数理解析研究所講究録
第391巻 1980年 119-135

確率微分方程式の解の exact representation

九大 工 国田 寛

確率微分方程式の解を，与えられたデータ（ベクトル場とブラウン運動またはセミマルチンゲール）の関数として具体的に表わすことは，応用上重要であるのみでなく理論的にも興味ある問題である．この報告では，解の表現を微分幾何の方法を確率微分方程式にとり入れて論じたい．前半の1〜3節では準備として解の分解の問題及び解の微分同型の問題を論ずる．なお常微分方程式について対応する結果があるが，これについては Kuo-Tsai-Chen [3] を参照されたい．

§1. 解の例と微分同型の問題

Mをパラコンパクト，連結なC^∞多様体で，次元はdとする．Mに一点Δを付加した空間を$\hat{M}=M\cup\Delta$とかく．MがコンパクトのときにはΔは孤立点であり，コンパクトでないとき$\hat{M}$には一点コンパクト化の位相が入っているものとする．

多様体M上に与えられたr個のC^∞ベクトル場$X_1, \cdots, X_r$とある確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t, t \geq 0)$上に与えられた$r$個の連続なセミマルチンゲール$M_t^1, \cdots, M_t^r$をもとにした確率微分方程式(SDE)

$$(1.1) \qquad d\xi_t = \sum_{j=1}^{r} X_j(\xi_t) \circ dM_t^j$$

を考える．$\hat{M}$上の値をとる，$\mathcal{F}_t$に適合した連続な道をもつ確率過程ξ_tが，$\forall f \in C^\infty(M)$ $(= M$上のC^∞-関数の全体$)$に対し

$$(1.2) \qquad f(\xi_t) = f(\xi_0) + \sum_{j=1}^{r} \int_0^t X_j f(\xi_s) \circ dM_s^j, \qquad t < \tau$$

をみたすとき，ξ_tをSDE(1.1)の解という．ただしτは点Δに到達する最初の時間(life time)であり，$\circ$はStratonovich積分をあらわす．また$t \geq \tau$では$\xi_t = \Delta$を仮定する．初期値ξ_0がM上の一点xであるとき，解を$\xi_t(x)$であらわす．

明らかに解$\xi_t(x)$は与えられたデータ$X_1, \cdots, X_r$，$M_t^1, \cdots, M_t^r$及び初期値xの汎関数である．この汎関数が具体的に書き表わされる例をあげる．

例．まず$r=1$のとき．$X_1 = X$, $M_t^1 = M_t$とかく．点$x \in M$から出発するベクトル場Xの積分曲線を$\mathrm{Exp}\, tX(x)$であらわす．これの定義されるもの最大区間を$(\kappa_1(x), \kappa_2(x))$とすると，

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} \xi_t(x) &\equiv \mathrm{Exp}\, M_t X(x), & t < \tau &\equiv \inf\{t > 0 \mid M_t \notin (\kappa_1(x), \kappa_2(x))\} \\ &\equiv \Delta, & t &\geq \tau \end{aligned}$$

は方程式$d\xi_t = X(\xi_t) \circ dM_t$の解である．

次に与えられた r 個のベクトル場 $X_1,\cdots,X_r$ は可換，すなわち $X_iX_j=X_jX_i$ $(\forall i,j)$ をみたすとする．このとき

(1.4) $\quad \xi_t(x)=\mathrm{Exp}\,M_t^1X_1\circ\cdots\circ\mathrm{Exp}\,M_t^rX_r(x)$, $t<\tau=\tau_1\wedge\cdots\wedge\tau_r$

($\circ$ は合成写像．τ_i は $\mathrm{Exp}\,M_t^iX^i$ の life time) は (1.1) の解．

上の例でベクトル場 $X_1,\cdots,X_r$ が全て完備(即ち $\chi_1(x)=-\infty$, $\chi_2(x)=\infty$ $\forall x\in M$) ならば $\tau(x)=\infty$ となる．更に (t,ω) を固定して，ξ_t を M 上の写像とみれば微分同型になっていることが，表現 (1.4) からただちにわかる．しかし $X_1,\cdots,X_r$ が可換でないときは，解はこのように簡単には書けないので，ξ_t が微分同型であることを示すのは容易ではない．まず特別な場合にこれを示そう．

定理 1.1. $X_1,\cdots,X_r$ を完備なベクトル場とする．これらから生成される Lie 環 $\mathfrak{L}$ が有限次元ならば ξ_t は微分同型である．

証明. 上の仮定から $\mathfrak{L}$ の各元は完備であり，更に次の Lie 群 G の存在が知られている．(Palais [4]).

