数理解析研究所講究録
第 392 巻 1980 年 24-31



# 定理Bn（アーベル多様体の分岐被覆）

東大 理　角田秀一郎

定理Bn. $X$ を代数多様体, $f: X\to A$ をアーベル多様体 $A$ への支配的有限正則写像とする。$\kappa(X)=0$ であれば, $f$ はエタールになる。

証明. まず次の4つの定理を仮定する。

定理1 [1]. $V$ をアーベル多様体 $A$ の部分多様体とする。そのとき, $A$ のアーベル部分多様体 $A_1$ と, 代数多様体 $W$ が存在して, 次をみたす。

(1) $V$ は $A_1$ をファイバーとする $W$ 上のファイバーバンドル.

(2) $\kappa(W)=\dim W=\kappa(V)$.

$A_1$ は $\{x\in A;\ x+V\subseteq V\}^0$ で特徴づけられる。ここで $0$ は $A$ の原点をふくむ連結成分をあらわす。

定理2 [2]. 定理Bnの仮定のもとで, $D_1,\dots,D_m$ を $f$ の分岐跡 $\Delta(X/A)$ の既約成分, $D_1^*,\dots,D_m^*$ をその非特異化とすれば,

$$\sum_{i=1}^{m} p_g(D_i^*)\le \dim A.$$

定理3[3]. $f: V \longrightarrow W$ を代数的ファイバー空間, $f$ の一般ファイバーはアーベル多様体とすれば, $\kappa(V) \geq \kappa(W)$.

定理1,2,3の証明はそれぞれの文献参照.

定理4. $A$ を $n$ 次元アーベル多様体, $D$ を $A$ の素因子, $D^*$ を $D$ の非特異化とする. $\kappa(D^*) = n-1$ であれば,

$$g_k(D^*) \equiv \dim H^0(D^*, \Omega^k_{D^*}) \geq \binom{n}{k}.$$

さらに $p_g(D^*) = n$ であれば, $g_k(D^*) = \binom{n}{k}$ とくに $|\chi(\mathcal{O}_{D^*})| = 1$.

「定理1〜4 $\Longrightarrow$ $B_n$」

証明 $\Delta(X/A) \neq \phi$ とする. $B = \{x \in A;\ x + \Delta(X/A) \subseteq \Delta(X/A)\}^0$ とおく. $\pi: A \to A/B$ を射影とする. $X \xrightarrow{\pi'} Y \xrightarrow{g} A/B$ を $\pi \circ f$ のスタイン分解とすれば, $B$ の定義から, $a \in A/B$ に対して, $f^{-1}\pi^{-1}(a)$ は非特異. したがって, $\pi'$ はスムーズ. よって, $\Delta(X/A) = \pi^*(Y/A/B)$ 一方 $\pi'$ のファイバーは, $B$ のエタール被覆 したがってアーベル多様体. 定理3により, $0 = \kappa(X) \geq \kappa(Y)$. $\dim Y = \dim A/B$ より, $\kappa(Y) \geq \kappa(A/B) = 0$. だから $\kappa(Y) = 0$. よって $B = 0$ としてよい. $B_i = \{x \in A;\ x + D_i \subseteq D_i\}^0$ とおけば, $\bigcap_i B_i = 0$. $D_i$ の $A \to A/B_i$ による像を $E_i$ とおけば, 定理4により, $p_g(D_i) \geq p_g(E_i) \geq \dim A/B_i$ 定理2より, $\dim A \geq \sum_i p_g(D_i)$. したがって, $p_g(E_i) = \dim A/B_i$ をえる. 再び定理4により, $|\chi(\mathcal{O}_{E_i})| = 1$.

