数理解析研究所講究録
第 391 巻 1980 年 38-65

加速度をもつ輸送過程の拡散近似

広大 理学部 大和祐一

確率微分方程式に現われるBrown運動を区分的に滑らかな曲線で置換えて得られる常微分方程式で表わした幾何学的関係から対応する確率微分方程式で表わした関係に移行する問題は[7],[18],[5],[6]などで扱われているが，ここでは，区分的に滑らかな曲線が輸送過程の場合について，Markov過程の極限定理のmartingale approach([12],[1] 参照)の具体的な場合として，同様の問題を紹介する。

§1 極限定理

μ は $\mathbb{R}^n$ の上の確率測度，H は $\mathbb{R}^n$ の上の C^∞ ベクトル場でいずれも台がコンパクトとする。パラメーター $\varepsilon>0$ をしばらく固定し，$[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ の上の測度 $\frac{1}{\varepsilon}dt\,\mu(dv)$ を平均測度にもつ Piosson random measure $N^\varepsilon(dt\,dv)$ を取る。$\mathbb{R}^n$ における確率微分方程式

$$(1.1)\quad v_t^\varepsilon = v + \int_0^{t+}\int_{\mathbb{R}^n}(u - v_{s-}^\varepsilon)N^\varepsilon(ds\,du) + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}H(v_s^\varepsilon)ds$$

(接ベクトル $H(v) = H^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)_v$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトル $(H^1(v),\cdots,H^n(v))$ と同一視している)の解 v_t^ε は

$$(1.2)\quad \frac{1}{\varepsilon}L = \frac{1}{\varepsilon}Q + \frac{1}{\varepsilon}H$$

を生成作用素とするMarkov過程を与えている。ここで

$$(1.3)\quad Q\varphi(v) = \mu\varphi - \varphi(v)$$

$$\left(\mu\varphi = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(u)\mu(du)\right)$$

とおいた。v_t^ε を *driving process* にもつ $\mathbb{R}^d$ に値を取る *driven process* x_t^ε を次の常微分方程式によって与える:

$$(1.4)\quad x_t^\varepsilon = x + \int_0^t \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}v_s^{\varepsilon\, i}F_i(x_s^\varepsilon)ds + \int_0^t G(x_s^\varepsilon)ds,$$

(右辺第2項は i について 1 から n まで加えている)

$c>0$ は定数, F_i $(i=1,\cdots,n)$ と G は $\mathbb{R}^d$ の上の C^∞ ベクトル場で次の仮定をみたすとする:

$$(1.5)\quad \begin{aligned}&|F_i^a(x)|,\ |G^a(x)|,\ |F_iF_j^a(x)|,\ |GF_j^a(x)|,\\ &|F_iF_jF_k^a(x)|,\ |GF_iF_j^a(x)| \leq \mathrm{const.}(1+|x|),\\ &x\in\mathbb{R}^d,\ 1\leq i,j,k\leq n,\ 1\leq a\leq d,\end{aligned}$$

ここで，F_i^a，G^a はそれぞれ F_i，G の第 a 成分を表わす関数，$F_iF_j^a$ は関数 F_j^a にベクトル場 F_i が作用してできる関数を表わし，$|x| = \sqrt{\sum (x^i)^2}$ とする。(1.4), (1.1) は連立の確率微分方程式として $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ に値を取る jump type の semi-martingale を与えている。(1.4), (1.1) の与える Markov 過程の生成作用素は

(1.6) $\mathcal{L}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}F + G + \frac{1}{\varepsilon}Q + \frac{1}{\varepsilon}H$,

ただし

(1.7) $F\varphi(x,v) = c v^i F_i\varphi(x,v)$

とし，F_i，G は $\mathbb{R}^d$ の変数 x に作用し，Q, H は $\mathbb{R}^n$ の変数 v に作用するとする。ベクトル場 H の生成する 1-パラメーター変換群を H_t, $t \in \mathbb{R}$ で表わし，$\mathbb{R}^n$ の微分同型 H_t による μ の像測度を $H_t\mu$ で表わす。$\mathbb{R}^n$ の上の確率測度 m を次の式で定義する：

(1.8) $m(A) = \int_0^\infty e^{-t}(H_t\mu)(A)\,dt$。

H_t による変数変換：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "H_t"] \arrow[dr, "H_t^*\varphi"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

を H_t^* で表わし，$\mathbb{R}^n$ 上の関数に作用する作用素 $\mathcal{U}$ を

(1.9) $\mathcal{U}\varphi(v) = \int_0^\infty e^{-t}(H_t^*\varphi)(v)\,dt$, $v \in \mathbb{R}^n$

で定義する。$\mathbb{R}^n$ の座標関数の定数倍：

(1.10) $\varphi^i(v) = cv^i$, $v = (v^1, \dots, v^n)$

を使って

(1.11) $b^{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^i \cup \varphi^j)(v) m(dv)$,

(1.12) $a^{ij} = (b^{ij} + b^{ji})/2$,

(1.13) $\mathcal{L} = a^{ij} F_i F_j + \frac{1}{2} b^{ij} [F_i, F_j] + G$

とおく。(1.13) の右辺第1項，第2項は i, j について 1 から n まで加えている．次のことを仮定する：

(1.14) $\int_{\mathbb{R}^n} v\, m(dv) = 0$.

