数理解析研究所講究録
第 394 巻 1980 年 99-116

Invariant theory for generalized root systems
(Looijenga の論文(preprint) の紹介)

東大 理　　徳山 豪

generalized Cartan 行列 $N=(n_{ij})_{i=1\cdots \ell}$ に対し、有限次元実ベクトル空間 V と、$B=\{\alpha_1,\cdots \alpha_\ell\}\subset V$、$B^\vee=\{\alpha_1^\vee,\cdots \alpha_\ell^\vee\}\subset V^*$ を、それぞれ一次独立かつ $\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle=n_{ij}$ であるように定義する。この時、V 中の reflection $s_{\alpha_i}: s_{\alpha_i}(x)=x-(x,\alpha_i^\vee)\alpha_i$ たちによって生成される $Aut(V)$ の部分群 W を、generalized Weyl group と呼ぶ。これは、N に対応する Kac-Moody Lie 環の Weyl 群となる。今、有限次元半単純 Lie 環の Weyl 群に於ける不変式論の拡張をこの W で考えてみよう。 W は(無限)coxeter 群である。そこで、有限次元 Weyl 群の不変式論に於ける Chevalley の定理を適用するために、次の様な affine space Ω を作る。即ち、W の fundamental chamber C を取り、$I=W\cdot C$ を C の W-orbit とする。この時、$\Omega:=\{x+iy \mid x\in V,\ y\in \mathring{I}\}$。 今、$W$ を $Q=\mathbb{Z}\cdot B$ による translation で拡大し、$\widehat{W}=t(Q)\cdot W$ を作ると、$\widehat{W}$ は Ω 上 affine Weyl 群として properly discontinuous に働き、$\Omega/\widehat{W}$ は Complex manifo-

-ld の構造を持つ。

よって、この $\Omega/\hat{W}$ の関数環は、W の exponential type の不変式環と見なせる訳であるが、Looijenga はこの論文で、Ω に低次元の analytic manifold を付け加える事によって $\hat{\Omega}/\hat{W}$ が stein manifold になるような $\hat{\Omega}$ を構成している。この構成は又、I 全体への W の作用に対する exponential type の不変式論に対応している。（W が Euclidean type ならば theta 不変式に対応している。）

この結果は、ある種の singularity の性質を導き出しており、Looijenga は本文中でこの方面への次回の論文の予告をしている。

ここでは、主に $\hat{\Omega}$ の構成について述べる。

§1. W と、その Tits cone I の性質

Def 1.1. $N=(n_{ij})_{i,j=1\cdots l}$ が generalized Cartan 行列 (GCM) とは、「① $n_{ii}=2$ ② $n_{ij}\in\mathbb{Z}_-$ if $i\neq j$ ③ $n_{ij}=0\Leftrightarrow n_{ji}=0$」

この N に対し、序に述べた (V, B) の pair を、N の root basis と言う。今、$(V,B)=(V_1\times V_2,\ B_1\times\{0\}\cup\{0\}\times B_2)$ で、かつ (V_1,B_1)、(V_2,B_2) がそれぞれある GCM の root basis とできる時、(V, B) を可約、そうでない時既約と言う。

対応する (generalized) Weyl 群を W と書く。

$C = \{x \in V, \langle x, \alpha_i^\vee \rangle > 0 \text{ for } {}^\forall i\}$ を W の fundamental Weyl Chamber. その W-orbit $I := W \cdot C$ を Tits cone と呼ぶ。I 中で C は W の基本領域となる。

Prop 1.1 $(W, \{s_{\alpha_i} | \alpha_i \in B\})$ は Coxeter 系となる。

Prop 1.2 I は convex cone。, $I = V \Leftrightarrow W$ は有限群

Def 1.2 B の部分集合 X に対して.

$F_X := \{x \in V \mid \langle x, \alpha^\vee \rangle = 0 \text{ for } {}^\forall \alpha \in X, \langle x, \beta^\vee \rangle > 0 \text{ for } {}^\forall \beta \in B - X\}$

を基本面分と言い.

