数理解析研究所講究録
第 394 巻 1980 年 127-137

Lobachevsky空間のdiscrete groupについて
— Vinbergの一連の論文の紹介(II) —

東大理学部　山口 浩

単連結な定曲率空間Xにおける離散鏡映群Γは、Xを自然な形で実線型空間Vに埋め込むことによって、線型Coxeter群と見ることができる(植野氏の報告参照)。ここでは、このようなΓを、さらに直交Coxeter群としてとらえ、なかでも重要な楕円型、放物型、及び双曲型Coxeter群について述べる。

§1. 直交Coxeter群

Vを有限次元実線型空間、ΓをVの鏡映$R_1, \cdots R_m$で生成される線型Coxeter群とする。ここでR_iは次で定義されるものとする。　$R_i v = v - \alpha_i(v) h_i \quad (v \in V) \quad ; \quad \alpha_i \in V^*, \ h_i \in V$

$[h]$で$h_1, \cdots h_m$によって張られるVの部分空間を表わす。また　$a_{ij} = \alpha_i(h_j)$, $A = (a_{ij})$　とおく。AはΓのCartan行列と呼ばれるものである。ここでR_iに対するα_i及びh_iのとり

方には(正の)スカラー倍だけの任意性がある訳であるが、ここではあらかじめ固定されたものとして、話を進める。

[定義]　Γが直交Coxeter群であるとは　[h]上の非退化な対称双一次形式$(,)$で次を満すものが存在するときをいう。

(1)　$(,)$はΓ不変

(2)　$(h_i, h_i) > 0 \qquad 1 \leq i \leq m$

定義から直ちに分るように、単連結な定曲率空間の離散鏡映群は、直交Coxeter群となる。　(1)のΓ不変という性質を書き直せば、次の補題を得る。

[補題1]　Γを線型Coxeter群、$(,)$を$(h_i, h_i)=2$をみたすような[h]上の内積とする。　このとき

$(,)$がΓ不変 $\Leftrightarrow$ $(h_i, h_j) = a_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq m$

この補題に注意すると次の定理を得る。

[定理1]　Aを線型Coxeter群ΓのCartan行列とするとき

Γが直交Coxeter群 $\Leftrightarrow$ Aが対称化可能.

さらにこのとき. α_i, e_i を正のスカラー倍でおきかえることにより. (鏡映 R_i は変えることなく) $A=((e_i, e_j))$ となる様な $[e]$ 上の Γ 不変な内積が存在する。

ここで A が対称化可能とは. 適当な正の対角行列 D によって DAD^{-1} が対称行列になることを言う。 植野氏の報告中の §3 を参照すれば. 次の命題を得る。

[命題1] $A \in M_m(\mathbb{R})$ が次の条件(C1) を満すとする

(C1) : $a_{ij} \leqq 0 \ (i \neq j)$ かつ $a_{ij}=0 \Leftrightarrow a_{ji}=0$

このとき A が対称化可能であるためには. A 及び ${}^tA$ の cyclic product がすべて一致することが必要十分である。

線型 Coxeter 群の一般論より. Cartan 行列 A は (C1) をみたすから. 定理1 及び命題1 は 直交性の判定を与える。

[定義] $A \in M_m(\mathbb{R})$ は(C1) を満すとする。 A の長さ 3 以上の cyclic product が全て 0 になるとき. A を非輪状 (acyclic) と呼ぶ。 命題1 より. A はこのとき対称化可能である。

[補題2]　Aを分解不能で(C1), (C2) を満す行列とする

(C1)　$a_{ij} \leqq 0$　$(i \neq j)$　　$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$

(C2)　$a_{ii} = 2$　;　$a_{ij}a_{ji} = 4\cos^2 \pi/n_{ij}$　$n_{ij} \geqq 2$, $n_{ij} \in \mathbb{Z}$

または $\geqq 4$.

このとき.

Aが(P)型　⇨　Aは非輪状

Aが(Z)型　⇨　Aは非輪状　もしくは　$A \sim \tilde{A}_\ell$

ただし

$$\tilde{A}_\ell = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\ell+1} \qquad \ell \geqq 2$$

この補題により. Aはとくに対称化可能であり. 線型Coxeter群のCartan行列は(C1), (C2) をみたすことに注意すれば次の系を得る。

[系]　Γを線型Coxeter群. Aをそのcartan行列とするとき

Aが(N)成分を持たないならば　Γは直交Coxeter群.

