

可換環上の twisted Chevalley 群の
正規部分群について

熊本大 教養 鈴木和雄

A を局所環とする。このとき W. Klingenberg [5] は $SL_{n+1}(A)$ $Sp_{2n}(A)$ ($n \geq 1$) の正規部分群は少数の場合を除いて合同部分群であることを示した。E. Abe [1] は、その一般化として Chevalley-Demazure group scheme G の A における実の存在群 $G(\mathbb{Z}, A)$ の正規部分群の決定は特別の場合を除いて A の ideal とその \mathbb{Z} -submodule を決定することに帰着することを示した。更に E. Abe, K. Suzuki [3] はより一般の可換環 A に対して $G(\mathbb{Z}, A)$ の正規部分群の特徴づけについて論じている。

一方 K. Suzuki [4] は [1] の analogy として局所環 A 上の twisted Chevalley 群 $G_0(\mathbb{Z}, A)$ の正規部分群の特徴づけを示した。これはより一般の可換環上の twisted Chevalley 群の正規部分群の特徴づけについて [3] の analogy が可能であることを述べた。

(1)

§1 $G_0(\Phi, A)$ のある部分群

G を単連結又は適体型の $\Phi = A_n (n \geq 2)$, $D_n (n \geq 4)$, E_6 型の単純 Chevalley-Demazure group scheme とする。 A は単位元をもち involutive な自己同型 τ をもつ可換環とし, σ は Φ の canonical な involutive な自己同型とする。 τ, σ に関して G に対応する Φ_α 型の A 上の twisted Chevalley 群 $G_0(\Phi, A)$ とする。 以下定義, 記号等は $\sigma, \tau, E, A, b \in [2]$ を用いる。

$a \in A, r \in \Phi$ に対しそれぞれ $\tau(a) = \bar{a}, \sigma(r) = \bar{r}$ とおき, $A_0 = \{u \in A \mid u = \bar{u}\}$, $\mathcal{O} = \{(a, b) \in A \times A \mid a\bar{a} = b + \bar{b}\}$ とおく, $\mathcal{I} = (a, b)$, $\gamma = (c, d) \in \mathcal{O}$ に対し, $\mathcal{I} + \gamma = (a+c, b+d+\bar{a}c)$ とおく。 \mathcal{O} は $+$ について群を作る。

A の τ -不変な ideal を I とし, $J_0 = \{a + \bar{a}, a\bar{a}u \mid a \in I, u \in A_0\}$ から生成された \mathbb{Z} -module とする。

(i) $\Phi_\alpha = {}^2A_{2n+1} (n \geq 1), {}^2D_n (n \geq 4), {}^2E_6$ のとき, I_0 は次のような A_0 の \mathbb{Z} -submodule とする。

$$(a) \quad I \cap A_0 \supset I_0 \supset J_0$$

(b) 特に $\Phi_\alpha = {}^2A_{2n+1}$ のとき, 任意の a に対し $a\bar{a}I_0 \subset I_0$ 。

$\Phi_\alpha = {}^2E_6$ のとき I_0 は A_0 の ideal とする。

(ii) $\Phi_\alpha = {}^2A_{2n} (n \geq 1)$ のとき, $\mathcal{O}_I^{(1)}, \mathcal{O}_I^{(2)}$ をそれぞれ $\{(0, a - \bar{a}), (ac, a\bar{a}d) \mid a \in I, (c, d) \in \mathcal{O}\}, \{(t, u) \mid u \in I, t \in I \text{ for all } (t', u') \in \mathcal{O}\}$ から生成された \mathcal{O} の部分群とする。

(2)

\mathcal{O}_I を次の様な \mathcal{O} の部分群とする。

$$(a) \quad \mathcal{O}_I^{(2)} \supset \mathcal{O}_I \supset \mathcal{O}^{(1)}$$

$$(b) \quad \text{任意の } a \in A, (c, d) \in \mathcal{O}_I \text{ に対し, } (ac, a\bar{a}d) \in \mathcal{O}_I$$