$F = wF_X$ $({}^\exists w \in W, {}^\exists X < B)$ なる形の V の部分集合 F を面分と言う。

又. $V_X := \sum_{\alpha \in X} \mathbb{R}\alpha \subset V$

$W_X := \langle s_\alpha \mid \alpha \in X \rangle \subset W$

とおく。以下. 面分の性質を掲げる.

Prop 1.3 F_X の W 中の stabilizer は W_X

Prop 1.4. $F' = w'F_{X'} \subset \overline{wF_X} = \overline{F} \Leftrightarrow wW_X < w'W_{X'}$

Prop 1.5. I の内点全体を $\mathring{I}$ とすると、$\mathring{I}$ は、I の面分たちのうちで、有限な stabilizer を持つ面分たちの和集合となる。

上の Proposition により、W が $\mathring{I}$ に properly discontinuous に働く事が示される。

I の面分への分割と、面分たちの間の closure relation を、I の Tits building 構造と言う。次の章では、I と同じ Tits building 構造を持ち $\mathring{I}$ を含む W-space $\hat{I}$ で、$\hat{I}/W$ が locally compact になるものを構成する。

§2. $\hat{I}$ の構成

Def 2.1. $N=(n_{ij})$ に対応する Weyl 群 W の Dynkin 図形とは、B の元を頂点とし、2頂点 α, β 間には、$\alpha\to\beta$ 方向に $\langle\alpha,\beta^\vee\rangle$ 本、$\beta\to\alpha$ 方向には $\langle\beta,\alpha^\vee\rangle$ 本の向きのついた辺を書いたものと定義する。

Def 2.2. B の部分集合 X が special subset とは、

$$\begin{cases} X=\phi \text{ 又は} \\ X \text{ の Dynkin 図形(即ち、} B \text{ の Dynkin 図形の } X \text{ への制限)の} \end{cases}$$

Connected component に対応する Weyl 群が全て無限群のいずれかであることを言う。

Def 2.3　Bの部分集合Xに対し、

$X^* = \{\alpha \in B \mid \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \ \text{for} \ {}^\forall \beta \in X\}$

Def 2.4　Vのsubspace V'がspecial subspaceであるとは、Bのspecial subset Xと、Wの元wが存在して、

$V' = wV_X$ となる事をいう。

Prop 2.1　Xがspecial subsetなら、V_XのW中のstabilizerは、$W_{X \cup X^*}$ $(= W_X \times W_{X^*})$

Def 2.5

今、special subset Xに対し次の様にW_{X^*} space $\mathring{I}(X)$を定義する。

Xがspecial subsetならば、natural map

$\pi_X : V \longrightarrow V/V_X$ のX^*上への制限 $\varphi : X^* \longrightarrow V/V_X$

を考えると、像$\varphi(X^*)$の元はV/V_X中で線型独立である。

$\alpha^\vee \in (X^*)^\vee$ はV_X上で0なので、natural map

$(X^*)^\vee \xrightarrow{\varphi^\vee} (V/V_X)^\vee$ が定義できる。しかも、像$\varphi^\vee((X^*)^\vee)$は$(V/V_X)^\vee$中で線形独立である。よって、X^*はV/V_Xの上の1つのroot basisを定める。

$\pi_X : V \longrightarrow V/V_X$ は、Iを$\pi_X(I) = \pi_X(I_{X^*})$に写し、

これは$(V/V_X, \pi_X(X^*))$のTits coneになる。

$I(x) := \pi_x(I)$ とおくと

$\mathring{I}(x) = \pi_x(I) \cap \pi_x(\mathring{I}_{x^*}) = \pi_x(I \cap \mathring{I}_{x^*})$

$I(x)$の面分を、$\pi_x(I_{x^*})$の面分と$I(x)$とのintersection.
$\mathring{I}(x)$の面分を、$\pi_x(I_{x^*})$の面分と$\mathring{I}(x)$とのintersection
と定義してやると、次が言える。

Lemma　$\pi_x : V \longrightarrow V/V_x$ は、I (resp. $\mathring{I}$) の面分を$I(x)$ (resp. $\mathring{I}(x)$) の面分に写し、$\mathring{I}(x)$の任意の面分は、$\pi_x(F)$; $F < St(F_{x^*})$の形に一意的に書ける。

よって特に

Corollary　$\pi_x(\mathring{I}) = \mathring{I}(x)$

上のCorによって、次の様にして、Vのspecial subspace V'に対して、$I(V')$が定義できる。

Def 2.6　$I(V') := \pi_{V'}(I)$, $\mathring{I}(V') := \pi_{V'}(\mathring{I})$
但し、$\pi_{V'} : V \longrightarrow V/V'$ はnatural map.

