数理解析研究所講究録
第394巻 1980年 34-53

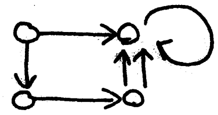
グラフの表現論における Kac の結果の紹介

東大 理学部 谷崎俊之

1972年の Gabriel の論文 [5] において"グラフの表現"の概念が確立されて以来、多くの人がグラフの表現の分類問題に取り組んできたが、最近出た V.G. Kac の論文 [8] において、いわゆる Kac-Moody 型の無限 root 系と関連してかなり一般的な結果が得られたので、この結果の紹介をする。

§1. グラフの表現の定義

可換体 k をひとつ固定しておく。S を有限グラフとしてその頂点の集合を S_0、辺の集合を S_1 と書く事にする。(ただし2頂点を結ぶ辺が2つ以上あっても構わないし、cycle や loop があっても構わないものとする。) 更に Ω を S の orientation として、$l \in S_1$ に対してその始点を $\alpha(l) \in S_0$、終点を $\beta(l) \in S_0$ と書く事にする。有向グラフ (S,Ω) が与えられたとき、category $\mathfrak{M}(S,\Omega)$ を



(S,Ω) の例

Gabriel [5] に従って次の様に定義する。

<u>定義</u> (category $\mathfrak{M}(S,\Omega)$)

<u>object</u> 各頂点 $\alpha \in S_0$ に対して、体 k 上の有限次元ベクトル空間 V_α が対応し、各辺 $\ell \in S_1$ に対して線型写像 $V_{\alpha(\ell)} \xrightarrow{f_\ell} V_{\beta(\ell)}$ が対応しているとき、組 (V,f) を category $\mathfrak{M}(S,\Omega)$ の object とする。

<u>morphism</u> (V,f), (W,g) を2つの object とする。各頂点 $\alpha \in S_0$ に対して線型写像 $V_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} W_\alpha$ が対応して、任意の辺 $\ell \in S_1$ に対して $\varphi_{\beta(\ell)} \circ f_\ell = g_\ell \circ \varphi_{\alpha(\ell)}$ が成立するとき $\varphi = \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in S_0\}$ を (V,f) から (W,g) への morphism とする。

我々は category $\mathfrak{M}(S,\Omega)$ の object を、有向グラフ (S,Ω) の体 k 上の表現と呼ぶ。$\mathfrak{M}(S,\Omega)$ には自然に abelian category の構造が入り、(V,f), (W,g) に対してその直和 $(U,h)=(V,f)\oplus(W,g)$ は、

$$U_\alpha = V_\alpha \oplus W_\alpha \quad (\alpha \in S_0) \qquad h_\ell = f_\ell \oplus g_\ell \quad (\ell \in S_1)$$

により定義される。2つの自明でない表現の直和に分解されない様な表現を直既約という事にすると、任意の表現は直既約な表現たちの有限個の直和と同型になるが、この分解は同型を除いて一意的である。(この事は有限群論における Krull-Remak-Schmidt の定理と全く同様に示される。)従って

与えられたグラフ (S,Ω) の表現の分類は、直既約表現の分類に帰着される。

§2. 実例

以下幾つかの有向グラフについて、直既約な表現がどうなるかをみてみよう。この節では簡単のために、体 k は代数閉体とする。

例1 $\circ \longrightarrow \circ$

(S,Ω) が上の図で表わされているとき、(S,Ω) の表現はベクトル空間 V, W と線型写像 $V \xrightarrow{f} W$ により表わされる。$\dim V$, $\dim W$, $\operatorname{rank} f$ が決まれば表現は同型を除いて決まるので、直既約な表現は同型を除いて次の3個で与えられる事がわかる。

$$k \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow k \qquad k \xrightarrow{id} k$$

例2 $\circ \circlearrowleft$

この場合はベクトル空間 V と $f \in \mathrm{End}_k(V)$ の組を同型を除いて決めようという問題であるが、Jordan 標準形の理論により直既約な表現は、

$$k^n \circlearrowleft A \qquad A = \begin{bmatrix} c & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & c \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N},\ c \in k)$$