(i) G は M の Lie 変換群，即ち $G\times M\longrightarrow M$ の C^∞-写像 φ で (a) $\varphi(g,\cdot)$; $M\to M$ は微分同型，(b) $\varphi(e,x)=x$，$\varphi(gh,x)=\varphi(g,\varphi(h,x))$．をみたすものがある．

(ii) $g\to\varphi(g,\cdot)$ は G から $G(M)$ (= M 上の微分同型のなす群) の中への isomorphism.

(iii) $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とすると，$\forall \hat{X} \in \mathfrak{g}$ に対し $\mathcal{L}$ の元 X が存在して

$$\hat{X}(f\circ\varphi)(g,x) = Xf\circ\varphi(g,x) \quad , \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

が成立する．（左辺の $\hat{X}$ は x を固定して g のみに作用させる）．

今 $X_1, \cdots, X_r$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 $\hat{X}_1, \cdots, \hat{X}_r$ をとり G 上の確率微分方程式

$$d\hat{\xi}_t = \sum_{j=1}^r \hat{X}_j(\hat{\xi}_t)\circ dM_t^j$$

を考える．解 $\hat{\xi}_t(g)$ は conservative であることが知られている．（Itô [37]）．そこで $\xi_t(x) \equiv \varphi(\hat{\xi}_t(e), x)$ とおくと，ξ_t は SDE (1.1) の解である．実際，$f \in C^\infty(M)$ に対し

$$\begin{aligned} df(\xi_t(x)) &= d(f\circ\varphi)(\hat{\xi}_t(e), x) = \sum_j \hat{X}_j(f\circ\varphi)(\hat{\xi}_t(e), x)\circ dM_t^j \\ &= \sum_j X_j f(\xi_t(x))\circ dM_t^j . \end{aligned}$$

明らかに ξ_t は微分同型である．（証明終）

Lie 環 $\mathcal{L}$ が有限次元でなければ，$X_1, \cdots, X_r$ が完備であってもその元は必ずしも完備にはならない．（例：R^2 で $X = y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial y}$）．したがって解は必ずしも conservative にならず，一般に ξ_t が微分同型になることは期待出来ない．しかし局所微分同型になることを示そう．まず解 ξ_t の滑らかさについて次の定理が知られている．

定理 1.2．(Gihman-Skorohod [6])．(t, ω) を固定すると，ξ_t は $\mathcal{D}_t = \{x \mid \tau(x,\omega) > t\}$ から M の中への C^∞ 写像である．

次に $\xi_t(x)$ の Jacobi 行列を考える．再び (t,w) を固定し，点 x の近傍の局所座標を $(x^1,\cdots,x^d)$，点 $\xi_t(x)$ の近傍の局所座標を $(y^1,\cdots,y^d)$ とする．$\xi_t^i = y^i(\xi_t(x))$ とおき，Jacobi 行列

$$\Phi_t = \left(\frac{\partial \xi_t^i(x)}{\partial x^j}\right)_{i,j=1,\cdots,d}$$

を考える．

命題 1.3.（Ikeda-Watanabe [1]）．Φ_t は正則行列である．

証明．まず $M=R^d$ で $(x^1,\cdots,x^d)=(y^1,\cdots,y^d)$ の場合を調べる．ベクトル場 X_j をこの座標を用いて $X_j = \sum_i X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ と表わすと，$\xi_t=(\xi_t^1,\cdots,\xi_t^d)$ は

$$d\xi_t^i = \sum_k X_k^i(\xi_t)\circ dM_t^k$$

をみたす．これに $\frac{\partial}{\partial x^j}$ を作用させると

$$d\frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^j} = \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x^l} X_k^i(\xi_t)\frac{\partial \xi_t^l}{\partial x^j}\circ dM_t^k.$$