(注) よって $I(x) = I(V_x)$ 　$\mathring{I}(x) = \mathring{I}(V_x)$

$\hat{I}(X)$と同様に、$\hat{I}(V')$の面分を、$\hat{I}$の面分のπ_Xによる像とすると、$\hat{I}(V')$も面分分解されている。

$V'' \subset V' \subset V$　V'', V' : special とする時、natural map
$\pi^{V''}_{V'} : V/V'' \longrightarrow V/V'$ は、$I(V'')$(resp. $\hat{I}(V'')$)を
$I(V')$ resp($\hat{I}(V')$) に写す。

この時、$\hat{I} = \bigcup \hat{I}(V')$　$V' \subset V$: special
なるdisjoint unionを作る。すると、Wは$\hat{I}$に作用する。
即ち、$\hat{I}(V')$の元xV'と、$w \in W$に対し、$w\circ(xV') := wx(wV')$
として作用させる。　$\hat{I}(wV')$
以下、こうして作った$\hat{I}$がIと同じbuilding構造を持つようにできる事を示そう。

Lemma　I中の任意の面分Fに対し、$\hat{I}$中の面分$\hat{F}$でFと$\hat{F}$は同一のW-stabilizerを持つものが一意的に存在する。

(証明)　Bの部分集合Zに対し、F_Zに対応する$\hat{F}_Z$を作る。
$Z = X \cup Y$; XはZのmaximal sub-set とすると、$Y \subset X^*$、
W_Yは有限群、$\pi_X(F_Y)$は、よってProp1.5から$\hat{I}(X)$の面分である。
これを$\hat{F}_Z$と書くと、$\hat{F}_Z$のW_{X^*} stabilizerは、W_Y。よって、

$\hat{F}_Z$のW-stabilizer $= W_X \times W_Y = W_Z = F_Z$のW-stabilizer。
一般の面分$F = wF_Z$に対しては$\hat{F} = w\hat{F}_Z$としてやる。
明らかに$F \longrightarrow \hat{F}$なる対応はbijectiveでW-不変 //

$\hat{I}$のtopologyを定義しよう。

Def 2.7 $\hat{I}$の部分集合Uが、点$x \in \mathring{I}(V')$の近傍であるとは、Uの部分集合U'で、次の性質をもつものが存在することをいう。

1) $x \in U'$
2) $U' \cap \mathring{I}$は、$\mathring{I}$のopen convex setで、xのstabilizer W_xで不変.
3) $U' \cap \mathring{I}(V'') = \pi_{V''}(U' \cap \mathring{I})$ if $V'' \subset V'$

Lemma

① 上のUたちは近傍系の公理を満たす。
② 上のtopologyで、Wの$\hat{I}$への作用はcontinuousになる。
③ $\mathring{I}(V')$のclosureは$\bigcup_{V' \subset V''} \mathring{I}(V'')$である。

すると、Iと$\hat{I}$のbuilding構造は同じになる。即ち、

Prop 2.2.
$\hat{F}_1 \cap (\hat{F}_2) \neq \phi \Leftrightarrow F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow \hat{F}_1 \subset (\hat{F}_2)$