Φ_α の元 $S = \{r\}, \{r, \bar{r}\}, \{r, \bar{r}, r+\bar{r}\}$ に対応して I_S とそれぞれ I_0, I, \mathcal{O}_I とする。 $E(\Phi_\alpha, I, I_S)$ と $\{x_S(a) \mid a \in I_S, S \in \Phi_\alpha\}$ から生成された, elementary な部分群 $E(\Phi_\alpha, A)$ の正規部分群とし $E^*(\Phi_\alpha, I, I_S)$ と $\{x \in G_\alpha(\Phi, A) \mid [x, G_\alpha(\Phi, A)] \subset E(\Phi_\alpha, I, I_S)\}$ から生成された $G_\alpha(\Phi, A)$ の部分群とする。特に $I_0 = A_0 \cap I$, $\mathcal{O}_I^{(2)} = \mathcal{O}_I$ のときは $E(\Phi_\alpha, I, I_S) = E(\Phi_\alpha, I)$, $E^*(\Phi_\alpha, I, I_S) = E^*(\Phi_\alpha, I)$ とおく。

§2 正規部分群.

次の条件を設ける。

(C 1) (i) $\Phi_\alpha = {}^2A_{2n+1} (n \geq 1), {}^2D_n (n \geq 4), {}^2E_6$ のとき, 任意の τ -不変な maximal ideal π_λ に対して自然な準同型写像 $A_0 \rightarrow (A/\pi_\lambda)_0$ は surjective である。

(ii) $\Phi_\alpha = {}^2A_{2n} (n \geq 3)$ のとき 任意の π_λ において $\hat{a}\hat{\bar{a}} = \hat{b} + \hat{\bar{b}}$ なる $\hat{a}, \hat{b} \in A/\pi_\lambda$ に対して, $a\bar{a} = b + \bar{b}$ なる \hat{a}, \hat{b} の代表元 a, b がとれる。

(A) A が局所環のとき, $G_\alpha(\Phi, A)$ の正規部分群の特徴づけは K. Suzuki [4], G. Straker [6] に於て論じられているが

[3]を参照すれば半局所環の場合も同様なことが成立つて
 がわかる。

定理1. A を半局所環とし, A の任意の τ -不変な maximal
 ideal π_λ に対し条件 (C1) をみたし, G を単連結, $\Phi_0 = {}^2A_{2n+1}, {}^2D_n, {}^2E_6$
 において $|A_0/\pi_{\lambda,0}| \geq 5$ $\pi_{\lambda,0} = A_0 \cap \pi_\lambda$ とする. $\Phi_0 = {}^2A_3, {}^2D_n$
 のとき 2 が A で invertible とし, $\Phi_0 \neq {}^2A_2, \neq {}^2A_4$ とする. このと
 き, $G_\alpha(\Phi, A)$ の部分群 N が $E(\Phi_0, A)$ で正規化されるとする
 とし, 次のような A の τ -invariant な ideal I と I_S が一
 意的に決まる

$$E^*(\Phi_0, I, I_S) \supset N \subset E(\Phi_0, I, I_S)$$

注. G. Strecker [6] は ${}^2A_3, {}^2D_n$ のとき, 2 が invertible
 なる条件をはずすため I, I_0 を定義し直して成功している。

(B) さて, 以下 A を単位元をもつ可換環とする。

$\{\pi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の maximal ideal の集合. \mathcal{J} を maximal
 ideal の中集の有限個の共通部分の集合族, すなわち

$$\mathcal{J} = \{ \mathcal{O}_\alpha = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\mu_i}^{e_i} \mid \mu_i \in \Lambda, e_1, \dots, e_n: \text{自然数} \} \subset \mathcal{L}, \tilde{A} = \varprojlim_{\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{J}} A/\mathcal{O}_\alpha$$

とする. $\mathcal{J}' = \{ \mathcal{O}_\beta = \bigcap_{i=1}^t \pi_{\nu_i}^{f_i} \mid \pi_{\nu_i}: A \text{ の } \tau\text{-不変な max. ideal, } f_1, \dots, f_t: \text{自然数} \}$ とすると, $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$ は A に同相な位相を
 与える。

$$(4)$$

次の条件を設ける。

条件(CII) A の任意の ideal \mathcal{O} に対して

$$\mathcal{O} = \bigcap_{\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{J}} (\mathcal{O} + \mathcal{O}_\alpha)$$

