることは (4.6)，(4.7) の場合と同様である。

5. 波束中心近傍における非線型効果

前節に与えた展開法は α と γ の虚数部がともに0になる波束中心では破綻した。そこでこの部分に対しては，才3節で述べた局所的な展開法を適用することにし，(3.4)で定義された局所座標 X，Z，T を用いて解をつぎの形に置く。

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \sigma e^{i(\alpha_0 x-\omega_0 t)}\left\{A_0(X,Z,T)\,v_{10}^{(0)}(y;\alpha_0,0)+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\right\} \\ &\quad + \sigma^3 e^{i\{\alpha_0 x-(\omega_0+2i\omega_{0i})t\}}\left\{v_{10}^{*}(y,X,Z,T)+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\right\}+O(\sigma^5) \\ v_2 &= \sigma^2 e^{2i(\alpha_0 x-\omega_0 t)}\left\{v_{20}(y,X,Z,T)+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\right\}+O(\sigma^4) \\ v_0 &= \sigma^2 e^{2\omega_{0i}t}\left\{v_{00}(y,X,Z,T)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}v_{01}(y,X,Z,T)+O(\varepsilon)\right\}+O(\sigma^4) \end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

ただし，$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ に関する展開は波束中心まわりのものであるから α_0 は実数，γ_0 は0であり，対応する固有値 ω_0 は一般に複素数である。前節と同様な手続きに従うと v_{20} は(4.6)と同形の方程式から定まり，(4.7)において $\alpha_i=\gamma_i=0$ と置いた方程式からは $v_{00}\equiv 0$ なる解が得られる。一方，u_{00} に対する方程式は

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\omega_{0i}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)u_{00} = -\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\omega_{0i}\right)\frac{\partial v_{01}}{\partial y} + \frac{\partial^2|A_0|^2}{\partial Z^2}\left\{(v_{10}^{(0)}\cdot\tilde{\nabla}_1)\tilde{u}_{10}^{(0)}+(c.c.)\right\} \quad (5.2)$$

で与えられる。右辺に含まれる v_{01} はつぎの方程式を解くことによって定まる。

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\omega_{0i}\right)\frac{\partial^2 v_{01}}{\partial y^2} = -\frac{\partial|A_0|^2}{\partial X}\frac{\partial}{\partial y}\left\{(v_{10}^{(0)}\cdot\tilde{\nabla}_1)\tilde{u}_{10}^{(0)}+(c.c.)\right\} \quad (5.3)$$

(5.2)を解くには，Daveyほか[9]が行ったように，

$$\frac{\partial^2 B}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2}=\frac{\partial^2|A_0|^2}{\partial Z^2} \qquad (5.4)$$

をみたす函数 $B(X,Z,T)$ を導入すればよい。このとき解は

$$u_{00}=|A_0|^2 u_{00}^{*}(y;\alpha_0,0)+B\,u_{00}^{**}(y;\alpha_0,0) \qquad (5.5)$$

の形に求まる。v_{20} は (4.9) 第1式において a_0, α, γ を A_0, α_0, および 0 で置き換えたものとして与えられ，u_{00} は (5.5) の形に書けるから，(4.10) に対応する式はつぎのようになる。

$$[L(\alpha_0,0)+i(\omega_0+2i\omega_{0i})M(\alpha_0,0)]v_{10}^{*}$$
$$=A_0|A_0|^2 H[v_{10}^{(0)},\tilde{v}_{10}^{(0)},v_{20}^{*},v_{00}^{*}]+A_0 B H^{*}[v_{10}^{(0)},v_{00}^{**}] \qquad (5.6)$$

この式は，$\omega_{0i}\neq 0$ ときには通常の非同次型方程式であるから解は $A_0|A_0|^2$ に比例する項と A_0B に比例する項の和の形に求まる。しかし，$\omega_{0i}=0$ の場合には ω_0 が左辺の作用素の固有値そのものであるため，方程式は特異型になり一般には解が存在しない。波束中心での固有値が実数になるのは Reynolds 数 R が限界値 R_c に等しい場合であるから，このような特異性の出現は (5.1) に与えた展開でも限界 Reynolds 数近傍ではやはり破綻することを示めす。

Reynolds 数が R_c に十分近い場合の非線型安定理論は Stewartson と Stuart[10] によって二次元攪乱を対象にして与えられ，その後 Davey ほか[9] によって三次元攪乱への拡張がなされている。彼等は (5.1) に含まれる諸量を $R-R_c$ のべき級数に展開し，かつ

$$R-R_c=\varepsilon R_1\,,\qquad \sigma^2=\varepsilon \qquad (5.7)$$

と置く方法によって上に述べた特異性を除去し，合理的な解を導びいた。ただし R_1 は $O(1)$ の量である。このとき v_1 はつぎの形に書かれる。

$$v_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{i(\alpha_c x - \omega_c t)} \{ A_0(X, Z, T) v_{10}^{(0)}(y; \alpha_c, 0) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} v_{11}(y, X, Z, T) + \varepsilon v_{12}(y, X, Z, T) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \} \quad (5.8)$$

これを攪乱方程式に代入して $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ で展開し，各べきの係数を0に等しいとおけば，上式の各項を支配する方程式群が得られる。$v_{10}^{(0)}$ と v_{11} に対する方程式は無条件に解くことができるが，v_{12} に対する方程式が解を持つためにはある可解条件がみたされる必要がある。それはつぎの振幅方程式の形に表わされる。

$$\frac{\partial A_0}{\partial T} - \frac{i}{2}\Omega_{\alpha\alpha}^{(c)} \frac{\partial^2 A_0}{\partial X^2} - \frac{i}{2}\Omega_{\gamma\gamma}^{(c)} \frac{\partial^2 A_0}{\partial Z^2} = -i\left(\frac{\partial \omega}{\partial R}\right)_c R_1 A_0 + \lambda A_0 |A_0|^2 + \lambda^* A_0 B \quad (5.9)$$