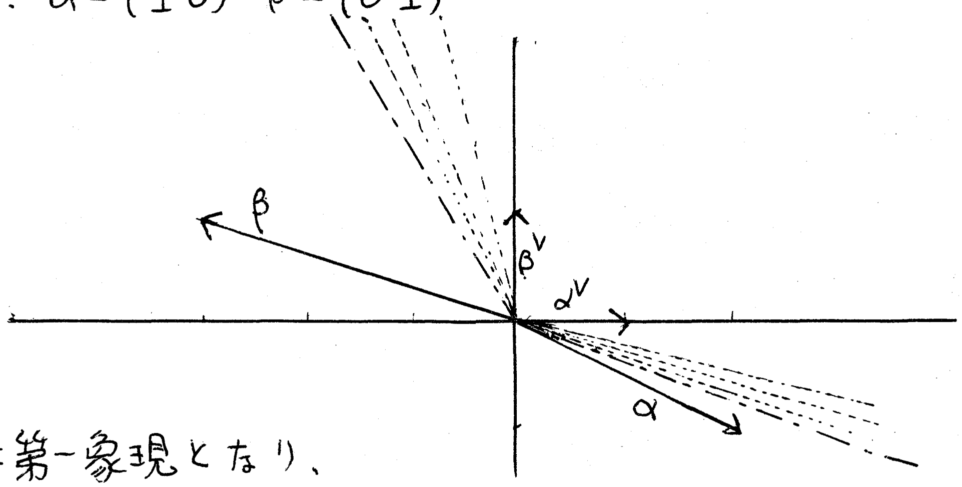
topological space $\hat{I}/W$ について、次の性質が証明できる。

Prop 2.3 $\hat{I}/W$ は第二可算性を持つ、Hausdorff, locally compact space である。

今までの事を2次元の実例で示そう。

$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $V = \mathbb{R}^2$, $B = (\alpha, \beta)$

$\alpha = (2, -2)$, $\beta = (-4, 2)$ V中の内積によってVとV^*を同一視して、$\alpha^\vee = (1\ 0)$ $\beta^\vee = (0\ 1)$



Cは第一象限となり、

$\mathring{I}$ は $\begin{cases} \alpha^\vee(x) > (-2+\sqrt{2})\beta^\vee(x) \\ \text{かつ}\ \alpha^\vee(x) > (-2-\sqrt{2})\beta^\vee(x) \end{cases}$ なる領域。
(破線の内側)

つまり $2\alpha^\vee(x)^2 + 2\cdot 4\cdot \alpha^\vee(x)\beta^\vee(x) + 4\beta^\vee(x)^2 > 0$ なる領域の内で(1,1)を含む連結部分である。

$I = \mathring{I} \cup \{(0,0)\}$

1次元の面分は原点を通るI中の半直線。(点線はその一例)

これら一次元の面分は可算無限大本ある。

この時. Bのspecial sub setは Bと, ϕ である。

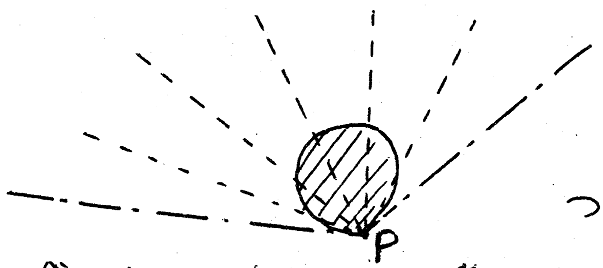
$\mathring{I}(\phi)=\mathring{I}$　　$\mathring{I}(B)=\{(0.0)\}$ 一点 と見なせる.

$\hat{I}$を構成すると. 集合としては、

$\hat{I}=\mathring{I}(\phi)\cup\mathring{I}(B)=\mathring{I}\cup P$　　P: 1点　　であり.

topologyは. Pを$\mathring{I}$の無限遠点として付けたものであるが.

そのPの回りでの近傍の基は下図の様なもの



（但し破線は I の境界
点線は1次元の面分.）

つまり. I の境界との交わり

がPだけであるような集合がPの近傍になりうる。

（注）よって.この場合は$\hat{I}$自身がlocally compact。但しこれは一般には言えない。

次に. この$\hat{I}$のcomplex analogueを作る.

