

Lobachevsky空間の discrete group について  
— Vinberg の一連の論文の紹介 (I) —

東大理学部 植野義明

§ 1. Introduction

よく知られているように、ユークリッド空間  $E^n$  における鏡映で生成された discrete group は、非負対称行列  $A = (a_{ij})$  但し、 $a_{ii} = 1$ ,  $a_{ij} = -\cos \pi/m_{ij}$  ( $i \neq j$ ),  $m_{ij} = 2, 3, \dots, \infty$ , によって特徴付けることができる。この条件を充す行列は Coxeter [1] で完全に数え上げられている。

そこで次に、定曲率の単連結空間、すなわち、ユークリッド空間  $E^n$ , 球面  $S^n$ , および Lobachevsky 空間  $\Lambda^n$  における鏡映で生成される群を考えるのは自然である。まず、Vinberg は次の事実に着目する：

定曲率の単連結空間  $X^n$  はすべてベクトル空間  $V^{n+1}$  の中に超曲面として "埋め込む", すなわち,  $X^n$  の運動がすべて  $V^{n+1}$  の中の線型変換として  $V^{n+1}$  に拡張されるという状況におくことができる。座標を適当にとると, その超曲面を記述する方

程式は

$$S^n \text{ については } x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

$$E^n \text{ については } x_0 = 1$$

$$A^n \text{ については } x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1, x_0 > 0$$

となる。この埋め込みの下では、 $X^n$  の  $n$  次元平面とは、 $V^{n+1}$  の  $(n+1)$  次元部分空間と  $X^n$  との交わりに他ならず、超平面  $H$  を境界とする  $X^n$  の半空間は自然に超平面  $U$  を境界とする  $V^{n+1}$  の半空間に対応する。

さて、 $P$  を  $X^n$  の凸多面体、すなわち、 $X^n$  の有限個の半空間の共通部分とすると、 $P$  に対応して  $V^{n+1}$  の中の多面錐  $K$  が定まる（対応する  $V^{n+1}$  の半空間の共通部分として定義する）。そして、凸多面体  $P$  の面に関する鏡映で生成される  $X^n$  の discrete な運動群  $\Gamma$  に対し、 $\Gamma$  の作用を  $V^{n+1}$  まで延長することによって、 $K$  の面に関する鏡映によって生成される線型群を得る。実は、この群は次に定義する“線型 Coxeter 群”になることが分る（定理 1）。かくして我々は、線型 Coxeter 群を特徴づけるものは何かと尋ねる道へ導かれる。

以下、本稿では Vinberg [6] に沿って Lobachevsky 空間における discrete reflection group の理論の解説を試みる。

## §2. 線型 Coxeter 群の構造

定義  $V$  は  $\mathbb{R}$  上の  $n$  次元ベクトル空間とする。線型写像

$R: V \rightarrow V$  が reflection であるとは、 $v \in V$  と  $\alpha \in V^*$  であって  $\alpha(v) = 2$  なるものによつて、 $Rv = v - \alpha(v)v$  と書かれること。

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$  に対し、凸多面錐  $K$  は

$$K = \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0, i=1, \dots, m\} \text{ (無駄のない表示)}$$

と書かれているとする。各  $\alpha_i$  に対し、 $\alpha_i(v_i) = 2$  を充す  $v_i \in V$

をとつて、 $R_i$  を  $R_iv = v - \alpha_i(v)v_i$  で定義する。(凸多面錐の面に関する鏡映)

$$\Gamma = \langle R_i \mid i=1, \dots, m \rangle \subset GL(V)$$

とおく。

定義  $\Gamma$  が線型 Coxeter 群であるとは、 $K, \Gamma$  が条件

$$\Gamma \ni \gamma \neq 1 \Rightarrow \gamma K^\circ \cap K^\circ = \emptyset$$

を充すこと、但し  $K^\circ = K$  の interior。このとき、 $K$  を  $\Gamma$  の基本部屋という。(  $\Gamma, K$  ) が線型 Coxeter 群であるともいう。

さて、 $\Gamma$  を上述のような線型 Coxeter 群とする。 $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$  の部分集合  $S$  に対し、

$$K(S) := \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0 \text{ for } i \in S\}$$

とおくと、 $K(S)$  は  $K$  を含む凸多面錐である。また、 $K$  の (closed)

face の全体を  $\text{face } K$ 、 $S$  のうちで  $(m-1)$  次元の face を  $K_1, \dots, K_m$

とする。このとき、 $L \in \text{face } K$  に対し  $\sigma(L) = \{i \mid K_i \supset L\}$  に

よつて  $\sigma: \text{face } K \rightarrow 2^{I_m}$  を定義する。 $\Gamma(S) = \langle R_i \mid i \in S \rangle$  と

