数理解析研究所講究録
第 390 巻 1980 年 175-185

Random-forced Navier-Stokes Flow の Formulation とその数値解法（I）

岩手大工　細川　巖
航技研　山本　稀義

1. Hopf方程式とFokker-Planck方程式

文献1,2で明かしたように，random force が Gaussian with zero mean で，時間的に white noise である時には，標題の流れの ensemble の確率分布（汎函数）$p[u(x),t]$ は，次のような Fokker-Planck（汎函数微分）方程式によって支配される。

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\int\frac{\delta}{\delta u_\alpha(x)}\left[\chi_\alpha(u)p\right]dx+\frac{1}{2}\iint\frac{\delta^2}{\delta u_\alpha(x)\delta u_\beta(x)}\left[F_{\alpha\beta}(x,x')p\right]dx\,dx' \qquad (1)$$

ここに，$u(x)\equiv\{u_\alpha(x);\alpha=1,2,3\}$ は流れの速度場，t は時間変数，χ_α は Navier-Stokes operator，又 random force field を $f_\alpha(x,t)$ とすれば，$F_{\alpha\beta}$ は次のように f_α の相関と関連する。

$$F_{\alpha\beta}(x,x')\delta(t-t')=\langle f_\alpha(x,t)f_\beta(x',t')\rangle:\ \text{positive def.} \qquad (2)$$

ここで添字α,βはsummation conventionに従う．この方程式(1)で，第2項が落ちると，よく知られたHopf方程式[3]の確率方程式表現そのものになる．第2項は高階微分を含むため，たとえ$F_{\alpha\beta}\to 0$の極限をとっても，解が一般にHopf方程式の解と等価になることはない．

両者の明確なコントラストは，定常解の存在と一意性にある．Fokker-Planck方程式は，最も簡単なマルコフ過程を記述するので，相空間にdisconnected regionができるような$F_{\alpha\beta}$を設定しない限り，定常解の存在と一意性は保証されている．然し，Hopf方程式の場合は，一般にそうではない．Subcritical Reynolds数において，Navier-Stokes Flowが漸近安定な唯一の定常解$u_0(x)$をもつ場合，むしろ例外的にHopf方程式の定常解の一意性と存在が予言できるが，bifurcation[4]を生じた後のReynolds数においては，そうはいかない．前者の場合，

$$p=\delta[u(x)-u_0(x)] \qquad (3)$$

が予想できる定常解であるが，後者の場合，仮に安定な$u(x)$の定常解があっても，それは複数であるから，(3)の型の線型結合として無数のpが定常であり得るからである．（結果は全く初期条件に依存する．）いわんや，相空間の中で定常解がなくて，振動解（limit cycle）がattractorとなっている

時は，もはや，殆ど凡ての初期条件に対してpは永久に非定常となるだろう．更に振動解もなく，strange attractorがあるというような場合も，勿論，事情は同じである．とすれば，Hopf方程式の定常解を，supercritical Reynolds数に対して探そうという目論みは，筆者達には，甚だ空しいものに思えるのである．仮にあったとしても，その解p_0を初期条件とする以外の，殆ど凡ての初期条件から発するpはそこを避けて通るようなものである．

非粘性の場合，Hopf方程式の定常解が，Hopf自身によってみつけられているのは周知の通りであるが，上記の空しさは，この解に関してもつきまとう．それは丁度，Liouville方程式のカノニカル分布解がもっている空しさと同じものである．現在，われわれは，原方程式又はその解のcoarse-grainingによって，この空しさをとり除き，逆にその重要性の理解をしようとしているように見えるが，その理論的基礎は完全なものとはいい難い．

このようなHopf方程式の難点を一掃する点で，Fokker-Planck方程式は甚だ魅力的にみえる．勿論，$F_{\alpha\beta}$-依存という問題が新しい複雑さを入れることになるが，$F_{\alpha\beta}\to 0$の時，少なくともglobalなpの解の挙動（又はuについての低次モーメント）に対しては，$F_{\alpha\beta}$の型に敏感でない，ほぼ普遍的