で与えられる事がわかる。

例3 $\circ \longrightarrow \circ \longleftarrow \circ$

表現 $V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} U$ の同型類は $\dim V$, $\dim W$, $\dim U$, $\operatorname{rank} f$, $\operatorname{rank} g$, $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$ によって決まる。従って直既約な表現は同型を除いて次の6個で尽くされる。

$$k \to 0 \leftarrow 0 \qquad 0 \to k \leftarrow 0 \qquad 0 \to 0 \leftarrow k$$

$$k \xrightarrow{id} k \leftarrow 0 \qquad 0 \to k \xleftarrow{id} k \qquad k \xrightarrow{id} k \xleftarrow{id} k$$

例4 $\circ \rightrightarrows \circ$

この場合は Kronecker [10] において解決されており、Gantmacher [6] に丁寧に解説されている。直既約な表現は次の様に分類される。

$$k^n \overset{A}{\underset{B}{\rightrightarrows}} k^m$$

(i) $n = m$

- $A = \begin{bmatrix} c & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & c \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad (c \in k)$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $n = m + 1$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $n=m-1$

$$\bullet\ A=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

<u>例5</u> $\circ \rightleftarrows \circ$

この場合表現は $k^n \underset{B}{\overset{A}{\rightleftarrows}} k^m$ という形で考えられるがBAのJordan標準形を考える事により、BAがnon-singularあるいはnilpotentな場合のみ考えればよい事がわかる。どちらの場合も簡単な議論から直既約な表現が決定され、次の様になる。

(i) $n=m$

$$\bullet\ A=\begin{bmatrix} c & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & c \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad (c\in k)$$

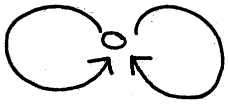
$$\bullet\ A=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $n=m+1$

$$\bullet\ A=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) $n=m-1$

$$\bullet\ A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例6 

この場合直既約な表現の分類はわかっていない。

注意 (i) 例4と例5で直既約な表現が"似ている"事に注意されたい。

(ii) 例5で特に AB が nilpotent ($\Leftrightarrow$ BA が nilpotent) な場合の分類は Kraft–Procesi [9] で応用されている。

§3. Gabriel の定理

再び k は一般の体とする。

Gabriel は [5] においてグラフの表現の概念を確立し、§2の例1, 3の様に、直既約な表現が有限個しかない様なグラフを分類した。これを説明するために、まず記号の準備をする。

記号 $S_0=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ $(i\neq j \Rightarrow \alpha_i\neq\alpha_j)$ のとき

$$\begin{cases} \Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\cdot\alpha_i \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}\cdot\alpha_i \\ \Gamma_+ = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\cdot\alpha_i \qquad (\text{ただし } \mathbb{Z}_+=\{m\in\mathbb{Z} \mid m\geq 0\}) \\ \Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \Gamma_+ \end{cases}$$

とおく。また $(V, f)\in \mathfrak{M}(S, \Omega)$ に対して

$$\dim(V, f) = \sum_{i=1}^{n} (\dim V_{\alpha_i})\cdot \alpha_i \in \Gamma_+$$

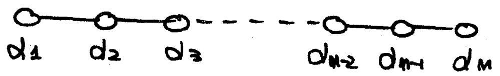
とする。

Gabrielの定理は次の様に述べられる。

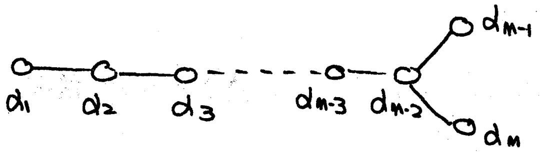
定理1 (Gabriel)