おく。このとき、明らかに

命題  $S \in \sigma(K)$  ならば、 $\Gamma(S)$  は  $K(S)$  を基本部屋とする線型 Coxeter 群である。

逆に、次の定理が成立つ (2)  $\Rightarrow$  1) の部分)

定理 1  $\Gamma$ : 凸多面錐  $K$  の面に関する鏡映  $R_1, \dots, R_m$  で生成された線型群  $\subset GL(V)$  とする。このとき、1)  $\Leftrightarrow$  2)

1)  $(\Gamma, K)$  は線型 Coxeter 群

2) 隣接する 2 つの面  $K_i$  と  $K_j$  のすべての組に対して、

$\Gamma_{ij} = \Gamma(\{i, j\})$  は  $K_{ij} = K(\{i, j\})$  を基本部屋とする線型 Coxeter 群

2)  $\Rightarrow$  1) の証明は定理 2 と並行して進められる。この定理によつて、とくに 2 つの生成元をもつ線型 Coxeter 群を考えることの重要性が分る。ところで、

命題 (Criterion) 2 面錐  $K$  が、 $\Gamma = \langle R_1, R_2 \rangle$  の基本部屋である、すなわち、 $(\Gamma, K)$  が線型 Coxeter 群

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{1} & \alpha_1(\theta_2), \alpha_2(\theta_1) \text{ は共に負あるいは共に } 0 \\ \textcircled{2} & \alpha_1(\theta_2)\alpha_2(\theta_1) \geq 4 \quad \text{または} \\ & = 4 \cos^2 \frac{\pi}{r} \quad r \in \mathbb{Z}, r \geq 2 \end{cases}$$

この命題の証明では、 $\Gamma$  の作用で無駄なところは考えなくてよいので  $n=2$  としてよい。すると簡単な平面幾何によつて  $\Gamma$  の作用する様子が 3 つの type に分れることが分るので、感

じをつかむためにそれを表にして示すと：

$\alpha_1(\beta_2)\alpha_2(\beta_1)$ の値	$R_1R_2$	$R_1R_2$ の位数	$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$
$4 \cos^2 \frac{\pi}{k}$	$\frac{\pi}{k}$ の回転	$k$	$V$
4	unipotent	$\infty$	半空間
4より大	双曲的回転	$\infty$	2面錐

定理 2  $\Gamma$  は凸多面錐  $K$  の面に関する鏡映  $R_1, \dots, R_m$  で生成

された線型 Coxeter 群とする。  $K$  に含まれる点  $x$  に対して、

$\Gamma_x := \langle R_i \mid x \in K_i \rangle$  とおく。また、  $K^f = \{x \in K \mid |\Gamma_x| < \infty\}$

とおく。このとき以下が成り立つ：

- 1)  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$  は凸錐
- 2)  $\Gamma$  は  $C := (\Gamma K)^\circ$  に discrete に作用する
- 3)  $C \cap K = K^f$
- 4)  $K^f \rightarrow C/\Gamma$  (canonical) は homeo.
- 5)  $K \ni x$  に対し、  $\Gamma_x$  は  $x$  の  $\Gamma$  中の stabilizer
- 6)  $K_i$  と  $K_j$  が隣接する面であるとき、  $R_i R_j$  の位数を  $m_{ij}$  ( $\leq \infty$ ) とかけば、  $R_i^2 = 1$ ,  $(R_i R_j)^{m_{ij}} = 1$  が  $\Gamma$  の基本関係である。すなわち、  $\Gamma$  は(抽象) Coxeter 群である。

定理 1, 2 の証明には、まず上の基本関係 6) をもつ(抽象) Coxeter 群  $\bar{\Gamma}$  に対して、  $\bar{\Gamma}$  の "universal space"  $\bar{U}$  を構成する。そして、  $\bar{\Gamma}$  の  $\bar{U}$  への作用を調べ、一方  $\bar{U}$  から  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$  の上への 1 対 1 の対応  $\psi$  が存在することを言うことによつて、  $K$  が  $\Gamma$  の基

本部屋であること (定理1) と, 準同型  $\bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  が同型であること (定理2, 6)) が分る。他の主張も  $\psi$  と  $\psi$  を調べることによつて分る。定理1, 2 の特殊な場合についてすでに Tits が同じ結果を得てゐるが, Vinberg の証明は Tits の証明に反して抽象 Coxeter 群に関する代数的な準備には因つてゐない。