故に Φ_t は次の行列確率微分方程式をみたす．

$$d\Phi_t = \sum_k \left(\frac{\partial X_k^i}{\partial x^j}\right)\Phi_t\circ dM_t^k, \quad \Phi_0 = \text{単位行列}$$

これの adjoint 方程式

$$d\Psi_t = -\sum_k \Psi_t\left(\frac{\partial X_k^i}{\partial x^j}\right)\circ dM_t^k$$

をとると $d\Psi_t\Phi_t = 0$．ゆえに $\Psi_t\cdot\Phi_t=$ 単位行列となって，Φ_t は逆行列をもつことがわかる．

次に多様体の場合．(x,w) を固定し，道 $\xi_s(x)$，$0\le s\le t$ に対し座標近傍 $U_1,\cdots,U_n$ を

$$(\xi_s(x),\ \tfrac{k-1}{n}t \leq s \leq \tfrac{k}{n}t) \subset O_k, \quad k=1,\cdots,n$$

をみたすようにとる．今 $s=\frac{k-1}{n}t$ で点 x を通る解を $\xi_s^k(x)$ とかくと

$$\xi_t(x)=\xi_t^n \circ \xi_{\frac{n-1}{n}t}^{n-1} \circ \cdots \circ \xi_{\frac{1}{n}t}^1(x).$$

$\xi_{\frac{k}{n}t}^k$ の Jacobi 行列を $\Phi_{\frac{k}{n}t}^k$ とすると

$$\Phi_t = \Phi_t^n \cdots \Phi_{\frac{1}{n}t}^1$$

が成立する．各 Φ_t^i は正則行列だから，Φ_t も正則行列である．

系．ξ_t は局所微分同型である．

§2. 解の分解

多様体 M 上の点 x の接空間を $T_x(M)$ とかく．今 φ を $M\to M$ の C^∞ 写像とし，その定義域を $\mathcal{D}$ とする．$x\in\mathcal{D}$ に対し線形写像 $\varphi_{*,x}$: $T_x(M)\longrightarrow T_{\varphi(x)}(M)$ を $\varphi_{*,x}X_x f = X_x(f\circ\varphi)$（ただし $X_x\in T_x(M)$, $f\in C^\infty(M)$）によって定義し，φ の微分という．

φ の Jacobi 行列が点 x で正則ならば $\varphi_{*,x}$ は isomorphism である．このとき M 上のベクトル場 X に対し新しい $\mathcal{D}$ 上のベクトル場 $(\varphi)_*^{-1}(X)$ を

$$(\varphi)_*^{-1}(X)_x = (\varphi)_{*x}^{-1} X_{\varphi(x)}$$

によって定義する．明らかに

$$(\varphi)_*^{-1}(X)(f\circ\varphi)(x) = Xf(\varphi(x))$$

が成立する．

$\xi_t(x)$をSDE (1.1) の解とし，$\tau(x)$をそのlife timeとする．(t, w)を固定し $\mathcal{D}_t = \{x \mid \tau(x) > t\}$ とおく．ξ_tは局所微分同型だから，ベクトル場Xに対し $(\xi_t)_*^{-1}(X)$ が$\mathcal{D}_t$上で定義される．これは$\mathcal{F}_t$に適合した，ベクトル場の値をとる確率過程である．さて $(X_1, \cdots, X_r, M_t^1, \cdots, M_t^r)$ とは別に s個のベクトル場$\{Y_1, \cdots, Y_s\}$とs個の連続なセミマルチンゲール$N_t^1, \cdots, N_t^s$が与えられているとする．これとξ_tをもとにして確率微分方程式

$$(2.1) \qquad d\eta_t = \sum_{j=1}^{s} (\xi_t)_*^{-1}(Y_j) \circ dM_t^j$$

を考える．解η_tは高々ξ_tのlife time τまで定義可能である．したがってη_tのlife time σはτより小さい．二つの解ξ_tとη_tの合成によって得られる確率過程 $\xi_t \circ \eta_t$ のみたす確率微分方程式をもとめよう．