(1.15) 行列 $(a^{ij})_{1 \le i, j \le n}$ は非負定値。

$x^\varepsilon_\cdot$ が 道の空間 $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ に与える確率測度を P^ε_x で表わすとき，

<u>定理</u> $\varepsilon \to +0$ のとき P^ε_x は弱収束し，極限は $\mathcal{L}$-diffusion である．

<u>注意 1.1</u> $H = 0$ のとき，上の定理は [12], [1] の特別な場合 (driving process が driven process に線型に入りこんでいる) である．

注意 1.2　定数行列 (a^{ij}) の平方根 (σ^i_j)：
$$\sigma^i_j \sigma^k_l \delta^{jl} = a^{ik}$$
を取れば，$\mathcal{L}$-diffusion は確率微分方程式：

$$(1.16)\quad x_t = x + \int_0^t \sigma^i_j F_i(x_s) \circ d\beta^j_s + \int_0^t G(x_s)\,ds + \int_0^t \frac{1}{2} b^{ij} [F_i, F_j](x_s)\,ds$$

（β_s は $\mathbb{R}^n$ の Brown 運動）によって与えられる．

注意 1.3　$H = 0$ のとき，$H_t = id$，$m = \mu$，$v = id$，$b^{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^i \varphi^j)(v)\, m(dv)$ は対称で a^{ij} に等しく，仮定 (1.15) をみたしている。この場合，

$$(1.17)\quad \mathcal{L} = a^{ij} F_i F_j + G$$

（$[F_i, F_j]$ の項は消える）となっている。さらに，μ が S^{n-1} の上の一様分布のとき，仮定 (1.14) もみたしており，$a^{ij} = \frac{c^2}{n} \delta^{ij}$ となる。また
$$\mu = \sum_{i=1}^n (\delta_{e_i} + \delta_{-e_i})/2n$$
$$(e_i = (0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots, 0))$$
のときも仮定 (1.14) をみたし，a^{ij} の値は上と同じになる。

注意 1.4　$H = 0$ で仮定 (1.14) をみたし $a^{ij} = \frac{1}{2} \delta^{ij}$ の場合を以下では等方的と呼ぶ。この場合 $\mathcal{L}$-diffusion は確率微分方程式

(1.18) $$x_t = x + \int_0^t F_i(x_s) \circ d\beta_s^i + \int_0^t G(x_s)\,ds$$

で与えられる。

<u>注意1.5</u> 常微分方程式 (1.4) を接ベクトルの間の関係式として書けば

(1.19) $$\begin{cases} \dot{x}_t^\varepsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} v_t^{\varepsilon i} F_i(x_t^\varepsilon) + G(x_t^\varepsilon), \\ x_0^\varepsilon = x \end{cases}$$

となる。ここで、$F_i(x_s^\varepsilon)$ はベクトル場 F_i の与える点 x_s^ε における接ベクトルを表わす。積分形で書けば

$$\forall f \in C^\infty(R^d)$$

(1.20) $$f(x_t^\varepsilon) - f(x) = \int_0^t \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} v_s^{\varepsilon i} F_i f(x_s^\varepsilon)\,ds + \int_0^t Gf(x_s^\varepsilon)\,ds$$

となる。ここで $F_i f$ は関数 f にベクトル場 F_i が作用してできる関数を表わす。

<u>注意1.6</u> driving process v_t^ε の推移確率は、$\varepsilon=1$ のとき、

(1.21) $$P(t,v,A) = e^{-t}\delta_{H_t v}(A) + \int_0^t e^{-s}(H_s\mu)(A)\,ds$$

であり、$t \to \infty$ の極限が (1.8) で定義した測度 m である。(1.9) で定義した作用素 V は (1.21) の与えるポテンシャル作用素から R^n の変数 v について定数

の項を省いたものである。

§2. 例

例2.1（補正項のある場合）　μ が S^1 の上の一様分布，H は $\mathbb{R}^2$ の上の台がコンパクトな C^∞ ベクトル場で S^1 の近傍で

$$\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}=\alpha\left(-v^2\frac{\partial}{\partial v^1}+v^1\frac{\partial}{\partial v^2}\right)$$

（$\alpha\in\mathbb{R}$ は定数，$v=(v^1,v^2)$）に一致するとき仮定 (1.14), (1.15) をみたしていて，$c=\sqrt{1+\alpha^2}$ と取れば

$$a^{ij}=\frac{1}{2}\delta^{ij},\quad b^{ii}=\frac{1}{2},\quad b^{12}=\frac{\alpha}{2}=-b^{21}$$

となる。このとき

$$\beta_t^\varepsilon=\int_0^t\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}v_s^\varepsilon\,ds$$

とおくと，(1.4)の解 x_t^ε と β_t^ε の関係は

(2.1) $$x_t^\varepsilon=x+\int_0^t F_i(x_s^\varepsilon)\,d\beta_s^\varepsilon+\int_0^t G(x_s^\varepsilon)\,ds$$

となる。定理により，β_t^ε の与える $C([0,T],\mathbb{R}^2)$ の上の確率測度は Wiener 測度に収束するが，x_t^ε の与える $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ の上の確率測度は

$$\frac{1}{2}\left\{(F_1)^2+(F_2)^2\right\}+\frac{\alpha}{2}[F_1,F_2]+G$$

を生成作用素にもつ拡散過程に収束する。[5]では，区分的に滑らかな見本関数をもつBrown運動の汎関数の場合について これによく似た補正項の現われる場合を含むクラスを

扱っている。

以下の例においては，(μ, H, c) が等方的な場合についてだけ説明する。

例2.2（平行移動）(M, g) は n 次元コンパクト Riemann 多様体とし，M の上の測地線から成る折線 x^ξ_t で〈等方的に向きを変える〉ものを定義するために，次の準備をする。正規直交枠の全体を $O(M)$ で表わすとき，$O(M)$ の各点 u について，$x = \pi u$（$\pi : O(M) \to M$ は射影，x と $u = (X_1, \cdots, X_n)$ の関係は $X_1, \cdots, X_n \in T_x M$）を通る M の曲線に沿って枠 u を平行移動すれば $O(M)$ の上の u を通る曲線ができるが，点 u での接線の方向を全部集めれば，点 u における水平方向（$T_u O(M)$ の線型部分空間）Q_u が得られる。$O(M)$ の各元 $u = (X_1, \cdots, X_n)$ は内積空間としての同型写像：

$$(2.2)\qquad \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle) & \xrightarrow{u} & (T_x M, g_x) \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid\ \xi & \longleftrightarrow & \xi^i X_i \ \cup\!\!\!\!\!\shortmid \end{array}$$