(S, Ω) を連結な有向グラフとする。

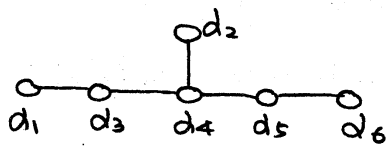
(S, Ω) の直既約な表現が同型を除いて有限個であるためには、S が次のいずれかである事が必要十分である。

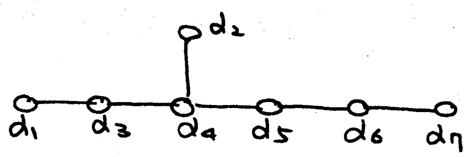
(A_n) 

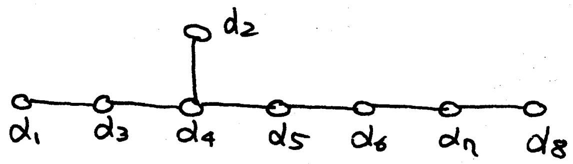
$(n \geqq 1)$

(D_n) 

$(n \geqq 4)$

(E_6) 

(E_7) 

(E_8) 

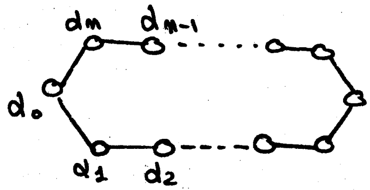
(ii) S が上の $(A_n) \sim (E_8)$ のいずれかであるとする。
Π を base とする各 type の root 系 Δ の正 root の集合を $\Delta_+ \subset \Gamma_+$ とする。S の勝手な orientation Ω に対して
$\{(S,\Omega)$ の直既約な表現の同型類$\}$ と Δ^+ は自然に一対一に対応し、その対応は $(V,f) \mapsto \dim(V,f)$ により与えられる。

Gabriel のもとの証明は、ベクトル空間の次元や線型写像の rank 等に関する面倒な計算を case by case でするものであるが、Bernstein - Gelfand - Ponomarev [1] により、root 系と Weyl 群の理論を使った統一的な別証明が与えられた。尚，草場 [11] に、[1] に沿った明快な解説がある。$(A_n) \sim (E_8)$ の各場合について直既約な表現を構成するために、Bernstein - Gelfand - Ponomarev はいわゆる reflection functor を定義し、これが Weyl 群の単純鏡影に対応するものである事を用いている。この reflection functor は、その後のグラフ表現論でも主要な武器として用いられている。

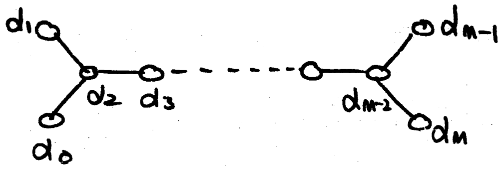
尚 (A_n), (D_n), (E_n) 型でない Dynkin 図形 ((B_n), (C_n), (F_4), (G_2)) の場合にも Dlab - Ringel [2][3] や Tanisaki [16] により、Gabriel の結果の一種の自然な拡張が与えられている。

§4. Gabriel 以後の発展

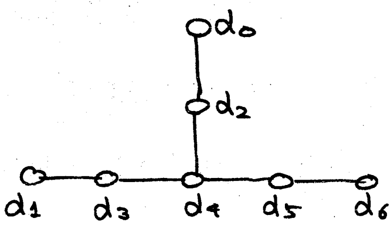
Gabriel の定理に現われた (A_n), (D_n), (E_6), (E_7), (E_8) 型のグラフは、finite type のグラフと呼ばれている。これらの次に直既約な表現を求めるのが易しいのは、次の $(\tilde{A}_n)$〜$(\tilde{E}_8)$ で tame type のグラフと呼ばれている。