定理 2.1. $\zeta_t(x) \equiv \xi_t \circ \eta_t(x)$, $t < \sigma(x)$ は次のSDEの解．

$$(2.2) \qquad d\zeta_t = \sum_{j=1}^{r} X_j(\zeta_t) \circ dM_t^j + \sum_{j=1}^{s} Y_j(\zeta_t) \circ dN_t^j.$$

証明のために次の補題が必要である．

補題 2.2. (伊藤の公式) $F_t(x, w)$ は $[0,T] \times R^d \times \Omega \to R^1$ の可測写像であって次の性質をもつとする．

(i) (t, w) を固定すれば，$F_t(\cdot)(w)$ は C^3-写像

(ii) xを固定すれば，$F_t(x)$ は連続なセミマルチンゲールで

$$F_t(x) = F_0(x) + \sum_j \int_0^t f_s^j(x) \circ dN_s^j$$

とあらわされる．ここに $N_t^1, \cdots, N_t^m$ は連続なセミマルチンゲールで，$f_s^j(x, \omega)$，$j=1, \cdots, m$ は $[0, T] \times R^n \times \Omega \to R^1$ の可測写像で上記 (i) の性質をもち，x を固定すると連続なセミマルチンゲールになっているとする．

このとき連続なセミマルチンゲール $M_t = (M_t^1, \cdots, M_t^d)$ に対し次の公式が成立する．

(2.3) $$F_t(M_t) = F_0(M_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F_s}{\partial x^i}(M_s) \circ dM_s^i + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t f_s^j(M_s) \circ dN_s^j$$

（証明略）

定理 2.1 の証明．$f \in C^\infty(M)$ とし $F_t(x) = f \circ \xi_t(x)$ とおくと，

$$dF_t(x) = \sum_{j=1}^{r} X_j f(\xi_t(x)) \circ dM_t^j.$$

局所座標で書けば $\eta_t = (\eta_t^1, \cdots, \eta_t^d)$ は連続なセミマルチンゲールだから公式 (2.3) によって

$$dF_t(\eta_t(x)) = \sum_i \frac{\partial F_t}{\partial x^i}(\eta_t(x)) \circ d\eta_t^i + \sum_j X_j f(\xi_t \circ \eta_t(x)) \circ dM_t^j$$

右辺の第一項は

$$\sum_{i,j} \frac{\partial (f \circ \xi_t)}{\partial x^i}(\eta_t(x)) (\xi_t)_*^{-1}(Y_j)^i (\zeta_t(x)) \circ dN_t^j$$

$$= \sum_j (\xi_t)_*^{-1}(Y_j)(f \circ \xi_t)(\eta_t(x)) \circ dN_t^j$$

$$= \sum_j Y_j f(\xi_t \circ \eta_t(x)) \circ dN_t^j.$$

故に

$$d f(\zeta_t(x)) = \sum Y_j f(\zeta_t(x)) \circ dN_t^j + \sum X_j f(\zeta_t(x)) \circ dM_t^j$$

が成立する．（証明終）

系. ベクトル場 $X_1,\cdots,X_r$ が $X_j=Y_j+Z_j$, $j=1,\cdots,r$ と分解されているとする. η_t 及び ζ_t が

$$d\eta_t=\sum_j Y_j(\eta_t)\circ dM_t^j$$

$$d\zeta_t=\sum_j (\eta_t)_*^{-1}(Z_j)(\zeta_t)\circ dM_t^j$$

の解とすると, $\eta_t\circ\zeta_t$ は その方程式 (1.1) の解である.

注意. $Y_iZ_j=Z_jY_i$, $i,j=1,\cdots,r$ のとき $(\eta_t)_*^{-1}(Z_j)=Z_j$ となる. 故に (1.1) の解 ξ_t は $d\eta_t=\sum Y_j\circ dM_t^j$ と $d\zeta_t=\sum Z_j\circ dM_t^j$ の解に分解される. §1の例はこの場合である.