と同一視される。ベクトル $\xi \in \mathbb{R}^n$ を固定するとき，各 $u \in O(M)$ について $u\xi$ は点 $x = \pi u$ における M の接ベクトルだが，同型：$Q_u \xrightarrow{(\pi_*)_u} T_x M$ の逆写像（horizontal lift）によって点 u における $O(M)$ の接

ベクトルが得られる。こうして得られた $O(M)$ の上のベクトル場を $\xi\in R^n$ に対応する standard horizontal vector field (basic vector field) と呼び $B(\xi)$ で表わす。Mの上の曲線が測地線であることは，止まったベクトル $\xi\in R^n$ があって $B(\xi)$ の $O(M)$ における積分曲線の射影になっていることと同値であることに注意して，$O(M)$ の上の曲線 u_t^ε を

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \dot{u}_t^\varepsilon = B\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}v_t^\varepsilon\right)u_t^\varepsilon, \\ u_0^\varepsilon = u \end{cases}$$

によって定義する。第1式の右辺は R^n のベクトル $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}v_t^\varepsilon$ に対応する standard horizontal vector field が点 u_t^ε で与えている接ベクトルである。u_t^ε のMへの射影を x_t^ε で表わすとき，x_t^ε は測地線から成る折線で，x_t^ε に沿って枠 u を平行移動したものが u_t^ε になっている。x_t^ε の速度ベクトルを枠 u_t^ε で読み取って得られる R^n のベクトル

$$(u_t^\varepsilon)^{-1}\dot{x}_t^\varepsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}v_t^\varepsilon$$

((2.3) と standard horizontal vector field の定義からこれがわかる。$(u_t^\varepsilon)^{-1}$ については (2.2) を見よ。)
が等方的に（例えば半径 $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ の球面の上で一様に）jump しているという意味で，x_t^ε は等方的に折れ曲がっ

ているわけである。$e_i=(0,\cdots,0,\underset{i}{1},0,\cdots,0)$ に対応する$B(e_i)$をB_iで表わせば(2.3)は

$$(2.4)\quad \begin{cases} \dot{u}^\varepsilon_t = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\, v^{\varepsilon, i}_t B_i(u^\varepsilon_t), \\ u^\varepsilon_0 = u \end{cases}$$

となり，(1.19)と同じ形の常微分方程式になる。$O(M)$を十分次元の高いEuclid空間に埋めこんで，$O(M)$のコンパクト性に注意すれば，u^ε_tが$C([0,T],O(M))$の上に与える確率測度の$\varepsilon\to+0$での極限は

$$(2.5)\quad \Delta_{O(M)} = \delta^{ij}B_iB_j$$

を生成作用素にもつdiffusionであり，

$$\begin{tikzcd} C^\infty(O(M)) \arrow[dr, "\Delta_{O(M)}"'] & & C^\infty(M) \arrow[ll, "\pi^*"'] \arrow[dl, "\Delta_g"] \\ & \mathbb{R} \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

から，x^ε_tが$C([0,T],M)$の上に与える確率測度の極限は(M,g)のBrown運動であることがわかる。

<u>注意2.1</u> 常微分方程式(2.3)または(2.4)の前半を微分形式で書くと次のようになる：

$$(2.6)\quad \langle \omega, \dot{u}^\varepsilon_t \rangle = 0,\quad \langle \theta, \dot{u}^\varepsilon_t \rangle = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\, v^\varepsilon_t$$

ここでωはconnection form ($O(n;\mathbb{R})$のLie環に値を取る$O(M)$の上の1次微分形式)，θは

canonical form (solder form):

(2.6) $\quad \langle \theta, X \rangle_u = u^{-1}(\pi_*)_u X \,, \quad X \in T_u O(M)$

(R^n に値を取る $O(M)$ の上の1次微分形式)を表わす.
微分形式 ω で u^ε_t の速度ベクトルを読み取ることにより垂直方向の動きが0であることがわかり, 微分形式 θ で読み取ることにより水平方向の動きが $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} v^\varepsilon_t$ という等方なものであることがわかるわけである. 微分方程式(2.6)を線積分で書くと次のようになる:

(2.7) $$\int_{u^\varepsilon[0,t]} \omega = 0 \,, \quad \int_{u^\varepsilon[0,t]} \theta = \beta^\varepsilon_t \,,$$

ここで

(2.8) $$\beta^\varepsilon_t = \int_0^t \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} v^\varepsilon_s \, ds \,。$$

<u>注意 2.2</u> [13], [14], [7], [8] を参照せよ。

<u>例 2.3</u> (重複積分)

(2.9) $$\beta^{\varepsilon, i_1 \cdots i_a}_t = \int \cdots \int_{0 < s_1 < \cdots < s_a < t} d\beta^{\varepsilon, i_1}_{s_1} \cdots d\beta^{\varepsilon, i_a}_{s_a} \,,$$

(2.10) $$x^\varepsilon_t = (\beta^{\varepsilon, i_1 \cdots i_a}_t)_{\substack{1 \le i_1, \cdots, i_a \le n, \\ 1 \le a \le p}}$$

(p は定数)とおくとき, x^ε_t が $C([0,T], R^N)$ ($N = n + n^2 + \cdots + n^p$) に与える確率測度は $\varepsilon \to +0$ のと

き弱収束し，極限は，

(2.11) $$\beta_t^{i_1\cdots i_a} = \int_0^t\left(\int_0^{s_a}\cdots\left(\int_0^{s_3}\left(\int_0^{s_2} d\beta_{s_1}^{i_1}\right)\circ d\beta_{s_2}^{i_2}\cdots\right)\circ d\beta_{s_a}^{i_a}\right.$$