な定常解が得られないであろうか．われわれは，有限区間で外流と相互作用するinhomogeneous Burgers flowについて（(1)に対するモンテカルロ法により）実験し，この期待が当を得たものであることを確めている[5]．残念ながら，このFlow modelでは，bifurcationは（critical flowで）唯一回しか起らず，そこで，新しい（相空間の中の）二つの固定点をattractorsとするのみなので，turbulent flowといい得るようなpの型の質的変化は起っていない．Navier-Stokes flowで実験することが望ましいのであるが，次元の増加に伴ない，加速度的に考慮さるべきmodeの数が増えて，計算時間を喰うので，何か飛躍的な技法で，この問題を克服することが待たれていた．ここでは，その技法を以下に説明するつもりである．所で，turbulent flowとみなし得るpの定常解 p_0^F を得た場合，これは，本来のHopf方程式の解 p^H の行動とどう関係するであろうか．上記の議論から推して，相空間の中のstrange attractorはinvariant setであるから，$t\to\infty$ でこのset内の $u(x)$ のensembleの運動を p^H が非定常的に記述することになっている筈である．ここで，時間平均とか何かの方法でcoarse-grainingすれば，p^H は定常化できると思われるが，それはとりも直さず，このinvariant setの相空間における定常的なcoarse-grained measure

を与えることになる. これを $\tilde{p}^H$ とすれば, 先程の p_0^F はこれに近いであろうというのが, われわれの予想である. [そして, $F_{\alpha\beta}\to 0$ の時, 相空間の中での p_0^F の鋭い挙動だけが, (1)の第2項に無視できない量として現れるのであるから, そのような相空間の領域及び近傍を除けば, p_0^F は, ほぼ p_0^H (Hopf方程式の定常解, もしこれがいくつかあるとすると, その線型結合の一つ) に等しい筈で, 従って, 上記の予想が真ならば, 少なくとも相空間の中の相当の領域において $\tilde{p}^H \sim p_0^H$ ということになり, Hopf方程式の定常解を求めることは, この意味で, あながち空しいことではないということになるのである.] これらの議論をまとめたものを次の表に示した. いろいろなattractorsが相空間に生ずる中間的にunstableなケースが考えられるが, それらは省略した.

	Hopf ensemble vs.	Fokker-Planck ensemble (with a very small F_{mn})
if stable, under the steady B. C.	will concentrate to a steady laminar state	will constitute a sharp Gaussian distribution around a steady laminar state
if essentially unstable, "	would move in what? a coarse-grained measure in phase space will be near →	will arrive at a steady "turbulence-like" distribution

2. p の一般解

方程式(1)で，$u(x)$ のmode展開を行い，変(函)数を可算個のスカラーmode集合 $v=\{v_n;\ n=1,2,\cdots\}$ で置き換えると，

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\sum_n \frac{\partial}{\partial v_n}(\chi_n\ vp)+\frac{1}{2}\sum_m\sum_n \frac{\partial^2}{\partial v_m \partial v_n}(F_{mn}\,p) \qquad (4)$$

という形にすることができる[2]. ここで，χ_nは速度場のn番目のmodeに対するNavier-Stokes operatorであり，F_{mn}は$F_{\alpha\beta}(x,x')$の第mn番目のmodeである. 数値計算の場合，凡てのmodesを取ることはできないので，適当な打ち切りを行うことになり，従って(4)は多変数のFokker-Planck方程式と考えることができる.