§3. 解の微分同型 II.

1節で解 ξ_t は局所微分同型であることを示した. この節では ξ_t はその定義域 $\mathcal{D}_t$ からMの中への 1対1 写像, したがってMの中への微分同型写像であることを示したい. この事実は $M_t^1,\cdots,M_t^r$ が t の滑らかな関数のときは, 常微分方程式あるいは幾何で知られた事実である. 我々の場合にこのことを示す一つの方法は, $M_t^1,\cdots,M_t^r$ を滑らかな関数で近似することである. これについては Ikeda-Watanabe [ ] 又はこの報告集を参照されたい. ここでは, 前節の解の分解の方法に従って証明しよう. まず

補題 3.1. ξ_t を (1.1) の解とし, η_t を

(3.1) $$d\eta_t=-\sum_{j=1}^{r}(\xi_t)_*^{-1}(X_j)\circ dM_t^j$$

の解とすれば

$$\xi_t \circ \eta_t(x) = x \quad , \qquad t < \tau \wedge \sigma(x)$$

$$\eta_t \circ \xi_t(x) = x, \qquad t < \tau(x)$$

が成立する．ただし，τ 及び σ は ξ_t 及び η_t の life time である．

証明．$\xi_t \circ \eta_t(x) = x$ は定理2.1から明らか．この関係式より $(\xi_t)_{*\eta_t(x)}(\eta_t)_{*x}$ は $T_x(M)$ 上の恒等写像．ゆえに $(\eta_t)_{*x} = (\xi_t)^{-1}_{*\eta_t(x)}$ が成立する．今 $\hat{\xi}_t = \eta_t \circ \xi_t$ とおくと

$$d\hat{\xi}_t = -\Sigma(\xi_t)^{-1}_*(X_j) \circ dM_t^j + \Sigma(\eta_t)_*(X_j) \circ dM_t^j = 0$$

故に $\hat{\xi}_t(x) = x$．

定理3.2 ξ_t による $\mathcal{D}_t$ の像を $\mathcal{E}_t$ とする．ξ_t は $\mathcal{D}_t$ から $\mathcal{E}_t$ への微分同型である．

証明．$x, y \in \mathcal{D}_t$ が $\xi_t(x) = \xi_t(y)$ をみたすとすると，$\eta_t \circ \xi_t(x) = \eta_t \circ \xi_t(y)$．故に補題より $x = y$．即ち ξ_t は1対1写像である．　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

解 ξ_t が conservative ならば $\mathcal{D}_t = M$ である．更に(3.1)の解 η_t も conservative ならば $\mathcal{E}_t = M$ である．実際任意の $x \in M$ に対し $\xi_t(\eta_t(x)) = x$ となるから $x \in \mathcal{E}_t$ である．故に次の命題が成立する．

命題3.3 ξ_t 及び(3.1)の解 η_t が共に conservative ならば ξ_t はMの微分同型である．

系．Mがコンパクト多様体ならば，ξ_t は微分同型である．

多様体Mがコンパクトでない場合は，ξ_t 及び η_t は必ずしもconservative にならない．これらが conservative になる十分条件を求めよう．

補題3.4．Mをコンパクトでないリーマン多様体とし，ξ_t をその上の conservative な解とする．M上のある点 x_0 と距離 d に対し

$$\sup_{d(x,x_0)\geq n}\ \sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{1+d(x_0,\xi_t(x))^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

をみたすならば ξ_t は微分同型である．

証明．$K_n=\{x \mid d(x,x_0)\geq n\}$ とし，η_t の K_n への到達時間を σ_n とすると，$\sigma_n\uparrow\sigma$ (= η_t の life time) かつ $\xi_{t\wedge\sigma_n}\circ\eta_{t\wedge\sigma_n}(x)=x$ が成立する．今 $\sigma(x)<t$ とすれば $\eta_{t\wedge\sigma_n}(x)\longrightarrow\Delta$ $(n\to\infty)$。ゆえに仮定より $\xi_{t\wedge\sigma_n}\circ\eta_{t\wedge\sigma_n}(x)\longrightarrow\Delta$ となって矛盾する．ゆえに $\sigma\geq t$ でなければならず，η_t は conservative である．