（$\beta_t=(\beta_t^1,\cdots,\beta_t^n)$ は $\mathbb{R}^n$ の Brown 運動），

(2.12) $$x_t = (\beta_t^{i_1\cdots i_a})_{\substack{1\le i_1,\cdots,i_a\le n,\\ 1\le a\le p}}$$

で定義される x_t の与える確率測度である。これを見るには，x_t^ε が常微分方程式

(2.13) $$x_t^\varepsilon = \int_0^t Q_i(x_s^\varepsilon)\,d\beta_s^{\varepsilon\, i}$$

の解であることに注意すればよい。ここで

(2.14) $$Q_i(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} + x^{i_1}\frac{\partial}{\partial x^{i_1 i}} + x^{i_1 i_2}\frac{\partial}{\partial x^{i_1 i_2 i}} + \cdots + x^{i_1\cdots i_{p-1}}\frac{\partial}{\partial x^{i_1\cdots i_{p-1} i}}\text{。}$$

<u>例2.4</u>（変分方程式）　$A_0,\cdots,A_n$ が $\mathbb{R}^m$ の上の C^∞ ベクトル場で次の条件をみたすとする：

(2.15) $$A_i^a(x),\ \frac{\partial}{\partial x^b}A_i^a(x),\ \frac{\partial^2}{\partial x^b\partial x^c}A_i^a(x),\ \frac{\partial^3}{\partial x^b\partial x^c\partial x^f}A_i^a(x),\quad x\in\mathbb{R}^m,\ 1\le i\le n,$$

$1\le a,b,c,f\le m$ が有界。（$A_i(x)=A_i^a(x)\dfrac{\partial}{\partial x^a}$）

$\mathbb{R}^m$ の上の常微分方程式：

$$(2.16)\quad x_t^\varepsilon = x + \int_0^t A_i(x_s^\varepsilon)\,d\beta_s^{\varepsilon,i} + \int_0^t A_0(x_s^\varepsilon)\,ds$$

の解 $x_t^\varepsilon = \varphi_t^\varepsilon(x)$ によって微分同型 $\varphi_t^\varepsilon : R^m \to R^m$ を得るが，φ_t^ε の微分の成分表示を $y_t^\varepsilon = (y_{t,a}^{\varepsilon,b})_{1\le a,b\le m}$ で表わす：

$$y_{t,a}^{\varepsilon,b} = \frac{\partial}{\partial x^a}\varphi_t^{\varepsilon,b}(x)。$$

これは次の変分方程式の解になっている：

$$(2.17)\quad y_{t,a}^{\varepsilon,b} = \delta_a^b + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x^c}A_i^b(x_s^\varepsilon)\,y_{s,a}^{\varepsilon,c}\,d\beta_s^{\varepsilon,i} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x^c}A_0^b(x_s^\varepsilon)\,y_{s,a}^{\varepsilon,c}\,ds$$

（c について 1 から m まで加えている。）R^{m+m^2} の上のベクトル場

$$(2.18)\quad \begin{aligned} F_i &= A_i^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial}{\partial x^b}A_i^c(x)\,y_a^b\frac{\partial}{\partial y_a^c}, \\ G &= A_0^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial}{\partial x^b}A_0^c(x)\,y_a^b\frac{\partial}{\partial y_a^c} \end{aligned}$$

（$(x,y) = (x^a, y_c^b)_{1\le a,b,c\le m}$ が R^{m+m^2} の座標を表わす）について §1 の定理を適用すれば，$(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)$ が $C([0,T], R^{m+m^2})$ の上に与える確率測度は $\varepsilon \to +0$ のとき，確率微分方程式

$$(2.19)\quad x_t = x + \int_0^t A_i(x_s)\circ d\beta_s^i + \int_0^t A_0(x_s)\,ds$$

$$(2.20)\quad y_{t,a}^b = \delta_a^b + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial x^c}A_i^b(x_s)\,y_{s,a}^c\right)\circ d\beta_s^i + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x^c}A_0^b(x_s)\,y_{s,a}^c\,ds$$

の解 (x_t, y_t) の与える確率測度に弱収束することがわかる。

確率微分方程式のパラメーターに関する微分については[16]を参照せよ。

§3. 半線型1階偏微分方程式についての注意

主部の等しい半線型方程式：

(3.1) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{\beta}^{\varepsilon,i}_{t}F^{a}_{i}(x)\frac{\partial}{\partial x^{a}}+G^{a}(x)\frac{\partial}{\partial x^{a}}\right)u^{\alpha}(t,x)$$
$$=\gamma^{\alpha}(x,u(t,x))\quad(u=(u^{\alpha})_{1\le\alpha\le m})$$

を特性曲線の方法で解くことを考える。F_i, G, γ は以下で考える常微分方程式が爆発しない条件を課す。まず，常微分方程式

(3.2) $$x^{\varepsilon}_{s,t}=x+\int_s^t F_i(x^{\varepsilon}_{s,r})\,d\beta^{\varepsilon,i}_{r}+\int_s^t G(x^{\varepsilon}_{s,r})\,dr$$

の解 $x^{\varepsilon}_{s,t}=\varphi^{\varepsilon}_{s,t}(x)$ から微分同型 $\varphi^{\varepsilon}_{s,t}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ $(s\le t)$ を得る。また，曲線 $x^{\varepsilon}_{s,r}$, $r\in[s,\infty)$ を与えたとき，常微分方程式

(3.3) $$u^{\varepsilon}_{s,t}=u+\int_s^t\gamma(x^{\varepsilon}_{s,r},u^{\varepsilon}_{s,r})\,dr$$

の解 $u^{\varepsilon}_{s,t}=\psi^{\varepsilon}_{s,t}(u)$ から微分同型 $\psi^{\varepsilon}_{s,t}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ $(s\le t)$ を得る。$f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^m)$ を与えたとき，