## §2. characteristic, Cartan 行列

線型 Coxeter 群  $\Gamma$  に対して, 行列  $A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} = \alpha_i(\tilde{r}_j)$  をその Cartan 行列という。定理1及びその直後に掲げた命題により,  $\Gamma$  の Cartan 行列  $A$  は次の条件 (C1) (C2) :

$$(C1) \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} \leq 0 ; \quad \text{かつ} \quad a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0$$

$$(C2) \quad a_{ii} = 2 ; \quad a_{ij}a_{ji} \geq 4 \text{ または } 4 \cos^2 \pi/m_{ij} , \quad m_{ij} \in \mathbb{Z}$$

(ここで,  $m_{ij}$  は定理2, 6) における指数と同じものである。)

を充し, かつ逆に勝手な  $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_m \in V$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$  に対して同様に def される行列  $A$  が (C1) (C2) を充つたならば, それらで def する多面錐の面に関する鏡映で生成される線型群は線型 Coxeter 群になることが分る。

さて, 一般に (C1) を充つ indecomposable な行列  $A$  に対して, 非負行列論から  $A$  は実固有値をもつことが分るから,  $A$  の最小の実固有値  $\alpha$  の符号によつて,  $\alpha > 0$  のとき  $A$  を (P) 型,  $\alpha = 0$  のとき (Z) 型,  $\alpha < 0$  のとき (N) 型と呼ぶことにする。とくに

$\forall a_{ii}=2$  のとき,  $A$  が (Z) 型であるとは,  $2I-A$  の固有値半径=2 と同値である。

一般に, 行列  $A$  に対し,  $A$  の行ベクトル  $\forall a_1, \dots, a_m$  の間の 1 次関係の全体  $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0\}$  を  $L_r(A)$  とかく。(r は row の頭文字)  $L_r(A)$  の中の凸錐  $L_r^+(A)$  を  $L_r^+(A) = L_r(A) \cap (\mathbb{R}^+)^m$  で def する。

$A$  が (C1) を充す行列のとき,  $A$  の (P) 型の component たちすべの直和を  $A^+$ , (Z) 型の component たちの直和を  $A^0$ , (N) 型の component たちの直和を  $A^-$ ,  $A = A^+ + A^0 + A^-$  とする。すると明らかに,  $L_r^+(A) = L_r^+(A^0)$

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^* - \{0\}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V$  に対し, 行列  $A = (a_{ij})$  を  $a_{ij} = \alpha_i(\alpha_j)$  で定め,  $L_r(A)$  の部分空間  $L_\alpha$  を  $L_\alpha = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mid \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0\}$  によつて def する。また,  $K := \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0, i=1, \dots, m\}$  とおく。

$S \subset I_m = \{1, 2, \dots, m\}$  に対し,  $S^+, S^0, S^- \subset S$  を  $A_S^+ = (A_S)^+$ ,  $A_S^0 = (A_S)^0$ ,  $A_S^- = (A_S)^-$  によつて def する。但し  $A_S = (a_{ij})_{i,j \in S}$  etc. また,  $Z(S) = \{i \in I_m \mid a_{ij} = 0, \forall j \in S\}$  とかく。

命題 上の記号のもとで,  $A$  が (C1) を充すならば

$$K^\circ \neq \emptyset \Leftrightarrow L_\alpha \cap L_r^+(A^0) = \{0\}$$

且つこのとき,  $\forall a_{ii} > 0$  ならば,  $\alpha_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m$  は  $K$  の

無駄のない表示を与える, i.e.  $K$  は  $m$ -sided cone である。

定理 3 上の記号のもとで,  $A$  が (C1) を充し,  $K \neq \emptyset$  とする。このとき,  $S \subset I_m$  が次の2つのうち1つを充す:

$$1) S^0 \cup S^- \in \sigma(\text{rk})$$

$$2) S = S^0 \text{ か } Z(S)^0 = \emptyset$$

ならば,  $S \in \sigma(\text{rk})$  である。

条件 1) は  $S = S^+$  なら自動的に充されることに注意しておく。

さて,  $V \ni r_1, \dots, r_m, V^* \ni \alpha_1, \dots, \alpha_m$  が与えられた時, これらの定める invariant として次の4つが考えられる。

$$1) \text{ Cartan 行列 } A = (a_{ij}), a_{ij} = d_i(r_j)$$

$$2) L_r = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_m r_m = 0\}$$

$$3) L_\alpha = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0\}$$

$$4) \text{ "defect" } d = \dim(\text{Ann}\langle \alpha \rangle / \langle r \rangle \text{Ann}\langle \alpha \rangle)$$

$$\text{ここに, } \text{Ann}\langle \alpha \rangle = \{x \in V \mid \alpha_i(x) = 0, i=1, \dots, m\}$$