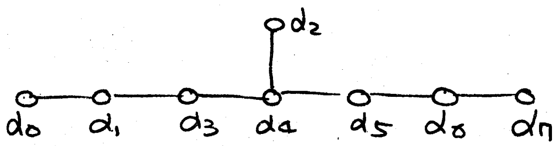
$(\tilde{A}_n)$ 

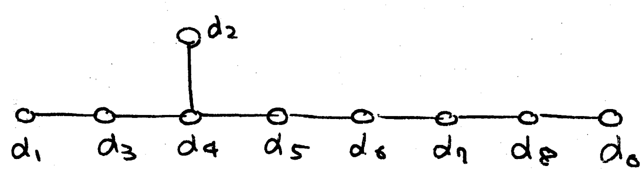
$(n \geqq 0)$

$(\tilde{D}_n)$ 

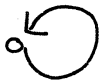
$(n \geqq 4)$

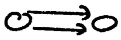
$(\tilde{E}_6)$ 

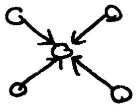
$(\tilde{E}_7)$ 

$(\tilde{E}_8)$ 

例えば

$(\tilde{A}_0)$ 

$(\tilde{A}_1)$  (Kronecker [10])

$(\tilde{D}_4)$  (Gelfand-Ponomarev [7])

等のグラフの表現は以前からわかっていたが、tame type のグラフ全ての表現の決定は Nazarova [12], Donovan-Freislich [4] において独立になされた。

finite type でも tame type でもないグラフは wild type と呼ばれており、wild type のどのグラフに対しても表現の完全な決定はなされていない。現在までのところ wild type のグラフの表現の完全な分類は絶望的とみるのが、general opinion の様である。ただし一般の有向グラフ(S,D)に対して、次の問題①,②は以前から考えられていた。

① $\dim(V,f)=d\in\Gamma_+$ なる直既約な(V,f)が存在するための、dに関する条件は何か？

② さらに各dに対して、$\dim(V,f)=d$ となる直既約な(V,f)の同型類はどの程度あるか？

例えば Bernstein-Gelfand-Ponomarev [1] の最後に幾つか予想が出ている。以下紹介する Kac の結果は、グラフに

loop がないという条件のもとで、これらの問題の答を与えるものである。Kacの結果を述べるために、§5, §6で少し準備をする。

§5. 直既約性の代数群論的言い換え

定義 ($M^d(S,\Omega)$, G^d)

$d=\sum_{i=1}^{m} m_i d_i \in \Gamma_+$ が与えられたとき、(S,Ω)の表現(V,f)であって、$V_{d_i}=k^{m_i}$ となるものの全体を$M^d(S,\Omega)$とかく。$M^d(S,\Omega)$ は自然にk上の有限次元ベクトル空間になる。

また

$$G^d = GL_{m_1}(k)\times\cdots\cdots\times GL_{m_m}(k)/C$$

$$C=\{(t\cdot 1,\dots,t1)\mid t\in k^*\}$$

とおく。

代数群G^dはベクトル空間$M^d(S,\Omega)$に自然に線型に作用し、しかもV, $V'\in M^d(S,\Omega)$がグラフ(S,Ω)の表現として同型であるためには、G^dの作用に関して同じ軌道に含まれる事が必要十分である。kの代数閉包を$\bar{k}$として

$\overline{M^d}(S,\Omega)=M_d(S,\Omega)\otimes_k \bar{k}$, $\overline{G}^d=\prod_{i=1}^{m} GL_{m_i}(\bar{k})/\bar{k}^*(1,\cdots,1)$

とおく。$\overline{M}^d(S,\Omega)$及び$\overline{G}^d$はそれぞれk上定義された代数多様体、代数群で、$M^d(S,\Omega)$及びG^dはそれらのk-有理点

全体とみなせる。

次の命題が成立する事は簡単に確かめられる。

<u>命題</u>　$V \in \mathfrak{M}^d(S,\Omega)$ が直既約であるためには $\overline{G}^d$ の部分群

$(\overline{G}^d)^V = \{g \in \overline{G}^d \mid g \cdot V = V\}$

が自明でない、k-split torus を含まない事が必要十分である。

<u>系</u>　$\mathfrak{M}^d(S,\Omega)$ の中の直既約な表現全体を $\mathfrak{M}^d_{ind}(S,\Omega)$ と書くとき、$\mathfrak{M}^d_{ind}(S,\Omega)$ は constructible set である。（正確には、$\overline{\mathfrak{M}}^d(S,\Omega)$ 中の constructible set の k-有理点全体）