(3.4) $$u^{\varepsilon}_{+}(t,x)=\psi^{\varepsilon}_{0,t}\left(f\left((\varphi^{\varepsilon}_{0,t})^{-1}(x)\right)\right)$$

とおけば，$u^{\varepsilon}_{+}(t,x)$ は初期条件：

(3.5) $$u^{\varepsilon}_{+}(0,x)=f(x)$$

をみたす (3.1) の解を与える．確率微分方程式でこれに対応する計算については [11], [4] を参照せよ。

次に，

(3.6) $\quad u_-^\varepsilon(s,T,x) = (\varphi_{s,T}^\varepsilon)^{-1}(f(\varphi_{s,T}^\varepsilon(x)))$

とおけば，$u_-^\varepsilon(s,T,x)$ は (s,x) について終期条件：

(3.7) $\quad u_-^\varepsilon(T,T,x) = f(x)$

をみたす (3.1) の解を与える。(3.1) を s について積分すると

$$u_-^\varepsilon(0,t,x) = f(x) + \int_0^t F_i^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a}u_-^\varepsilon(s,t,x)\,d\beta_s^{\varepsilon\, i}$$

(3.8)
$$+\int_0^t G^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a}u_-^\varepsilon(s,t,x)\,ds$$
$$-\int_0^t \gamma(x, u_-^\varepsilon(s,t,x))\,ds$$

となる。

例3.1（線型の場合）　$\gamma = 0$ のとき，$\varphi_{s,t}^\varepsilon = id$ となり，(3.6) は

(3.9) $\quad u_-^\varepsilon(s,t,x) = f(x_{s,t}^\varepsilon)$

となる。等方的な場合，これは次のように分解される：

$$u_-^\varepsilon(s,t,x) = f(x) + m_{s,t}^\varepsilon$$

(3.10)
$$+\int_s^t\left(\frac{1}{2}\delta^{ij}F_iF_j + G\right)(x_{s,r}^\varepsilon)\,dr + r_{s,t}^\varepsilon,$$

ここで

$$m^{\varepsilon}_{s,t} = \int_{s+}^{t+}\int_{R^m}\Big[\sqrt{\varepsilon}\{u^i F_i f(x^{\varepsilon}_{s,r-}) - v^{\varepsilon,i}_{r-} F_i f(x^{\varepsilon}_{s,r-})\}$$

(3.11)
$$+\varepsilon\{u^i u^j F_i F_j f(x^{\varepsilon}_{s,r-})$$
$$- v^{\varepsilon,i}_{r-} v^{\varepsilon,j}_{r-} F_i F_j f(x^{\varepsilon}_{s,r-})\}\Big]\tilde{N}^{\varepsilon}(dr\,du),$$

(3.12) $\tilde{N}^{\varepsilon}(dr\,du) = N^{\varepsilon}(dr\,du) - \frac{1}{\varepsilon}dr\,\mu(du),$

$$r^{\varepsilon}_{s,t} = -\sqrt{\varepsilon}\Big[-\{v^{\varepsilon,i}_{t} F_i f(x^{\varepsilon}_{s,t}) - v^{\varepsilon,i}_{s} F_i f(x)\}$$

(3.13)
$$+\int_s^t v^{\varepsilon,i}_{r} G F_i f(x^{\varepsilon}_{r})\,dr$$
$$+\int_s^t v^{\varepsilon,i}_{r} v^{\varepsilon,j}_{r} v^{\varepsilon,k}_{r} F_i F_j F_k f(x^{\varepsilon}_{s,r})\,dr\Big]$$
$$+\varepsilon\Big[\int_s^t v^{\varepsilon,i}_{r} v^{\varepsilon,j}_{r} G F_i F_j f(x^{\varepsilon}_{s,r})\,dr$$
$$-\{v^{\varepsilon,i}_{t} v^{\varepsilon,j}_{t} F_i F_j f(x^{\varepsilon}_{s,t})$$
$$- v^{\varepsilon,i}_{s} v^{\varepsilon,j}_{s} F_i F_j f(x)\}\Big]$$

（補題5.4参照）。

<u>例3.2</u>（右辺がuについて線型の場合）　$m=1$,

$\gamma(x,u) = \gamma(x)u$ のとき

(3.14) $u_-(s,t,x) = f(x_{s,t})\, e^{-\int_s^t \gamma(x_{s,r})\,dr}$

となる。

§4. C^∞切断の flow と共変微分

E は P を principal fibre bundle, $\mathbb{R}^m$ を

standard fibre にもつMの上のvector bundleとし，Pに接続が与えられているとする。A_i, $i=0,\cdots,n$ はMの上のC^∞ベクトル場，A_iのhorizontal lift（Pの上のベクトル場）をF_i（$F_0=G$）で表わす。PのEuclid空間$\mathbb{R}^N$への埋めこみで，F_iが(1.5)の条件をみたすように$\mathbb{R}^N$に拡張できる場合を考える。§1でx_t^εと書いたものをここではu_t^ξと書き，u_t^ξのMへの射影πu_tをx_t^ξで表わす。Eの任意のC^∞切断$\sigma: M\to E$に対応するPの上の$\mathbb{R}^m$値関数（tensorial 0-form）をf_σで表わす：

(4.1) $$f_\sigma(u)=u^{-1}\sigma(\pi u),\quad u\in P$$

（[9] II5, III1参照）。共変微分とhorizontal liftの関係式

(4.2) $$f_{\nabla_X\sigma}=X^*f_\sigma,\quad X\in\mathfrak{X}(M)$$

（X^*はXのhorizontal lift）を使って，

(4.3) $$f_\sigma(u_t^\xi)=f_\sigma(u)+\int_0^t f_{\nabla_{A_i}\sigma}(u_s^\xi)\,d\beta_s^\varepsilon+\int_0^t f_{\nabla_{A_0}\sigma}(u_s^\xi)\,ds$$