§3. $\hat{\Omega}$の構成

Def 3.1　　Bのspecial subset X に対して. $\Omega(X)$を、次のように定義する。$\Omega(X):=\{x+iy\in V_{\mathbb{C}}/(V_X)_{\mathbb{C}} : x\in V/V_X,\ y\in\mathring{I}(X)\}$

すると. $\Omega(X)$はW_X*不変。(作用は $w\cdot(x+iy)=w\cdot x+iw\cdot y$)

$Q(X) = \mathbb{Z}B/\mathbb{Z}X$ と定義する。ここで、$Q(X)$ の元 γ に対し、V/V_X 中の translation $t(\gamma) : V/V_X \longrightarrow V/V_X$ を、$t(\gamma)z = z+\gamma$ で定義する。

この translation が作る群を $t(Q(X))$ と書く。今、$t(Q(X))$ を $\Omega(X)$ の実成分に働かせる事により、$\Omega(X)$ 上に次の半直積 $\widetilde{W}_X := t(Q(X))\cdot W_{X^*}$ が作用する。

この時、affine Weyl 群の性質により、次のことが示される。

Lemma. $\Omega(X)$ の一点 ω の $\widetilde{W}_X$-stabilizer は有限鏡映群となる。かつ、これが non-trivial group になるには、$W_{X^*}\cdot X^*$ の元 α が存在して、$\langle \omega, \alpha^\vee \rangle$ が整数になるようにできる事が必要十分条件。

上の Lemma により、$\Omega(X)$ に Chevalley の定理を適用でき、$M(X) := \Omega(X)/\widetilde{W}_X$ は cannonical に analytic manifold となる。

$\Omega = \Omega(\phi)$, $\widetilde{W} = \widetilde{W}_\phi$ とすると、$M = \Omega/\widetilde{W}$ は W の $\hat{I}$ への作用を記述している。そこで、I から $\hat{I}$ を構成した方針に従って、Ω に低次元の manifold を添加することにより $\hat{\Omega}$ を作り、W の $\hat{I}$ への作用、即ち I への作用を記述する stein manifold

$\widehat{M}=\widehat{\Omega}/\widehat{W}$を構成する。

Def 3.2 Vのspecial subset V'に対し、
$\Omega(V'):=\{\omega\in V_{\mathbb{C}}/V'_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Im}(\omega)\in \mathring{I}(V')\}$

Def 3.3. $\widehat{\Omega}=\bigcup\Omega(V')$ V': special subspace

すると、$\widehat{W}$は$\widehat{\Omega}$上自然に作用する。

今、cannonical projection $\widehat{\Omega}\xrightarrow{\mathrm{Im}}\widehat{I}$ と、$\widehat{W}\longrightarrow W$ に従って、projection $\widehat{\Omega}/\widehat{W}\xrightarrow{\mathrm{Im}}\widehat{I}/W$ が引きおこされる。このとき、$S(x)=\mathring{I}(x)/W_{x^*}$とおくと、$\widehat{I}/W=\bigcup S(x)$ x: specialとなるので、同様に$\widehat{M}=\bigcup M(x)$ x: special とstratifyできる。明らかに$M(x)\xrightarrow{\mathrm{Im}}S(x)$である。

$\widehat{\Omega}$のtopologyを定義しよう。

Def 3.4 $\widehat{\Omega}$の部分集合Uが、点$\omega\in\Omega(V')$の近傍であるとは、Uの部分集合U'で、次の性質を持つものが存在することを言う。

1) $\omega\in U'$

2) $U'\cap\Omega$は、Ωの、$\widehat{W}_\omega$不変なopen convex subset

(但し$\widehat{W}_\omega$は、ωの$\widehat{W}$-stabilizer)

3) $U' \cap \Omega(V'') = \pi_{V''}(U' \cap \Omega)$ if $V'' < V'$

すると. 以下のことが成り立つ.

Prop 3.1 $\hat{M} = \hat{\Omega}/\hat{W}$ は. 第二可算性を持つ Hausdorff. locally compact space である。

Th. (main theorem)

$\hat{M} = \hat{\Omega}/\hat{W}$ は. cannonical に Stein manifold になり. $M(X)$ の上に analytic structure を induce する。

$M(X)$ は. ϕ でない X に対しては. $\hat{M}$ 中 codimension が 2 より大きく.