次に $\dim(V,f) = d$ なる直既約な (V,f) の同型類がどの位あるかを示す量を定義しよう。一般に代数群 G が代数多様体 $\mathfrak{X}$ に作用しているとする。X が $\mathfrak{X}$ に含まれる G-不変な constructible set とすると Rosenlicht の定理 [14] により次の事がわかる。

<u>命題</u>　X の locally closed subset $X_1, \cdots, X_m$ $(m < +\infty)$ が存在して $X = \coprod_{i=1}^{m} X_i$ かつ X_i は G-不変でしかも geometric quotient X_i/G が存在する。また $\mu(X) = \max_{i=1,\cdots,m} \dim(X_i/G)$ は上の分解のとり方によらずに決まる。

$\mathfrak{M}^d_{ind}(S,\Omega)$ は constructible set でかつ G-不変なので

上の命題の様な分解が存在する。

<u>記号</u> $\mathcal{M}_d(S,\Omega) := \mathcal{M}(\mathfrak{M}^d_{ind}(S,\Omega))$

<u>注意</u> 上の事からわかる様に、グラフの表現を決定する問題は、代数群の表現空間を軌道分解する問題と密接に結びついている。G^dの表現空間である$\mathfrak{M}^d(S,\Omega)$はグラフ表現論との関連を離れても興味深い空間で、例えばSがcycleを含まないときには、Sato－Kimura [15]の意味での概均質ベクトル空間になっている。(ただし既約ではない。) Kacはこの空間の上で不変式論を展開する事を提唱し、reflection functorの一般化 (Sato－Kimura [15] の castling transformation の一般化にもなっている。) を使った計算をしているが、あまり成功はしてない様である。なお最近 Ringel [13] においてグラフが tame type の場合に幾つかの結果が得られている。

§6. <u>Kac－Moody 型無限 root 系</u>

以下次の仮定をおく。

(☆) グラフSは loop (両端の頂点が一致する様な辺) を含まない

定義 グラフSに対して次の様にして定義された行列 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ をSに付随する対称なCartan行列という。

$$\begin{cases} a_{ii}=2 \\ a_{ij}=a_{ji}=-(\alpha_i と \alpha_j を結ぶ辺の数) \quad (i\neq j) \end{cases}$$

Kacの定理を述べるために、Cartan行列AをもつKac-Moody型Lie環に対応する無限root系の概念を必要とする。これしには本講究録中の小池和彦氏の報告、またLie環論を使わない公理的定義については、同じく森田純氏の報告を参照されたい。ここではその公理的定義及び基本的性質を必要最小限な範囲で述べておく。

定義 $\Gamma=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\cdot\alpha_i$, $\Gamma_+=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_+\cdot\alpha_i$, $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ とする。このとき、次の性質(i)(ii)(iii)を満たす Γ_+ の部分集合 Δ_+ がただ一つ存在し、これをCartan行列Aに対応するroot系という。

(i) $\Pi\subset\Delta_+\subset\Gamma_+$, $2\alpha_i\notin\Delta_+$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(ii) $\alpha=\sum_j k_j\alpha_j\in\Delta_+-\{\alpha_i\}$ に対して $\exists p, \exists q\in\mathbb{Z}_+$ が存在して

- $p-q=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_j$
- $\alpha+k\alpha_i\in\Delta_+ \iff -p\leqq k\leqq q$

(iii) $\forall\alpha\in\Delta^+-\Pi$ に対して $\exists\alpha_i\in\Pi$ をとると、$\alpha-\alpha_i\in\Delta_+$

定義 Tits form と呼ばれるΓ上の2次形式を

$(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{1}{2} a_{ij}$ で定義する。またΓ上の直交鏡影r_iを