を得る。x_t^ξにおけるEのfibre $\pi_E^{-1}(x_t^\xi)$での関係に直すと

$$\sigma(x_t^\xi) = u_t^\xi u^{-1}\sigma(x) + \int_0^t u_t^\xi (u_s^\xi)^{-1} \nabla_{A_i}\sigma(x_s^\xi)\, d\beta_s^\xi \tag{4.4}$$
$$+ \int_0^t u_t^\xi (u_s^\xi)^{-1} (\nabla_{A_0}\sigma)(x_s^\xi)\, ds$$

となる。$u_t^\xi u^{-1}$ は $\pi_E^{-1}(x)$ の元の曲線 x_r^ξ, $r\in[0,t]$ に沿う平行移動を，$u_t^\xi(u_s^\xi)^{-1}$ は $\pi_E^{-1}(x_s^\xi)$ の元の曲線 x_r^ξ, $r\in[s,t]$ に沿う平行移動を表わしている。出発点における fibre $\pi_E^{-1}(x)$ での関係式に直すと

$$u(u_t^\xi)^{-1}\sigma(x_t^\xi)$$
$$= \sigma(x) + \int_0^t u(u_s^\xi)^{-1} \nabla_{A_i}\sigma(x_s^\xi)\, d\beta_s^\xi \tag{4.5}$$
$$+ \int_0^t u(u_s^\xi)^{-1} \nabla_{A_0}\sigma(x_s^\xi)\, ds$$

となる。

§5　定理の証明

§1 の仮定のもとで次のことが成立つ。

補題 5.1

$$\varphi - m\varphi = -LU\varphi, \quad \varphi \in C^\infty(R^n). \tag{5.1}$$

ここで $m\varphi = \int_{R^n} \varphi(v)\, m(dv)$.

証明　φ が有界で $m\varphi = 0$ のとき，driving process の生成作用素が L $(\varepsilon = 1)$ であることから，推移確率の形

(1.21)により

$$T_t\varphi(v) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u) P(t, v, du)$$

$$= e^{-t} H_t^* \varphi - \int_t^\infty e^{-s}(H_s \mu)\varphi\, ds$$

$$= O(e^{-t}),\quad t\to\infty$$

となるのでポテンシャル作用素

$$R\varphi(v) = \int_0^\infty T_t \varphi(v)\, dt$$

が意味をもち，

$$-LR\varphi = \varphi$$

が成立つ。一方

$$R\varphi = \int_0^\infty (e^{-t} H_t^* \varphi + v\text{-const.})\, dt$$

$$= U\varphi + v\text{-const.}$$

（v-const. は $\mathbb{R}^n$ の変数 v についての定数）となるので，

$$\varphi = -LU\varphi \quad (m\varphi = 0 \text{ のとき})$$

となる。μ と H の台がコンパクトなことに注意すれば一般の φ について (5.1) を得る。

補題 5.2　$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n)$ のとき，

(5.2)　$\varphi(z_t^\varepsilon) = \varphi(z) + m_t^{\varphi,\varepsilon} + \int_0^t (\mathcal{L}^\varepsilon \varphi)(z_s^\varepsilon)\, ds$，

ここで

(5.3)　$z_t^\varepsilon = (x_t^\varepsilon, v_t^\varepsilon)$，　$z = (x, v)$，

$$(5.4)\quad m^{\varphi,\varepsilon}_t = \int_0^{t+}\int_{\mathbb{R}^m}\{\varphi(x^\varepsilon_{s-},u)-\varphi(x^\varepsilon_{s-},v^\varepsilon_{s-})\}\tilde{N}^\varepsilon(dsdu)$$

（$\tilde{N}^\varepsilon$ は (3.13) で定義した。）

証明　semi-martingale の表示 (4), (1) と伊藤の公式により

$$\varphi(z^\varepsilon_t) = \varphi(z)+\int_0^t \frac{\partial}{\partial x^a}\varphi(z^\varepsilon_s)\Big\{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}v^{\varepsilon\, i}_s F^a_i(x^\varepsilon_s)$$
$$+G^a(x^\varepsilon_s)\Big\}ds+\int_0^t \frac{\partial}{\partial v^i}\varphi(z^\varepsilon_s)\cdot\frac{1}{\varepsilon}H^i(v^\varepsilon_s)ds$$
$$+\int_0^{t+}\int_{\mathbb{R}^n}\big\{\varphi(x^\varepsilon_{s-}+0,\,v^\varepsilon_{s-}+u-v^\varepsilon_{s-})$$
$$-\varphi(x^\varepsilon_{s-},v^\varepsilon_{s-})\big\}N^\varepsilon(dsdu)$$

となり，$\mathcal{L}^\varepsilon$, $\tilde{N}^\varepsilon$ の定義から (5.2) を得る。

補題 5.3　$\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 = v\varphi$ のとき

$$\int_0^t\varphi(z^\varepsilon_s)ds = \int_0^t(m\varphi)(x^\varepsilon_s)ds$$
$$(5.5)\qquad +\int_0^t(\sqrt{\varepsilon}F+\varepsilon G)\varphi_1(z^\varepsilon_s)ds$$
$$-\varepsilon\{\varphi_1(z^\varepsilon_t)-\varphi_1(z)\}+\varepsilon m^{\varphi_1,\varepsilon}_t。$$

証明

$$(5.6)\qquad \mathcal{L}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}F+G+\frac{1}{\varepsilon}L$$

に注意して補題 5.1 と (5.2) を使えばよい。

補題 5.4　$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ のとき，

(5.7)　$f(x_t^\varepsilon) = f(x) + M_t^{f,\varepsilon} + \int_0^t \mathcal{L} f(x_s^\varepsilon)\,ds + R_t^{f,\varepsilon}$,