Infinitesimal propagation kernel $\theta(v^{j+1}/v^j)$ を導入すると，p の一般解は次のように求められる.

$$p(v,t)=\int\cdots\int\prod_{j=0}^{M-1}\theta(v^{j+1}/v^j)\,dv^j \quad P(v^0,0) \qquad (5)$$

ここに

$$\theta(v^{j+1}/v^j)=\prod_n \exp\left[-(v_n^{j+1}-v_n^j-\Delta t\,\chi_n v^j)^2/(2\Delta t D_n)\right]/(2\pi\Delta t D_n)^{1/2} \qquad (6)$$

$\Delta t=t/M$，$v^M=v$，そして簡単のために$F_{mn}=\delta_{mn}D_n$とした.

(4)に対するいわゆるItoの確率積分は，

$$\delta v_n=\delta t\,\chi_n v+(\delta t\,D_n)^{1/2}\,\lambda \qquad (7)$$

の解として与えられるものであるが（ここに，λは標準正規乱数），これは(5)-(6)式より容易に導くことができよう.

モンテカルロ法でpを求める時は，この式(7)が重要であることは殆ど説明を要しまい．即ち，$p(v^j, t)$が分っていたとすると，この確率でv^jのensembleを作り，これを(7)式に入れて，v^{j+1}のensembleを(7)から計算することができ，この操作を続けることによって，その後の任意の時刻における$p(v, t)$を，vのensembleのpopulationとして，与えることができる．

3．数値解法

上に述べたモンテカルロ法の原理は文献5で，Burgers model flowについて実行された所である．然し，2次元，3次元のNavier-Stokes flowでは，必要なmode数が飛躍的に増加し，恐らく現存のcomputerでは実行不能のようである．その最も難しい点は(7)式の$\chi_n V$の計算に現れる．$\chi_n V$はmodeについてのsummationを含んでいるので，mode数が多い程時間がかかるのである．そこで，これを克服できる技術が待たれる由縁であるが，今回は次のようなtrickを出案してみた．

先ず，

$$\chi_n V = \int A(v)\, dM_n \qquad \left(但し \int dM_n = 1 \right) \tag{8}$$

とおいてみよう．summationの代りに積分表現で与えたが，Stieltjes measureを考えれば，実質的にはsummationと同じである．そこで，$\Delta t \to 0$ の時，$O(\Delta t^2)$を無視する近似で，

θを評価し直してみる.

$$\theta(V^{j+1}/V^{j}) \cong \prod_n \exp\left[-(V_n^{j+1}-V_n^{j})^2/(2\Delta t D_n)+(V_n^{j+1}-V_n^{j})\int A_n(V^j)dM_n/D_n\right]/(2\pi\Delta t D_n)^{1/2}$$

$$\cong \prod_n \exp\left[-(V_n^{j+1}-V_n^{j})^2/(2\Delta t D_n)\right]\left[1+(V_n^{j+1}-V_n^{j})\int A_n(V^j)dM_n/D_n\right]/(2\pi\Delta t D_n)^{1/2}$$

$$\cong \prod_n \int dM_n \exp\left[-(V_n^{j+1}-V_n^{j})^2/(2\Delta t D_n)\right]\left[1+(V_n^{j+1}-V_n^{j})A_n(V^j)/D_n\right]/(2\pi\Delta t D_n)^{1/2}$$

$$\cong \prod_n \int dM_n \exp\left\{\left[-(V_n^{j+1}-V_n^{j}-\Delta t A_n(V^j)\right]^2/(2\Delta t D_n)\right\}/(2\pi\Delta t D_n)^{1/2} \qquad (9)$$

ここで，M_nはV_nに依存しないことを前提にしている. $O(\Delta t^2)$を無視する近似は，既にθの表現(6)を得る段階で使用されているので，(6)と比べて今の表現(9)の妥当性を毀すものではないことを注意する. (5)-(9)によって，(7)のanalogueを作ると，

$$\delta V^j = \delta t\, \underline{A_n(V^j)} + (\delta t D_n)^{1/2} r \qquad (10)$$

となる. 但し，$\underline{A_n(V^j)}$は確率measure M_nに従って各time step毎にstochasticに取らなければならない. 従って，(10)の第1項は(7)と違って決定論的過程によるdrift を与えるのではなくて，形式的には第2項とは別の意味での独立な確率変数として扱われていることに注意しなければならない. (これは，実際は$\int A_n dM_n$の評価のためのsamplingである.) この結果，われわれは$\chi_n V$におけるsummationの計算時間の困難から開放されたことになる.