$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i$ により定義し $W = \langle r_i \mid i = 1, \cdots, m \rangle$ を

Weyl群という。

記号

$$\Delta_+^{re} = \left\{ \alpha \in \Gamma_+ \;\middle|\; {}^{\exists} i_1, \cdots, {}^{\exists} i_k \text{ s.t. } r_{i_k} \cdots r_{i_1}(\alpha) \in \Pi,\ \underset{(1 \leqq s < k)}{r_{i_s} \cdots r_{i_1}(\alpha) \in \Gamma_+ - \Pi} \right\}$$

$$M = \left\{ \alpha = \sum k_i \alpha_i \in \Gamma_+ \;\middle|\; \sum_j a_{ij} k_j \leqq 0 \ ({}^{\forall} i) \text{ かつ } \{\alpha_i \mid k_i \neq 0\} \text{ は}\Sigma\text{の連結部分グラフ} \right\}$$

$$\Delta_+^{im} = \bigcup_{w \in W} w(M)$$

命題

(i) $\Delta_+ = \Delta_+^{re} \cup \Delta_+^{im}$ (disjoint union)

(ii) $\alpha \in \Delta_+$ に対して $\alpha \in \Delta_+^{re} \Leftrightarrow (\alpha, \alpha) = 1$

$\alpha \in \Delta_+^{im} \Leftrightarrow (\alpha, \alpha) \leqq 0$

§7. Kac の定理

定理2 (Kac)

(S, Ω) が仮定(☆)を満たす有向グラフであるとする。

前節の様にして Cartan 行列 A 及び、正 root 系 Δ_+ を定める。

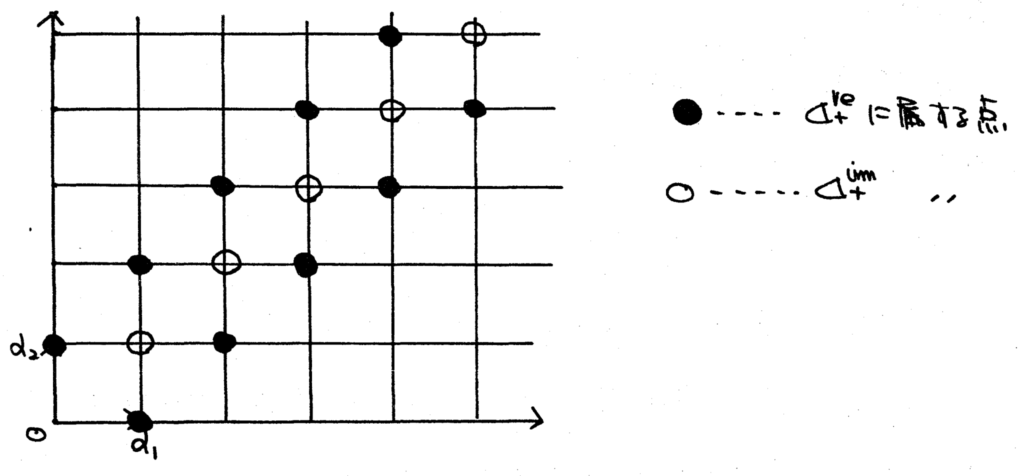
このとき

(i) $\alpha\in\Gamma_+$ に対して、$\dim(V,f)=\alpha\in\Gamma_+$ となる直既約な表現 (V,f) が存在するためには、$\alpha\in\Delta_+$ となる事が必要十分である。

(ii) $\alpha\in\Delta_+^{re}$ のとき $\dim(V,f)=\alpha$ となる直既約な表現 (V,f) が同型を除いて唯一つ存在する。

(iii) $\alpha\in\Delta_+^{im}$ のとき $\mu_\alpha(S,\Omega)\geq 1-(\alpha,\alpha)\geq 1$ である。従って特に k が代数閉体ならば、$\dim(V,f)=\alpha$ となる直既約な (V,f) の同型類は、(連続パラメーターを含んで)無限個ある。