ここで

(5.8)　$M_t^{f,\varepsilon} = \int_0^{t+}\int_{R^m} \Big[\sqrt{\varepsilon}\{\mho\varphi^i(u) - \mho\varphi^i(v_{s-}^\varepsilon)\} F_i f(x_{s-}^\varepsilon)$

$+ \varepsilon\{\mho\varphi^{ij}(u) - \mho\varphi^{ij}(v_{s-}^\varepsilon)\} F_i F_j f(x_{s-}^\varepsilon)\Big]$

$\tilde{N}^\varepsilon(ds\,du)$,

(5.9)　$\varphi^{ij} = \varphi^i \mho \varphi^j$　（φ^i は (1.10) で定義した。），

$R_t^{f,\varepsilon} = -\{\sqrt{\varepsilon}\mho\varphi^i F_i f + \varepsilon \mho\varphi^{ij} F_i F_j f\}(z_t^\varepsilon)$

(5.10)　$+\{\sqrt{\varepsilon}\mho\varphi^i F_i f + \varepsilon\mho\varphi^{ij} F_i F_j f\}(z)$

$+\int_0^t \Big(\sqrt{\varepsilon}\mho\varphi^i \cdot G F_i f + \sqrt{\varepsilon}\varphi^{ijk} F_i F_j F_k f$

$+ \varepsilon \mho \varphi^{ij} \cdot G F_i F_j f\Big)(z_s^\varepsilon)\,ds$,

(5.11)　$\varphi^{ijk} = \varphi^i \mho \varphi^{jk}$

証明　(1.20) の右辺第1項を次のように変形する。
Centering condition (1.14) により

$$m F f = m\varphi^i \cdot F_i f = 0$$

となるので，(5.5) により

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} F f(z_t^\varepsilon)\,dt = (\sqrt{\varepsilon}F + \varepsilon G)\varphi_1^\varepsilon(z_t^\varepsilon)\,dt$$
$$- \varepsilon\, d\varphi_1^\varepsilon(z_t^\varepsilon) + \varepsilon\, dm_t^{\varphi_1^\varepsilon}.$$

ここで

(5.12) $\varphi_1^\varepsilon = \mho\varphi^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mho\varphi^i F_i f$。

したがって

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} F f(z_t^\varepsilon)dt$$
$$= (F+\sqrt{\varepsilon}G) f_1(z_t^\varepsilon)dt - \sqrt{\varepsilon}\, d f_1(z_t^\varepsilon) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} dm_t^{f_1, \varepsilon},$$

ただし

(5.13) $f_1 = \mho\varphi^i F_i f$。

ゆえに

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} F f(z_t^\varepsilon)dt$$
$$= \varphi^{ij} F_i F_j f(z_t^\varepsilon)dt + \sqrt{\varepsilon}\mho\varphi^i G F_i f(z_t^\varepsilon)dt$$
$$- \sqrt{\varepsilon}\, d f_1(z_t^\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, dm_t^{f_1, \varepsilon}.$$

もう一度 (5.5) を使って

$$\varphi^{ij} F_i F_j f(z_t^\varepsilon)dt$$
$$= b^{ij} F_i F_j f(z_t^\varepsilon)dt + (\sqrt{\varepsilon}F + \varepsilon G)\psi_1(z_t^\varepsilon)dt$$
$$- \varepsilon\, d\psi_1(z_t^\varepsilon) + \varepsilon\, dm_t^{\psi_1, \varepsilon},$$

ここで

(5.14) $\psi_1 = \mho\varphi^{ij} F_i F_j f$。

したがって

$$\varphi^{ij} F_i F_j f(z_t^\varepsilon)dt$$
$$= \frac{1}{2}\overbrace{(b^{ij} F_i F_j + b^{ji} F_j F_i) dt}^{f(z_t^\varepsilon)} +$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\,\varphi^{ijk}F_iF_jF_k f(z^\varepsilon_t)\,dt$$
$$+\varepsilon\, \mho\varphi^{ij}\, G F_iF_j f(z^\varepsilon_t)dt$$
$$-\varepsilon\, d\psi_1(z^\varepsilon_t)+\varepsilon\, dm^{\psi_1,\varepsilon}_t 。$$

また

$$\frac{1}{2}(b^{ij}F_iF_j+b^{ji}F_jF_i)$$
$$=\frac{1}{2}(b^{ij}F_iF_j+b^{ji}F_iF_j+b^{ji}[F_j,F_i])$$
$$=a^{ij}F_iF_j+\frac{1}{2}b^{ij}[F_i,F_j]$$

となるので，以上をまとめて

$$\begin{aligned} df(x^\varepsilon_t)=&\sqrt{\varepsilon}\,\mho\varphi^{i}\cdot G F_i f(z^\varepsilon_t)dt\\ &-\sqrt{\varepsilon}\,df_1(z^\varepsilon_t)+\sqrt{\varepsilon}\,dm^{f_1,\varepsilon}_t\\ &+\sqrt{\varepsilon}\,\varphi^{ijk}F_iF_jF_k f(z^\varepsilon_t)dt\\ &+\varepsilon\,\mho\varphi^{ij}\cdot G F_iF_j f(z^\varepsilon_t)dt\\ &-\varepsilon\, d\psi_1(z^\varepsilon_t)+\varepsilon\, dm^{\psi_1,\varepsilon}_t\\ &+\bar{\mathcal{L}} f(z^\varepsilon_t)dt \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &df(x^\varepsilon_t)\\ &=dm^{f^\varepsilon,\varepsilon}_t+\bar{\mathcal{L}} f(z^\varepsilon_t)dt-df^\varepsilon(z^\varepsilon_t)\\ &\quad+\{\sqrt{\varepsilon}\,\mho\varphi^{i}\cdot G F_i+\sqrt{\varepsilon}\,\varphi^{ijk}F_iF_jF_k\\ &\qquad+\varepsilon\,\mho\varphi^{ij}\cdot G F_iF_j\} f(z^\varepsilon_t)\,dt, \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$f^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}\,\mho\varphi^{i}\cdot F_i f+\varepsilon\,\mho\varphi^{ij}\cdot F_iF_j f \tag{5.16}$$