実際，$A_n(V)$の形を出してみよう. V_nをスカラーmodeとしたために，Navier-Stokes operetorを扱う場合，$n=\alpha R$ (α:

速度場のベクトル成分，k：波数ベクトル）と表わすことにし，更に $V_{\alpha k}$ の complexity を許して，

$$\chi_{\alpha k} V = -\nu k^2 V_{\alpha k} - i k_\beta \left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2}\right) \sum_{p+q+k=0} V^*_{\beta p} V^*_{\gamma q} \tag{11}$$

と書くことができる．第2項の summation は k が固定され，そして $p+q+k=0$ の条件のために，実際は一つのパラメータ p 又は q について行うものとなる．従って，q をパラメータと取れば，適当なウエイト $C(q)$ を仮定し，

$$A_n(V) = -\nu k^2 V_{\alpha k} - i k_\beta \left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2}\right) C(q)\, V^*_{\beta(k-q)} V^*_{\gamma q} \tag{12}$$

とおくことができる．この場合 $\int dM_n = 1$ の条件より，

$$\sum_q C^{-1}(q) = 1 \tag{13}$$

である必要がある．そこで，$\underline{A_n(V)}$ は，確率 $C^{-1}(q)$ をもって sample された q によって(12)を計算することを意味することになる．$C(q)$ の選択は，sampling の性能を決めることになるので，なるべく，importance sampling の原理に従うものを取る方が sample 数の節約従って計算時間の短縮に役立つ筈である．

(7)に則してモンテカルロ法を行う場合は，初期時刻から適当な時刻まで，相空間の中の V の random path を追跡し，これらの ensemble を作ることで凡ては終ったわけであるが，(10)に則する場合は，stochastic な取り扱いがもう一つ増えているので，考え方を少し変えた方がよい．random paths

の集合を作るというよりも，各 time step 毎に，$p(v,t)$の推定を実行する方法を取る．こうして行かないと，$\underline{A_n(v)}$の sampling が円滑にできないからである．派生的に未だ若干の数値計算上の技術的問題があるが，それらについては，次の機会に計算結果の報告と一緒に述べたいと思う．

最後に，(12)において$C(q)\equiv 1$とした場合，$dV_n/dt = A_n(V_n, V_m, V_\ell)$，$dV_m/dt = A_m(V_m, V_\ell, V_n)$，$dV_\ell/dt = A_\ell(V_\ell, V_n, V_m)$ が J. Lee[6] の fundamental triad-interaction system を構成するという興味ある事実を指摘したい．この system はこれ自体で決定論的力学になっているために，上に述べたような$p(v,t)$の推定なしに，random paths の集合を取る旧来の方法が可能である．然も，この力学の中で energy の保存，helicity の保存も保証されているのが，甚だ魅力的でもある．然しながら，この方法では step by step の$\underline{A_n}$の stochasticity が失われていることは明かで，このように計算した結果が，Navier-Stokes flow の性質をどの程度反映するものになるかは甚だ疑問であるということを申し添えて，今回の議論を終りたい．

参考文献

1. I. Hosokawa, J. Phys. Soc. Japan <u>25</u> (1968), 271.
2. I. Hosokawa, J. Stat. Phys. <u>15</u> (1976), 87.
3. E. Hopf, J. Rat. Mech. Anal. <u>1</u> (1952), 87.

4. J. E. Marsden and M. McCracken, The Hopf Bifurcation and Its Applications (Springer, New York, 1976).

5. I. Hosokawa and K. Yamamoto, J. Stat. Phys. 13 (1975), 245.

6. J. Lee, Phys. Fluids 22 (1979), 40.