ここで添字 c は限界点での値を表わす。また，λ と λ^* は (5.6) の右辺に与えられている H と H^* に随伴固有函数を乗じて y に関して0から1まで積分したときに定まる複素定数である。

以上によって波束型攪乱に対する弱い非線型解がすべて記述されたことになる。Reynolds 数が限界値 R_c より十分大きいときには，非線型効果を表わす項は線型解からの通常の摂動法によって求めることができる。非線型項は線型解の上に重ねられるだけで，線型解の振舞いに影響を与えるものではなく，したがって (4.1) の a_0 あるいは (5.1) の A_0 は線型解析の結果 (3.3) あるいは (3.13) によって表わされることになる。これに対して，

RがR_cに近い場合には，非線型項を定めるのに特異摂動法を用いる必要が生じる。この場合，ふたつの微小パラメタεとσを関係ずけることによって永年項を除去することになるので，(5.8)における振幅函数A_0は線型解析のみからは定めることができず，非線型効果を含んだ式(5.9)の解としてはじめて定まる量である。

参考文献

1) Gaster, M. (1968) J. Fluid Mech. 32, 173.

2) Gaster, M. & Grant, I. (1975) Proc. R. Soc. Lond. A. 347, 253.

3) Gaster, M. (1975) Proc. R. Soc. Lond. A. 347, 271.

4) Gaster, M. (1979) AIAA Paper No. 79-1492.

5) Nayfeh, A.H. (1979) AIAA Paper No. 79-0262.

6) Cebeci, T. & Stewartson, K. (1979) AIAA Paper No. 79-0263.

7) Whitham, G. B. (1974) Linear and Nonlinear Waves. John Wiley & Sons.

8) 伊藤信毅 (1979) 京大数理解析研講究録 354, 10. (または Proceedings of IUTAM-Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Stuttgart, F.R.G., September 16-22, 1979. Springer — 印刷中)

9) Davey, A., Hocking, L.M. & Stewartson, K. (1974) J. Fluid Mech. 63, 529.

10) Stewartson, K. & Stuart, J.T. (1971) J. Fluid Mech. 48, 529.

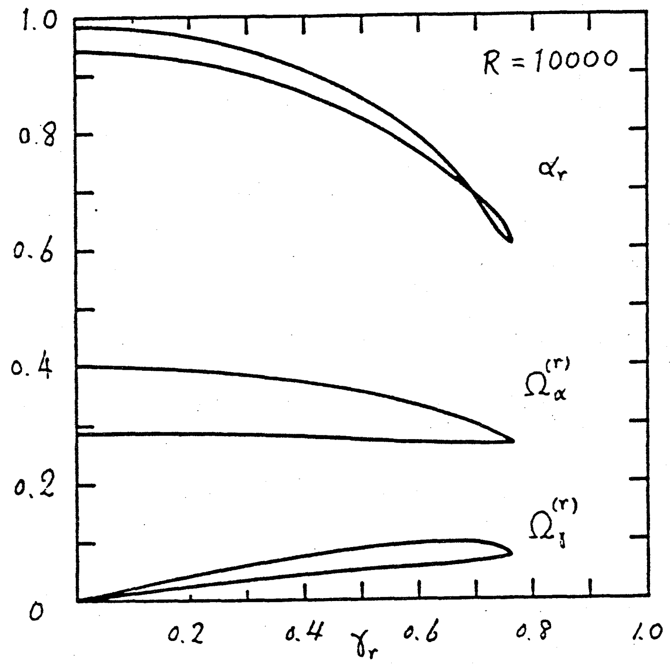

図1. 中立条件をみたす波数と群速度

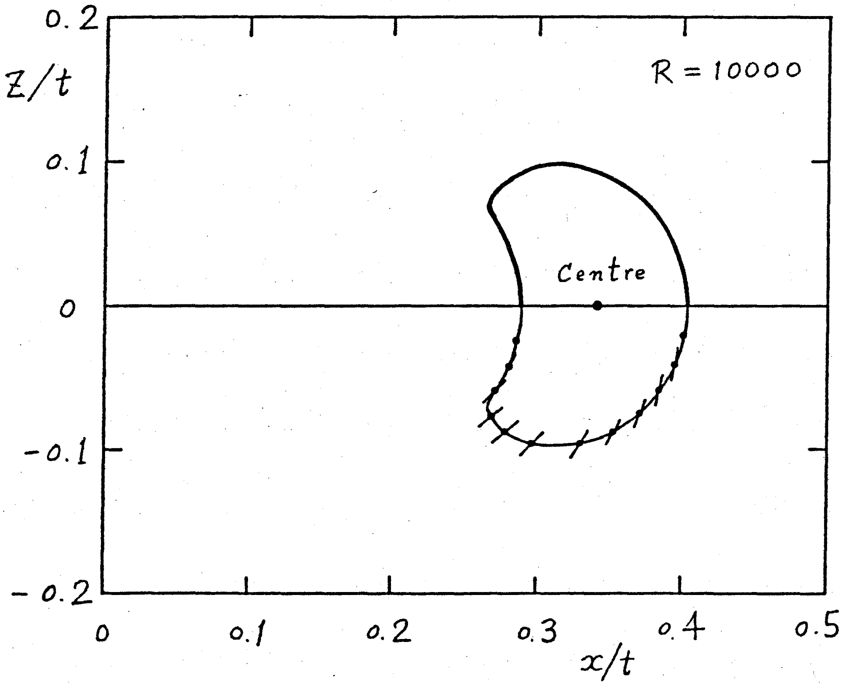

図2. 波束の平面形と中心