$r: A \longrightarrow A$ $(r \in \mathbb{Z})$ を $r$ 倍写像，$X_r$ を $r$ による $X$ の引きもどしとする。$r$ はエタールだから，$\Delta(X_r/A) = \Delta(X/A)$ の引きもどし，しかも $X_r \to A$ は定理 $B_n$ の仮定をみたす。

$r^{-1}(D_i) = \sum_{j=1}^{p(i)} D_{ij}$ を既約分解とすれば，$\dim A \geqq \sum p_g(D_{ij}) \geqq \sum_i p(i)\, p_g(D_i)$。したがって，$r^{-1}(D_i)$ は既約でなければならない。$B_i = \{x \in A;\ x + r^{-1}(D_i) \subseteq r^{-1}(D_i)\}^0$，$E_i$ を $A \to A/B_i$ の像とすれば，$\chi(\mathcal{O}_{E_i}) = \deg r\, \chi(\mathcal{O}_{E_i})$ で，$|\chi(\mathcal{O}_{E_i})| = 1$ に矛盾。したがって，$\Delta(X/A) = \phi$.

Q.E.D.

「定理4の証明」

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を $A$ の座標とする。$\alpha: D^* \longrightarrow A$ を $D \subset A$ から誘導される写像とする。$\omega_i = \alpha^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge \check{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ とおく。$\omega_i$ は1次独立を示す，$\sum_i a_i \omega_i = 0$ $a_i \in \mathbb{C}$ と仮定する。$P$ を $D$ の一般点とすれば，陰関数定理により，$D$ は $P$ のまわりで，$x_n = F(x_1, \ldots, x_{n-1})$ $(\deg F \geqq 2)$ で定義されているとしてよい。ここで $F$ は正則関数．$P$ のまわりで $\omega_i = (-1)^{n-i-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \omega_n$ $(i=1,\ldots,n-1)$ とかける。したがって，$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i-1} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + a_n = 0$，$1 \leqq i \leqq n$ に対して，$b_i = (-1)^{n-i-1} a_i$ とおくと，$(y_1, \ldots, y_n) \in D$，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$(y_1 + b_1\alpha, \ldots, y_n + b_n\alpha) \in D$。だから，

$B = \{(b_1\alpha, \ldots, b_n\alpha) \in A;\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ とおけば，$B + D$

$\subseteq D$。仮定により，$B=0 \Rightarrow b_i=0 \Rightarrow a_i=0$。よって$\omega_i$は1次独立。　$I=\{i_1,\dots,i_k\}$　$1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$に対して、$\omega_I=\alpha^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})$とおけば，$\omega_i$が一次独立により，$(\omega_I)_I$の1次独立は容易とわかる。したがって，$g_k(D^*)\geq\binom{n}{k}$。これで定理3の前半がわかった。

後半を示す前に次の定理を証明する。

上の記号をそのまま用いる。

定理5　$f: D\to P^{n-1}$を$\omega_1\dots\omega_n$で定まる有理写像とすれば，$f$は支配的。

証明。支配的でないとする。$Y$を$f$の像，$q$を$Y$の一般点，$P$を$f^{-1}(q)$の一般点とする。仮定から，$\dim f^{-1}(q)\geq 1$。陰関数定理により，$D$は$P$のまわりで，$x_n=F(x_1,\dots,x_{n-1})$　$\deg F\geq 2$とかける。$f$は$P$のまわりで$\frac{\partial F}{\partial x_1}:\cdots:\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}:1$で定義されるから，$f^{-1}(q)$は$P$のまわりで，$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$ $(i=1,\dots,n-1)$で定義される。$\Gamma$を$Y$をふくむ$P^{n-1}$の因子で$q$のまわりで非特異になるものとする。$x_1,\dots,x_{n-1}$の線型変換をゆるせば，$\frac{\partial F}{\partial x_1}=G(\frac{\partial F}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}})$が$\Gamma$を定義するとしてよい。ここで$\deg G\geq 2$。$f^{-1}(q)$上$\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial F}{\partial x_i})=\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial F}{\partial x_1})=\frac{\partial G}{\partial x_i}=0$。したがって，$f^{-1}(q)$は$x_1$方向に対して，不変。$B$を$x_2=\cdots=x_n=0$で定義される$A$の部分アーベル多様体とすれば，$P+B\subseteq D$。$A$の部分アーベル多様体は可算個だ

から，BはPによらないとしてよい。よって $B+D\leq D$ で，$B\neq 0$ だから矛盾。　Q.E.D.