Corollary $\hat{M}$ は. M の holomorphic hull となる。

が示される。

§4. Main Theorem の証明

$\hat{M}$ 上の関数環を考えてみよう。

Def $P := \{x \in I, \langle x, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ for $^\forall \alpha \in B\}$ を W の weight と言う。 $P_+ := P \cap \overline{C}$, $P_{++} := P \cap C$

$P^\vee = \{x \in I^\vee, \langle \alpha, x \rangle \in \mathbb{Z}$ for $^\forall \alpha \in B.\}$

$P_+^\vee = P^\vee \cap \overline{C}^\vee$, $P_{++}^\vee = P^\vee \cap C^\vee$ とする.

この時. 次の proposition が成り立つ.

Prop 4.1　$P_+^\vee$ の元 p と、$\Omega(V')$ の点 ω に対し、次の級数 $S_p(\omega)$ を定義すると、これは $\Omega(V')$ 上広義一様収束する。

$$S_p(\omega) = \sum_{p'\in W\{p\},\ p'|V'=0} \exp(-2\pi i \langle \omega, p' \rangle)$$

Prop 4.2　$S_p(\omega)$ は、$\hat{\Omega}$ 上 continuous で、$\hat{W}$-不変な関数である。

今、$P_+^\vee$ すべての p に関して S_p を考えると、次が成り立つ。

Prop 4.3　$\{S_p \mid p \in P_+^\vee\}$ は、$\hat{\Omega}$ の $\hat{W}$-orbit を分離する。

以上の事により、定理の大部分が言える。即ち、
$\mathcal{O}$ を $\hat{M}$ 上の連続関数で、$M(x)$ に制限すると各々 analytic になる関数のなす sheaf とする。今、M の open subset U への $\mathcal{O}$ の section を、U 上の holomorphic function と呼ぶと、S_p は、$\hat{M}$ 上の holomorphic function $\underline{S_p}$ を自然に定義する。
よって、今、次のことが言えている。
(i)　$\overline{M(x)} = \bigcup_{x \subset x'} M(x')$
(ii)　$\hat{M}$ のすべての点の近傍系の基として、M との intersection が connected なものがとれる。

(iii) Mの任意の点は近傍Uで、$\mathcal{O}(U)$がUの点を分離するようなものを持つ。

又、次の事もすぐに判る。

(iv) $M(X)$上への$\mathcal{O}$のrestrictionは、$M(X)$のstructure sheafをinduceする。

$\hat{M}$は、第二可算性を持つHausdorff, locally compact spaceなので、以上の事から次のpropositionが示される。

Prop 4.4 ringed space $(\hat{M}, \mathcal{O})$は、normal analytic spaceで、分割 $\hat{M} = \bigcup M(X)$; X: special subset, は、Mのanalytic stratificationとなっている。

ここで、次のLemmaを示す。$p: \hat{\Omega} \longrightarrow \hat{M} = \hat{\Omega}/\hat{W}$ natural map.

Lemma. Vのcompact convex set K'と、$\overline{C} \cap \mathring{I}$のcompact convex subset K''に対し、$K = K' + iK''$とおく。$\hat{\Omega}$のsubset $\hat{K}$を、$\hat{K} \cap \Omega(V') = \pi_{V'}(H(\hat{W} \cdot K))$で定義する。但し、$H(\hat{W} \cdot K)$は、$\hat{W} \cdot K$のconvex hull。すると、$\hat{\Omega} - \hat{K}$の各点$\omega$に対して、$p^*\mathcal{O}$のあるsection fがあって、$|f(\omega)| > \sup\{|f(\omega')| \ \omega' \in \hat{K}\}$。

ところが、$\hat{M}$の任意のcompact subset Lに対して、上のLemmaで作ったKで、かつ$p(\hat{K})$がLを含むものがある。よって$\hat{M}$はholomorphic convexである。即ち、次のcorollaryが示された。

Corollary　　$(\hat{M}, \mathcal{O})$はStein spaceである。

よって、$\hat{M}$の非特異性を示せば定理が証明される。

WがEuclideanとは、対応するGCMがEuclidean typeである事を言う。(c.f 小池和彦氏の報告)

WがEuclideanでない時に、$|B|$によるinductionにより、$\hat{M}$の非特異性を示そう。

$\hat{M}$中で、$M(B)$は最小次元の唯一のstratumである。従って、inductionの仮定により、$\hat{M}-M(B)$は非特異である。よって、$\hat{M}$が$M(B)$の任意の点ωで非特異ならばよい。