となり，(5.4)により結論を得る。

<u>補題5.5</u>　$\sup_{\varepsilon} E[\sup_{t\in[0,T]} |x_t^\varepsilon|^4] < \infty$。

<u>証明</u>　$a_t^\varepsilon = E[\sup_{s\in[0,t]} |x_s^\varepsilon|^4]$ とおく。μ と H の台がコンパクトなことから，$\varphi^i(v_t^\varepsilon)$, $v\varphi^i(v_t^\varepsilon)$, $\varphi^{ij}(v_t^\varepsilon)$, $v\varphi^{ij}(v_t^\varepsilon)$, $\varphi^{ijk}(v_t^\varepsilon)$ は一様有界である。$f^a(x) = x^a$ （$x = (x^1, \cdots, x^d)$）の場合に(5.7)を適用して

$$a_t^\varepsilon \leq \text{const.}\left(1 + E\sum_a |M_t^{f^a,\varepsilon}|^4 + \int_0^t a_s^\varepsilon\, ds\right)$$

がわかる。(5.15)と

$$\begin{aligned} & E(m_t^{\varphi,\varepsilon})^p \\ & = E\int_0^t \Big[(\varphi)^p(z_s^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\mathcal{L}^\varepsilon(\varphi_z)^k(z_s^\varepsilon) \\ & \quad \times(-1)^{p-k}\left(\int_0^s \mathcal{L}^\varepsilon\varphi(z_r^\varepsilon)\,dr\right)^{p-k} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(\varphi_z)^k(z_s^\varepsilon)(-1)^{p-k}(p-k) \\ & \quad \times\left(\int_0^s(\mathcal{L}^\varepsilon\varphi)(z_r^\varepsilon)\,dr\right)^{p-k-1}\mathcal{L}^\varepsilon\varphi(z_s^\varepsilon) \\ & \quad + p\left(\int_0^s(\mathcal{L}^\varepsilon\varphi)(z_r^\varepsilon)\,dr\right)^{p-1}\Big]\,ds \end{aligned} \tag{5.17}$$

（$\varphi_z(\zeta) = \varphi(\zeta) - \varphi(z)$）に注意すれば，

$$E|M_t^{f^a,\varepsilon}|^4 \leq const. \int_0^t a_s^\varepsilon ds$$

を得る.

補題 5.6

$$\lim_{\delta\to+0}\limsup_{\varepsilon\to+0}\sup_{s\in[0,T]}\frac{1}{\delta}E[\sup_{t\in[s,s+\delta]}|x_t^\varepsilon - x_s^\varepsilon|^4] = 0.$$

証明　区間 $[s,s+\delta]$ について上と同様の評価をすればよい。

補題 5.7　$\{P_x^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は $C([0,T],R^d)$ で tight.

証明　$\forall\alpha>0\ \forall\eta>0\ \exists\delta\in(0,1)\ \exists\varepsilon_0>0$
$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\ \forall t\in[0,T]$

$$\frac{1}{\delta}P_x^\varepsilon\{\sup_{s\in[t,t+\delta]}|w_s - w_t| \geq \alpha\} \leq \eta$$

(w_s は曲線 $w\in C([0,T],R^d)$ の s における値)
が上の補題からわかるので [2] 定理 8.3 が使える。

定理の証明　$\{P_x^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ の集積点が $\mathcal{L}$-martingale 問題の解であることは，(5.7) からわかる。ゆえに martingale 問題の解の一意性により結論を得る。

文　献

[1] Bensoussan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G. C. : Boundary Layers and Homogenization of Transport Processes, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15 (1979), 53-157.

[2] Billingsley, P.: Convergence of probability measures, Wiley, New York, 1968.

[3] Bishop, R. and Crittenden, R. J. : Geometry of manifolds, Academic Press, New York, 1964.

[4] Funaki, T. : Construction of a solution of random transport equation with boundary condition, J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 719-744.

[5] Ikeda, N., Nakao, S. and Yamato, Y. : A Class of Approximations of Brownian Motion, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13 (1977), 285-300.

[6] Ikeda, N. and Watanabe, S. : Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, to appear.

[7] Itô, K.: The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifold, Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 536-539, 1963.

[8] Itô, K.: Stochastic parallel displacement, Probabilistic methods in differential equations, Lecture Notes in Math. 451, 1-7, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[9] Kobayashi, S. and Nomizu, K.: Foundations of Differential Geometry, Wiley 1963.

[10] Malliavin, P.: Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976 ed. by K. Itô, 195-263, Kinokuniya, Tokyo, 1978

[11] Ogawa, S.: A Partial Differential Equation with the White Noise as a Coefficient, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 28, 53-71 (1973).

[12] Papanicolaou, G.C., Stroock, D.W. and Varadhan, S.R.S.: Martingale approach to some limit theorems, 1976 Duke

Turbulence Conf., Duke Univ. Math. Series III, 1977.

[13] Pinsky, M.A.: Isotropic Transport Process on a Riemannian Manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 218 (1976) 353-360.

[14] Pinsky, M.A.: Homogenization in Stochastic Differential Geometry (preprint)

[15] Stroock, D.W. and Varadhan, S.R.S.: On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. III, 333-359, Univ. California Press, Berkeley, 1972.

[16] 田中 洋・長谷川 実：確率微分方程式, Seminar on Prob. 19, 1964.

[17] 渡辺信三：多様体上のSDEの定義するdiffeomorphism の flow の微分と変分，本講究録.

[18] Wong, E. and Zakai, M.: On the relation between ordinary and stochastic differential equations, Intern. J. Engng. Sci. 3 (1965), 213-229.