定理3.5．Mをユークリッド空間とする．ベクトル場 X_j の通常の座標による表現を $X_j=\sum X_j^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ とする．関数 X_j^i の各変数による偏微分が全て有界関数ならば，ξ_t は微分同型である．

証明．m を正の整数とし $f(x)=(1+|x|^2)^{-m}$ とおく．伊藤の公式により

$$f(\xi_t(x))=f(x)+\sum_{j=1}^{r}\int_0^t X_jf(\xi_s)\,dM_s^j+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t X_jX_if(\xi_s)\,d\langle M^i,M^j\rangle_s$$

今 N_t^i 及び A_t^i をそれぞれ M_t^i のマルチンゲール部分及び有界変動過程の部分とする．($M_t^i = N_t^i + A_t^i$)．必要ならば時間変更することにより，$t>s$ のとき $\langle N^i\rangle_t - \langle N^i\rangle_s \le t-s$，$A_t^i - A_s^i \le t-s$ をみたすと仮定してよい．上式の両辺を二乗して平均をとって計算すれば次の不等式を得る

$$E[f(\xi_t(x))^2] \le (r+2)\left\{ f(x)^2 + (r+1)c\int_0^t E[f(\xi_s(x))^2]ds \right\}$$

ただし c は定数．Gromwall の不等式より

$$E[f(\xi_t(x))^2] \le (r+2)e^{(r+2)(r+1)ct} f(x)^2$$

を得る．また $\left|\frac{\partial}{\partial x^i}f\right| \le \text{const}\cdot f(x)$ だから同様に

$$E\left[\left|\frac{\partial}{\partial x^i}f(\xi_t(x))\right|^2\right] \le \text{const}\cdot f(x)^2$$

が成立する．

x を極座標 (r,θ) を用いて表わすと，

$$\frac{\partial}{\partial r}(f\circ\xi_t(r,\theta)) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}f\cdot\frac{\partial\xi^i(r,\theta)}{\partial r}$$

一方

$$\frac{\partial}{\partial r}\xi^i(r,\theta) = \sum_{j,k}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x^k}X_j^i(\xi_s)\frac{\partial}{\partial r}\xi_s^k(r,\theta)\circ dM_s^j + \frac{\partial x^i}{\partial r}$$

であるが，$\frac{\partial}{\partial x^k}X_j^i$ は仮定によって有界だから $E\left[\left|\frac{\partial}{\partial r}\xi^i(r,\theta)\right|^2\right]$ は (r,θ) に関し有界となる．故に

$$E\left[\left|\frac{\partial}{\partial r}f\circ\xi_t(r,\theta)\right|^2\right] \le \text{const}\sum_i E\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\left|\frac{\partial\xi^i}{\partial r}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \text{const}\cdot f(x)$$

Doob の martingale 不等式を使えば

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial}{\partial r} f\circ\xi_t(r,\theta)\right|^2\right] \le \text{const}\cdot f(\alpha)$$

が成立する．そこで

$$\varphi_n(\theta) \equiv \left(\int_n^\infty \sup_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial}{\partial r} f\circ\xi_t(r,\theta)\right|^2 + \left|f\circ\xi_t(r,\theta)\right|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく．上の評価より $E[\varphi_n(\theta)^2]<\infty\ (\forall n)$ だから，$\varphi_n(\theta)<\infty$ a.s. である．ゆえに $\varphi_n(\theta)\downarrow 0\ (n\to\infty)$ が成立する．ところで $\varphi_n(\theta)$ は θ の連続関数だから Dini の定理により $\varphi_n(\theta)$ は 0 に一様収束する．故に Sobolev の不等式

$$\sup_{r\ge n}\sup_{0\le t\le T}\left|f\circ\xi_t(r,\theta)\right| \le 2\varphi_n(\theta)$$

に注意すれば

$$\sup_{\substack{r\ge n\\ 0\le\theta\le 2\pi}}\sup_{0\le t\le T}\left|f\circ\xi_t(r,\theta)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が成立することがわかる．故に ξ_t は補題の条件をみたす．