さて. 線型Coxeter群Γ　に対して　CosΓ　はΓのCoxeter群としての情報を全て与えるものであるが. ΓのCartan行列AとCosΓとが. ある条件下では同値になる。　そのことを次に述べて　この§を終わる。

[命題2] Γを線型Coxeter群，AをそのCartan行列とする。
次のいずれかが成立すると仮定しよう。

1) Aは(N)成分を持たない
2) $\mathrm{Cos}\Gamma$は(N)成分及び$\tilde{A}_\ell$成分を持たない。

このとき　$A \sim \mathrm{Cos}\Gamma$　が成立する。

ここで，$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$\tilde{A}_\ell$ $(\ell \geqq 2)$ は前のとおり．

$\mathrm{Cos}\Gamma = (-2\cos \pi/n_{ij})$　n_{ij}はR_iR_jの位数

§2 楕円型，放物型，及び双曲型Coxeter群．

Xをn次元単連結定曲率空間　すなわち，球面S^n，Euclid空間E^n，及びLobachevsky空間Λ^n　とし，ΓをXの離散鏡映群とする。Xをn+1次元の実線型空間Vに埋め込み，ΓをVの直交Coxeter群と見ることにする。ここで次の定義を与える。

[定義]　線型Coxeter群Γが楕円型(elliptic)，放物型(parabolic)双曲型(hyperbolic)とは，次の表のXの離散鏡映群に線型Coxeter群として同型であるときをいう。

Γ	X	付加する条件
楕円型	S^n	が直径の両端を含まぬ
放物型	E^n	が有界
双曲型	Λ^n	ΓがΛ^nの真の平面及び無限遠点を不変にしない

ただし、ここでΛ^nの平面とはΛ^nとVの部分空間との共通部分であり、　は$\alpha_i \geqq 0$で定義されるXの部分集合である。

Γが双曲型ならば上の定義から、ΓはVに既約に働くことが分る。植野氏の報告中にもある様に、線型Coxeter群Γで本質的な部分は、Γ^{red}にある。そこで、以下この§ではΓは被約(reduced)と仮定する。またAをそのCartan行列とする。このとき、次の命題によって、上の3つの型を特徴づけることができる。

［命題3］ 次は同値である。

1) Γは楕円型
2) V上にΓ不変で正定値な内積がある。
3) $A = A^+$ 　i.e. Aは(Z),(N)成分をもたない。
4) Γは有限群

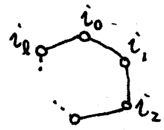
[命題4] 次は同値である

1) Γ は放物型

2) V の codim 1 の部分空間 V_0 で Γ 不変なもの及び V_0 上の Γ 不変な内積（正定値）が存在し. $V_0 \cap K = \{0\}$

3) $A = A^0$ $\mathrm{rank}\, A = n$

4) Γ は Coxeter 群としては放物型 Coxeter 群に同型でその Coxeter 図形は $m-n$ 個の連結成分を持ち. 各 $\tilde{A}_l$ 型の成分に対し $|a_{i_0 i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_l i_0}| = \begin{cases} 1 & l \geq 2 \\ 4 & l = 1. \end{cases}$



[命題5] 次は同値である.

1) Γ は双曲型

2) Γ は V に既約に作用し. V 上に符号数 $(n.1)$ の Γ 不変な内積が存在する.

3) A は分解不能. (N) 型. $\mathrm{rank}\, A = n+1$ しかも A は符号数 $(n.1)$ の対称行列と同値. すなわち. 正の対角行列 D を適当にとれば DAD^{-1} が $(n.1)$ の対称行列になる。

§3　Kの複体としての構造.

Vをn+1次元実線型空間 $\Gamma=\langle R_1\cdots R_m\rangle$ をV上の線型Coxeter群とする. Kを $\alpha_1\geqq 0\cdots\alpha_m\geqq 0$ で定まるVの多面錐. K_iを $\alpha_i=0$ で定まるKの面とする. $\mathfrak{F}K=\{F\subset K \text{ 面分}\}$ とおけば$\mathfrak{F}K$は組合せ複体の構造を持つ. $I_m=\{1,2,\cdots m\}$ とし $\sigma:\mathfrak{F}K\rightarrow\mathcal{P}(I_m)$ を $\sigma(F)=\{i\in I_m \mid K_i\supset F\}$ で定義する. このとき. $\mathfrak{F}K$の構造について. 次のことが分る.