$\mathcal{O}'_\omega$を、$\{S_p\ (p\in P^\vee_+)\}$で生成された、$\mathcal{O}_\omega$のsub-ringであるとすると、$\mathcal{O}'_\omega$はωの適当な近傍の各点を分離する。従って、$\mathcal{O}'_\omega$がregular ringである事を示せば十分である。

さて、$\check{P}_B = \{p\in V^* \mid \langle\alpha, p\rangle = 0 \text{ for } {}^\forall\alpha\in B\}$とおき、$A_0$を、$\{S_p : p\in \check{P}_B\}$により生成された、$\mathcal{O}'_\omega$のsub-algebraとする。$A_0$の、$\omega$で定義されたmaximal idealを$m_0$とし、$m_0$による$A_0$の完備化を、$\hat{A}_0$

と書く。今、$\{S_p ; p\in P_+^\vee - F_B^\vee\}$ と m_0 で生成された ideal は $\mathcal{O}_{\omega}'$ の maximal-ideal になるが、これによる $\mathcal{O}_{\omega}'$ の完備化を $\widehat{\mathcal{O}}_{\omega}'$ と書こう。すると、exponential type の不変式論の拡張により、次の proposition が得られる。

Prop 4.5　W を non Euclidean type の Weyl 群とすると、上の $\mathcal{O}_{\omega}'$ について、次が言える。

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\omega'} = \widehat{A}_0[[x_1 \cdots x_l]] \qquad l = |B|$$

$\widehat{A}_0$ は regular であるから、特に、$\mathcal{O}_{\omega}'$ が regular である事が判った。W が Euclidean の時には別に考察して、次が示される。

prop 4.6. Generalized Weyl group W に対して作った $\widehat{M}$ は、一般に非特異である。

よって定理が示された。

§5　singularity への応用

今、$W \xrightarrow{\det} \{\pm 1\}$ の kernel を、W_+ と書く。この W_+ に対して、$\widehat{W}_+ := \mathfrak{T}(Q)\cdot W_+$ と定義すると、これは Ω と $\widehat{\Omega}$ に作用する。

$M_+ := \Omega/\widehat{W}_+$, $\widehat{M}_+ = \widehat{\Omega}/\widehat{W}_+$ と定義する。

この時、$\widehat{M}_+ \longrightarrow \widehat{M}$ (cannonical map) は、2層の branched covering となり、$\widehat{M}_+$ は Stein space の構造を持つ。$\widehat{M}_+$ の singularity

について考察しよう。

$\hat{M}_+$ の関数環 $\mathcal{O}_+$ は、W の反不変式環と思えるが、$\hat{M}$ の関数環 $\mathcal{O}$ 上で、一つの生成元 J によって自由生成される。

今、$\rho_0^\vee$ を B のすべての元 α に対して $\langle \alpha, \rho_0^\vee \rangle = 1$ となるような $\rho^\vee$ の一つの元として、これを取り fix する。

Δ を $W \cdot B$ とし、この元を root (real root と呼ぶこともある。) と呼び、Δ の元で $C^\vee$ 上 positive なもの全体を Δ_+ と書く。この時、生成元 J として次のものがとれる。

$$J(\omega) := \exp(-2\pi i \langle \omega, \rho_0^\vee \rangle) \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \exp(2\pi i \langle \omega, \alpha^\vee \rangle))$$

この時、branched covering $\hat{M}_+ \to M$ の discriminant D は、J^2 で定義される。

例 $N = \begin{pmatrix} 2 & -u \\ -v & 2 \end{pmatrix}$、$uv > 4$ とする。$M(B) = \{*\} = 1$ 点。
この時、$\hat{M}_+$ は M 上、次の方程式で与えられる。

$Z^2 = X_1^{u+2} + X_1^2 X_2^2 + X_2^{v+2}$ (Mod [$\max(u+2, v+2)$ 次以上の項])

変数変換により、これは Cusp singularity $T_{2, u+2, v+2}$ で、定義式は $Z^2 = X_1^{u+2} + X_1^2 X_2^2 + X_2^{v+2}$ であることが判る。