§4. 解の表現．可解の場合．

この節では SDE (1.1) を定義するベクトル場 $X_1,\cdots,X_r$ は全て完備でありかつそれらから生成される Lie 環 $\mathcal{L}$ は有限次元の可解 Lie 環とする．このとき Lie の定理によって，$\mathcal{L}$ の ideal の減少列で

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_n\supset\mathcal{L}_{n-1}\supset\cdots\supset\mathcal{L}_1=\{0\},\qquad \dim\mathcal{L}_k=k$$

をみたすものがある. そこで $\mathcal{L}$ の基 $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ を, 各 $k \le n$ で $\{Y_1, \cdots, Y_k\}$ が $\mathcal{L}_k$ の基になるように選んでおく.

今 $Z \in \mathcal{L}$ に対し $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ の線形写像 ad_Z を $ad_Z X = [Z, X]$ によって定義する. $\mathcal{L}$ の基を上の様にとると, $ad_Z Y_i = \sum_{j \le i} c_{ij} Y_j$. 行列 (c_{ij}) を ad_Z と書くことにする. ad_Z は三角行列であって

$$ad_Z = \left(\begin{array}{cc|c} * & 0 & \\ * & \ddots\ * & 0 \\ \hline * & * & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\ n-? \\ \}\ n-k \end{array}, \quad Z \in \mathcal{L}_k \text{ のとき}$$

$$\underbrace{\qquad}_{k} \quad \underbrace{\quad}_{n-k}$$

と表わされる. $\mathcal{L}$ が中零 Lie 環ならば, 対角線上の要素は全て 0 である.

定理 4.1. $Y_1, \cdots, Y_n$ を上の基とすると, SDE (4.1) の解 ξ_t は次の表現をもつ

$$\xi_t(x) = \operatorname{Exp} N_t^n Y_n \circ \cdots \circ \operatorname{Exp} N_t^1 Y_1 (x).$$

ただし $N_t^1, \cdots, N_t^r$ は $M_t^1, \cdots, M_t^r$ から次の初等的演算 (i) ～ (iii) を有限回行って得られる連続なセミマルチンゲールである.

(i), 一次結合, 積

(ii) $M_t^1, \cdots, M_t^r$ による Stratonovich 積分

(iii) e^x に代入.

特に $\mathcal{L}$ が nilpotent ならば $N_t^1, \cdots, N_t^n$ は上の (i), (ii) の演算のみによって得られる.

証明. 方程式 (1.1) を定義するベクトル場 $X_1, \cdots, X_r$ は全て

$Y_1, \cdots, Y_n$ の一次結合であらわされる. 今 $X_j = \sum a_{jk} Y_k$ とすると (1.1) は

$$d\xi_t = \sum Y_k \circ d\tilde{M}_t^k, \qquad \tilde{M}_t^k = \sum_j a_{jk} M_t^j$$

と表わされる. 以下では簡単のため $\tilde{M}_t^k$ を M_t と書くことにする. またベクトル記号 $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$, $M_t = (M_t^1, \cdots, M_t^n)$ を使って上の方程式を $d\xi_t = (Y, \circ dM_t)$ とも書く.

まず解 ξ_t を次の二つの方程式の解に分解する.

$$d\zeta_t^n = Y_n \circ dM_t^n$$

$$d\eta_t^n = \sum_{j=1}^{n-1} (\zeta_t)_*^{-1}(Y_j) \circ dM_t^j.$$

定理2.1 の系より $\xi_t = \zeta_t^n \circ \eta_t^n$ が成立する. ところで次の補題により

$$d(\zeta_t^n)_*^{-1}(Y_j) = ad_{Y_n}(\zeta_t^n)_*^{-1}(Y_j) \circ dM_t^n$$

だから

$$(\zeta_t^n)_*^{-1}(Y_j) = e^{M_t^n ad_{Y_n}} Y_j.$$

とあらわされる. 故に

$$d\eta_t^n = \sum_{j=1}^{n-1} e^{M_t^n ad_{Y_n}} Y_j \circ dM_t^j = (Y, \circ e^{M_t^n ad'_{Y_n}} \circ d\hat{M}_t) \tag{4.1}$$