[定理2]　$S\subset I_m$に対し $\Gamma_S=\langle R_i \mid i\in S\rangle$, $K_S=\bigcap_{i\in S}K_i$ とおく. Γ_SはΓの部分群であり. K_SはKの面分である. このとき.

1). Γ_Sが有限群 $\Rightarrow$ $S\in\sigma(\mathfrak{F}K)$, $\dim K_S=n+1-|S|$

2) Γは放物型でないとする.

Γ_SはCoxeter群として放物型でCoxeter図形の連結成分の数をrとするとき$|S|-r=n-1$, またこの図形の$\tilde{A}_\ell$成分について命題4の4)と同様なことが成立すると仮定すると.

$S\in\sigma(\mathfrak{F}K)$　かつ　$\dim K_S=1$.

§4 perfect Coxeter群 及び quasi-perfect Coxeter群

楕円型，放物型 Coxeter群は，双曲型 Coxeter群に比べれば，よく解っている対象である。そこで，双曲型のうちでも，これらに"近い"性質を持つものを調べることは有用であろう。そのために，ここでは perfect Coxeter群 及び quasi-perfect Coxeter群 という概念を導入する。

Γを線型 Coxeter群，Kを§3で定義した多面体錐とする。KはΓの基本部屋になっている。さらに $C=(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma K)^{\circ}$ とおく。（$^{\circ}$は interior を表す記号）

[定義] Γは次を満たすとき，perfect Coxeter群 と呼ばれる。

1) Γは既約 (reduced)
2) $K-\{0\}\subset C$

$K^{f}=\{x\in K \mid \Gamma_x$ が有限群$\}$ とおくと，$C\cap K=K^{f}$ が示される。（植野氏の報告参照）よって 2)は $K-\{0\}\subset K^{f}$ と同値である。これより Γが楕円型あるいは放物型ならば，perfect である。 しかし，perfect であっても直交 Coxeter群でないものも存在する。 たとえば，

$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & -a \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & -1 \\ -a' & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $a>1$ を Cartan 行列とする様な線型 Coxeter 群で被約なものがその例を与える。

さて、Γ が perfect なら $S\in\sigma(\mathfrak{F}K)-\{I_m\}$ に対し、Γ_S^{red} は有限群。よって Γ_S^{red} は楕円型である。そこで、perfect の類似概念として quasi-perfect を次の様に定義する。

[定義] 線型 Coxeter 群 Γ は次をみたすとき、quasi perfect Coxeter 群と呼ばれる。

1) Γ は被約

2) $S\in\sigma(\mathfrak{F}K)-\{I_m\}$ ⇨ Γ_S^r は楕円型もしくは放物型.

$\mathbb{P}V = V-\{0\}/\mathbb{R}^*$ とおき、$V-\{0\}\to\mathbb{P}V$ による $K-\{0\}$ の像を $\mathbb{P}K$ で表すことにする。$\mathbb{P}K$ は自然に複体の構造を持つ.

[補題3] Γ を被約な線型 Coxeter 群とする. 各頂点 $Q\in\mathbb{P}K$ に対して $\Gamma_{\sigma(Q)}^{red}$ が楕円型もしくは放物型 とすると Γ は quasi-perfect. しかも頂点ではない面分 $F\subset\mathbb{P}K$ に対しては $\Gamma_{\sigma(F)}^{red}$ は楕円型になる。

これは $S\subset T$ ⇨ $(\Gamma_S^{red})_T^{red}=\Gamma_T^{red}$ に注意すればよい

これより次の命題を得る.

[命題6] Γ を quasi perfect Coxeter 群とすると. 次のいずれかが成立する。

1) Γ は楕円型

2) Γ は放物型

3) Γ は放物型 $\times\ \mathbb{Z}_2$ $\qquad \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{R}$

4) A は分解不能. (N)型. $\operatorname{rank} A = \dim V$

§2 の結果と合わせれば.

[命題7] Γ を quasi perfect な直交 Coxeter 群 とすると.
Γ は 楕円型. 放物型. 双曲型 あるいは放物型 $\times\ \mathbb{Z}_2$ のいずれかになる。

最後に. 双曲型については次のことが分る。

[命題8] Γ は V^n の双曲型 Coxeter 群とする. このとき

1) Γ が perfect $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ V^n/Γ が compact

2) Γ が quasi-perfect $\Leftrightarrow$ V^n/Γ が 体積有限

尚, 文献は村上氏の報告の最終頁を参照されたい。