1) ~ 4) の組を, 系  $r_j, \alpha_i$  の characteristic とする。  $L_\alpha \subset L_r(A)$ ,  $L_r \subset L_c(A) = \text{"A の列ベクトル } a \text{ 間の線型関係の全体" ( } a \text{ は column の頭文字)}$ 。  $d_r = \text{codim}_{L_c(A)} L_r$ ,  $d_\alpha = \text{codim}_{L_r(A)} L_\alpha$  とおく。

命題  $m \times m$  行列  $A$ ,  $L_c(A)$  の部分空間  $L_r$ ,  $L_r(A)$  の部分空間  $L_\alpha$ ,  $d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$  を任意に与えた時,  $\{A, L_r, L_\alpha, d\}$  を characteristic にもよるな系  $\{r_i \in V, \alpha_i \in V^*, i=1, \dots, m\}$  が



同型を除いて unique に存在する。しかも,  $\dim V = \text{rank } A + d\alpha + d$

証明には,  $V = \mathbb{R}^{\text{rank } A} \oplus (L_c(A)/L_\alpha) \oplus (L_r(A)/L_\alpha)^* \oplus \mathbb{R}^d$  とおけばよい。

定義  $A \sim B \Leftrightarrow \exists D$ : 対角行列, 対角成分  $> 0$ ;  $A = DBD^{-1}$

定義  $i_1, \dots, i_m$  が相異なる文字  $\in I_m$  のとき,  $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_m i_1}$  を  $A$  の cyclic product とする。

命題  $A, B$  が (C1) を満たす行列ならば,  $A \sim B \Leftrightarrow$  すべての cyclic product が一致する。

定理 4  $A$ : (C1)(C2) を満たす行列,  $L_\alpha \subset L_c(A)$ ,  $L_\alpha \subset L_r(A)$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $d \geq 0$  が任意に与えられていて,  $L_\alpha \cap L_r^+(A^0) = 0$  をみたすとする。このとき,  $\{A, L_\alpha, L_\alpha, d\}$  を characteristic に基づく線型 Coxeter 群  $\Gamma$  が同型 (線型群としての作用をこめた意味) を除き unique に存在する。

この定理は与えられた Coxeter 群の線型 Coxeter 群としての表現をすべて求める方法を示す。Corollary として, 任意の Coxeter 群はある線型 Coxeter 群と同型である。実際,  $\text{index } \{ \text{Cos } \Gamma, L_c(\text{Cos } \Gamma), 0, 0 \}$  を characteristic に持つ線型 Coxeter 群を上記の定理により作ればよい。但し, ここに  $\text{Cos } \Gamma = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} = -2 \cos \pi / m_{ij}$  ( $m_{ij} \neq \infty$ );  $a_{ij} = -2$  ( $m_{ij} = \infty$ )。上の構成は Coxeter により注意され, Tits が実際に線型 Coxeter-

ter群であることを証明した“標準的表現”といわれるものがあるが、ここにおいては、 $d = d_{\mathfrak{h}} = 0$  となっており表現に無駄がない。一般に  $d = d_{\mathfrak{h}} = 0$  の時、 $\Gamma$  は reduced であると言う。これは、 $K$  が strictly convex ということもよいし、或いは  $\langle \alpha \rangle = V^*$  ということも同値である。とくに、このとき  $\dim V = \text{rank } A + d_{\alpha}$ ,  $\dim \langle \mathfrak{h} \rangle = \text{rank } A$  となる。また、任意の複型 Coxeter 群  $\Gamma \subset GL(V)$  に対し、 $\Gamma$  の作用を  $V^{\text{red}} = V / \text{Ann} \langle \alpha \rangle$  へおとせば、reduced な複型 Coxeter 群  $\Gamma^{\text{red}}$  を得る。

最後に、山口氏の報告中で必要な定義を追加しておく：

定義  $S \subset I_m$  が  $A$  を reduce する  $\Leftrightarrow i \in S, j \in S$  ならば、

$$a_{ij} = 0$$

命題  $W \subset V$  (部分空間) が  $\Gamma$ -不変である

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists S \subset I_m ; S \text{ は } A \text{ を reduce する} \\ \text{A.t. } \langle \mathfrak{h} \rangle_S \subset W \subset \text{Ann} \langle \alpha \rangle_{I_m - S} \end{cases}$$

但し、 $\langle \mathfrak{h} \rangle_S := \langle \mathfrak{h}_i \rangle_{i \in S}$  etc.

系 群  $\Gamma$  が irreducible  $\Leftrightarrow A$  が indecomposable かつ  $d_{\mathfrak{h}} = d = 0$

尚、文献は村上氏の報告の最終頁を参照されたい。