となる. ただし ad'_{Y_n} は ad_{Y_n} の転置行列であり, $\hat{M}_t = (M_t^1, \cdots, M_t^{n-1}, 0)$. 行列 $e^{M_t^n ad'_{Y_n}}$ は三角行列だから, ベクトル $M_t^{n-1} = \int_0^t e^{M_s^n ad'_{Y_n}} \circ d\hat{M}_s$ の第 n 成分は 0 である. 故に

$$d\eta_t^n = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j \circ dM_t^{n-1, j}$$

とかける ただし $M_t^{n-1} = (M_t^{n-1,1}, \cdots, M_t^{n-1,n-1}, 0)$.

次にη_t^nを次の二つの方程式の解に分解する.

$$d\zeta_t^{n-1} = Y_{n-1}\circ dM_t^{n-1,n-1}$$

$$d\eta_t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} (\zeta_t^{n-1})_*^{-1}(Y_j)\circ dM_t^{n-1,j}$$

上と同じ理由でη_t^{n-1}はベクトル場$Y_1,\cdots,Y_{n-2}$に関するSDEで

$$d\eta_t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} Y_j\circ dM_t^{n-2,j}$$

とあらわされる. ただし $M_t^{n-2}=(M_t^{n-2,1},\cdots,M_t^{n-2,n-2},0,0)$ は $M_t^{n-2}=\int_0^t e^{M_s^{n-1,n-1}\mathrm{ad}\,Y_{n-1}'}\circ d\hat{M}_s^{n-1}$, $\hat{M}_t^{n-1}=(M_t^{n-1,1},\cdots,M_t^{n-1,n-2},0,0)$ によって定義される連続なセミマルチンゲールである. この論法をくり返せば

$$\begin{aligned}\xi_t &= \zeta_t^n\circ\zeta_t^{n-1}\circ\cdots\circ\zeta_t^2\circ\eta_t^2\\ &= \mathrm{Exp}\,M_t^nY_n\circ\mathrm{Exp}\,M_t^{n-1,n-1}Y_{n-1}\circ\cdots\circ\mathrm{Exp}\,M_t^{2,2}Y_2\circ\mathrm{Exp}\,M_t^{2,1}Y_1\end{aligned}$$

となる. ここで$M_t^n, M_t^{n-1,n-1},\cdots,M_t^{2,1}$の定義をみれば, これらは$M_t^1,\cdots,M_t^n$から(i)~(iii)の演算を有限回行って得られるセミマルチンゲールであることは明らか.

また$\mathfrak{L}$が巾零のとき, $e^{M_t^n\mathrm{ad}\,Y_n'}$の要素は$M_t^n$の多項式のみで指数関数は現われないから, $M_t^{n-1,n-1}$は(i), (ii)の演算のみによって得られる. $M_t^{n-2,n-2}$についても同様である. 故に定理は証明された.

補題4.2. ξ_tを(1.1)の解とし, Xを任意のベクトル場とすると, ベクトル場の値をとる確率過程 $X_t=(\xi_t)_*^{-1}(X)$は次の確率微分方程式をみたす.

$$dX_t = \sum_j [X_j, X_t] \circ dM_t^j = \sum_j ad_{X_j} X_t \circ dM_t^j .$$

(証明略).

文　献

[1] N. Ikeda - S. Watanabe: Stochastic differential equations and diffusion processes. To appear

[2] K. Itô: Brownian motions in a Lie group. Proc. Japan Acad. 8(1950), 4-10.

[3] Kuo-Tsai-Chen: Decomposition of differential equations Math. Annalen. 146 (1962), 263-278

[4] R. S. Palais: A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Mem. Amer. Math. Soc. No 22 (1957)

[5] Y. Yamato: Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebra. Z. W. 47(1979), 213-229.

[6] I. I. Gihman - A. V. Skorohod, Stochastic differential equations, Springer-Verlag., Berlin, 1972.