定理4のつづき。

$P_g(D^*)=n$ を仮定する．P を X の一般点とし，$x_1,\dots,x_n$ を定理4の証明中と同様とする。

$\omega$ を $D^*$ 上の $k$-型式とし，P のまわりで，$\omega=\sum_{I\neq\phi} g_I(x_1\dots x_{n-1})\,\omega_I$ とかく。$I^c=\{1,\dots,n-1\}\setminus I$ とおくと，$\omega\wedge\omega_{I^c}=\varepsilon(I,I^c)\,g_I\,\omega_n$. ここで $\varepsilon$ は $(I\,I^c)$ の符号.

$\omega\wedge\omega_{I^c}\in H^0(D^*,\Omega^{n-1}_{D^*})$ により，$\omega\wedge\omega_{I^c}=\sum a_{Ii}\omega_i$，$a_{Ii}\in\mathbb{C}$。よって，$g_I=g_I(0)+\sum_{i=1}^{n-1}a_{Ii}\frac{\partial F}{\partial x_i}$ なる $a_{Ii}\in\mathbb{C}$ がある。J を $\{1,\dots,n-1\}$ の部分集合で，個数を $n-k-2$ とする。

$$\omega\wedge\omega_J\wedge dx_n=\sum_{\{i\}\cup I=J^c}\varepsilon(I,J,i)\,g_I\frac{\partial F}{\partial x_i}\,\omega_n.$$

前と同様，$\omega\wedge\omega_J\wedge dx_n=\sum b_{Ji}\,\omega_i$　$b_{Ji}\in\mathbb{C}$ となる。よって，

$$\sum_{\{i\}\cup I=J^c}\varepsilon(I,J,i)\left(g_I(0)+\sum_{j=1}^{n-1}a_{Ij}\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n-1}b_{Ji}\frac{\partial F}{\partial x_i},\quad \exists\, b_{Ji}\in\mathbb{C}.$$

$\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}$ は定理5により，代数的独立。

J を固定して，左辺の $\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i}$ の係数 ($j=1,\dots,n-1$，$i\in J^c$) をみると，次を得る。(1) $j\in J$，$a_{Ij}=0$.

(2)　$a_{Ii}=0$，$I\cup\{i\}=J^c$.

(3)　$j\in J^c$ のとき，$K=J^c\setminus\{i\}\setminus\{j\}$ とおけば，

$$\varepsilon(K\cup\{j\}, J, i)\, a_{K\cup\{j\}\cup\{i\}} + \varepsilon(K\cup\{i\}, J, j)\, a_{K\cup\{i\}\cup\{j\}} = 0.$$

(3)より $\varepsilon(K, i)\, a_{K\cup\{i\}, i} = \varepsilon(K, j)\, a_{K\cup\{j\}\, j}$.

そこで、$C_K = \varepsilon(K, i)\, a_{K\cup\{i\}, i}$ とおくと、

$$\sum_{I\not\ni n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{Ii}\frac{F}{x_i}\right)\omega_I = \sum_{I\not\ni n}\left(\sum_{i\in I} a_{Ii}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\omega_I$$

$$= \sum_{K\not\ni n}\left(\sum_{i} a_{K\cup\{i\}\, i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\omega_K\wedge dx_i\, \varepsilon(K, i)$$

$$= \sum_{K\not\ni n}\sum_{i=1}^{n-1} C_K\, \omega_K\wedge\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{K\not\ni n} C_K\omega_K\right)\wedge\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i = \sum_{K\not\ni n} C_K\omega_K\wedge dx_n.$$

よって、$\omega = \sum g_I(0)\,\omega_I + \sum a_K\,\omega_K\wedge dx_n$.