例　S が $\circ\!=\!\circ$ で与えられるとき、その Cartan 行列は $A=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$ となる。このとき Δ_+ は次の図で与えられる。



S に対する orientation Ω の与え方は、次の2種類

(a) $\circ\rightrightarrows\circ$　　(b) $\circ\leftleftarrows\circ$

があるが、いずれの場合も定理の成立している事が§2の

例4，5からわかる。さらにこの場合 $\alpha\in\Delta_+^{im}$ のとき $\mu_\alpha(S,\Omega)=1-(\alpha,\alpha)=1$ である。（実は一般に tame type のときは，$\alpha\in\Delta_+^{im}$ に対して $\mu_\alpha(S,\Omega)=1-(\alpha,\alpha)=1$ である事が知られている。）

はじめの Kac の論文の preprint では，定理2は次の予想を modulo として ch(k)=0 のときにしか証明されていなかった。

<u>予想</u>　ch k=0 かつ k は代数閉体とする。$G\subset Gl(V)$ が k 上の代数群であるとき

$$V_0=\{v\in V \mid G^v \text{ は自明でない torus を含まない}\}$$

とおくと，

$$\mu(V_0)=\mu((V^*)_0)$$

である。

この予想は現在でも解決されてない。しかし雑誌に出た論文では preprint の方法とは別の方法で定理2が証明されている。それは次の様な方針で行なわれる。

まず $k=\mathbb{F}_q$（有限体）の場合に定理2をもっと精密化して証明する。k が一般の標数 p>0 の体のときは適当な specialization により有限体の場合に帰着させる。標数0の

体のときは、mod p の reduction で標数 p の場合に帰着させる。グラフの表現は、素体上有限生成な体の上で定義されているので、specialization あるいは mod p の reduction という事が意味をもつのである。くわしくは原論文を参照されたい。

参考文献

[1] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev : Coxeter functors and Gabriel's theorem. Uspechi Mat. Nauk 29 (1973) 19—33

[2] V. Dlab, C.M. Ringel : On algebras of finite representation type. J. Algebra 33 (1975) 306—394

[3] V. Dlab, C.M. Ringel : Indecomposable representations of graphs and algebras. Memoirs of A.M.S. 173 (1976)

[4] P. Donovan, M.R. Freislich : The representation theory of finite graphs and associated algebras. Carleton Math. Lec. Notes 5 (1973)

[5] P. Gabriel : Unzerlegbare Darstellungen I.

Manuscripta Math. 6 (1972) 71–103

[6] F. R. Gantmacher : The theory of matrices.

Moscow (1953) 英訳 New York (1959)

[7] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev : Problems of linear Algebras and classification of quadruples of sub-spaces in a finite-dimensional vector space.

Coll. Math. Soc. Bolyai Tihany (Hungary) 5 (1970) 163–237

[8] V. G. Kac : Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory.

Inventiones math. 56, 57–92 (1980)

[9] H. Kraft, C. Procesi : Closures of conjugacy classes of matrices are normal.

Inventiones math. 53, 227–247 (1979)

[10] L. Kronecker : Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen.

Sitzungsber. Akad. Berlin 763–776 (1 0)

[11] 草場公邦 : 行列特論

裳華房 (1979)

[12] L. A. Nazarova : Representations of quadruples of infinite type.

Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 37 (1973) 752-791

[13] C. M. Ringel : The rational invariants of the tame quivers.

Inventiones Math. 58, 217-239 (1980)

[14] Rosenlicht : A remark on quotient spaces.

An. Acad. Brasil ciemc. 35 (1963) 487-489

[15] M. Sato, T. Kimura : A classification of irreducible prehomogeneous spaces and their relative invariants.

Nagoya Math. J. 65 (1977) 1-155

[16] T. Tanisaki : Foldings of root systems and Gabriel's theorem.

To appear in Tsukuba J. Math.