Noether環や体の直積についてはこの条件は満たされる。また

このとき
$$\bigcap_{\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{J}} (\mathcal{O} + \mathcal{O}_\alpha) = \bigcap_{\mathcal{O}_\beta \in \mathcal{J}'} (\mathcal{O} + \mathcal{O}_\beta) = \mathcal{O} \text{ となる。}$$

さて 2 が A において invertible であるとき、 $E(\Phi_\alpha, I, I_S) = E(\Phi_\alpha, I)$, $E^*(\Phi_\alpha, I, I_S) = E^*(\Phi_\alpha, I)$ となり、また条件(CI)

を満たす。任意の $\mathcal{O}_\beta \in \mathcal{J}'$ に対して A/\mathcal{O}_β は半局所環であるから $G_\alpha(\Phi, A/\mathcal{O}_\beta) = E(\Phi_\alpha, A/\mathcal{O}_\beta)$ となり、自然な単同型写像 $G_\alpha(\Phi, A) \rightarrow G_\alpha(\Phi, A/\mathcal{O}_\beta)$ は surjective である。したがって

$$G_\alpha(\Phi, \hat{A}) = \varprojlim_{\mathcal{O}_\beta \in \mathcal{J}'} G_\alpha(\Phi, A/\mathcal{O}_\beta) = \varprojlim_{\mathcal{O}_\beta \in \mathcal{J}'} G_\alpha(\Phi, A) / G_\alpha(A, \mathcal{O}_\beta)$$

と、 2 $G_\alpha(A, \mathcal{O}_\beta) = G_\alpha(\Phi, A) \cap G_\alpha(A, \mathcal{O}_\beta)$ とする。

$T_\alpha(A)$ を $T(R)$ の α -不変な元の可換群とする。 $E(\Phi_\alpha, A)$ と $T_\alpha(A)$ とから生成される $G_\alpha(\Phi, A)$ の部分群を $G_\alpha^\circ(\Phi, A)$ とする。このとき、[3]と同じ手法によって次の定理が得られる。

定理2. 可換環 A において 2 が invertible とし、条件(CII)が満たされているとする。^(G は単連結) $\Phi_\alpha = {}^2A_{2n+1} (n \geq 1), {}^2D_n (n \geq 4)$ 2E_6 のとき $|A_\alpha/\mathfrak{m}_\lambda| \geq 5$, \mathfrak{m}_λ : 任意の max. ideal が"或"ならば $\Phi_\alpha \neq {}^2A_2, \neq {}^2A_4$ とする。 $E(\Phi_\alpha, A)$ の任意の元 z を正規化され
(5)

る $G_0^*(\Phi, A)$ の部分群 N に対し, A の σ -不変 ideal I が一意的に存在し.

$$G_0^*(\Phi, I) \supset N \supset E(\Phi_0, I)$$

と存する, ところで $G_0^*(\Phi, I)$ は $\{x \in G_0^*(\Phi, A) \mid [x, G_0^*(\Phi, A)] \subset G_0^*(\Phi, I)\}$ から生成される $G_0^*(\Phi, A)$ の部分群である。

文献

- [1] E. Abe: Chevalley groups over local rings. Tohoku Math. J., 21(1969) 474-494.
- [2] — : Coverings of twisted Chevalley groups over commutative rings. Sc. Rep. T. K. D. Sect. A, 13(1976) 194-218.
- [3] E. Abe, K. Suzuki: On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings. Tohoku Math. J., 28(1976) 185-198.
- [4] K. Suzuki: On normal subgroups of twisted Chevalley groups over local rings. Sc. Rep. T. K. D. Sect. A, 13(1976) 238-249.
- [5] W. Klingenberg: Linear Gruppen über lokalen Ringen. Amer. J. Math., 83(1961) 137-153.
- [6] G. Strecker: Unitäre Gruppen über beliebigen lokalen Ringen. J. Algebra, 57(1979) 258-270.