よって、$g_k(D^*) = \binom{n}{k}$ がわかった。

## 文　献

[1] K. Ueno: Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Math. 439, 1975, Springer P. 120 ~ P 123.

[2] E. Viehweg: Klassifikationstheorie algebraischen Varietäten der Dimension drei, Preprint.

[3] K. Ueno: On algebraic fiber spaces of abelian varieties, Math. Ann. 237 (1978) 1-22.

## 付録

定理2の証明は容易であるから次にのべる。

定理2の証明. $X$に双有理変換をくり返して, 次の仮定をつけ加える. $R_f$の既約成分を $R_1, \cdots, R_{n^*}$. i) $R_1, \cdots, R_{n^*}$はすべて非特異, かつ $p_g(R_1), \cdots p_g(R_s) > 0$, $p_g(R_{s+1}) = \cdots = p_g(R_{n^*}) = 0$ とするとき, $R_i \cap R_j = \phi$ (但し $i \neq j \leq s$).

完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-\sum_{i=1}^{s} R_i) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \oplus \mathcal{O}_{R_i} \to 0$$

に $\mathcal{O}(K(X))$ をテンソルして, さらに $\otimes \mathcal{O}(\sum R_i)$ を行う

$$0 \to \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K + \sum_{i=1}^{s} R_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}(K(R_i)) \to 0$$

をえる. $\dim \Gamma(\mathcal{O}(K + \sum_{i=1}^{s} R_i)) \leq P_2(X)$ (なぜなら $K(X) = R$) だから $P_2(X) = 1$ とすると,

$$0 \to \Gamma(\mathcal{O}(K)) \simeq \Gamma(\mathcal{O}(K + \sum R_i)) \to \bigoplus_{i=1}^{s} \Gamma(\mathcal{O}(K(R_i)))$$

$$\longrightarrow H^1(\mathcal{O}(K))$$

により, $\sum_{i=1}^{n^*} p_g(R_i) \leq \dim H^1(\mathcal{O}(K))$. $n = \dim X = \dim A$とする. 一方, $\dim H^1(\mathcal{O}(K)) = \dim H^{n-1}(\mathcal{O}) = q_{n-1}(X)$. $A$の大局座標を $x_1, \cdots, x_n$ とし, $\omega_i = f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n)$ とおくとき, 任意の $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^{n-1})$ に対して,

$\omega \wedge f^* dx_i = \alpha_i \tilde{\omega}$ (ここに $\tilde{\omega} = f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ は $\Gamma(X, \Omega_X^n)$ の生成元) により $\alpha_i \in \mathbb{C}$ をえるから

$$(\omega - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \omega_i) \wedge f^* dx_i = 0$$

がすべての $i$ につき成立する。そして $\hat{\omega} = \omega - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i$ とおく. $\hat{\omega} \neq 0$ なら $X$ の一般の点でも $0$ でなく, そこでは, $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ が局所座標であり, $\hat{\omega} = \varphi_1 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} + \cdots$ とかける. しかし $\hat{\omega} \wedge f^* dx_1 = \varphi_1 = 0$ 等から $\hat{\omega} = 0$ を得てしまう. 即ち,

$\Gamma(X, \Omega_X^{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}\omega_i$ となり $p_g g_{n-1}(X) = n$ をえる. よって $\sum_{i=1}^{n} p_g(R_i) \leq n$.

一方, $f(R_f) = \Delta(X/A)$ であり, 各 $D_i$ につき, ある $R_i$ $(i \leq s)$ があって, $R_i \to D_i$ は全射. よって, $p_g(R_i) \geq p_g(D_i)$. 即ち, $\sum_{i=1} p_g(D_i) \leq n$ が示された.