数理解析研究所講究録
第 395 巻 1980 年 1-5

モジュラー束と分配束との間の中間の束について

神戸大教育　田村 三郎

モジュラー束と分配束との間にある中間の束のあるシリーズを等式によって定式化することが，この小論の一つの目的である．

定義 1．モジュラー束 M の任意の元 $x_1, x_2, \cdots$ に対し，$\delta_0, \delta_1, \cdots, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots$ を次のように定義する．

$$\delta_0 = x_1 \cup x_2$$

$$\varepsilon_0 = x_2$$

$$\delta_{2n-1} = \bigcup_{i=1}^{2n-1} (x_i \cap x_{2n+1}) \cup (\delta_{2n-2} \cap x_{2n+1})$$

$$\varepsilon_{2n-1} = \bigcup_{i=1}^{2n-1} (x_i \cap x_{2n+1}) \cup (\varepsilon_{2n-2} \cap x_{2n+1})$$

$$\delta_{2n} = \bigcap_{i=1}^{2n} (x_i \cup x_{2n+2}) \cap (\delta_{2n-1} \cup x_{2n+2})$$

$$\varepsilon_{2n} = \bigcap_{i=1}^{2n} (x_i \cup x_{2n+2}) \cap (\varepsilon_{2n-1} \cup x_{2n+2})$$

モジュラー束 M の任意の元 $x_1, \cdots, x_{n+2}$ が

等式　$\delta_n = \varepsilon_n$

を満足するとき，このモジュラー束MをD_n束という．

定義2．最小元0と最大元1を持つ$n+4$元束

$$L_n = \{0, p_1, \cdots, p_{n+2}, 1\}$$

において，$p_1, \cdots, p_{n+2}$がお互いに比較不能であるとき，この$n+4$元束L_nをn本マスという．

補助定理1．$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \delta_0, \delta_1, \cdots$が定義されているとき，各$x_i$に対し，$n$本マス$L_n$の元$p_i$を代入すれば，負でない整数$k$に対して

$$\delta_{2k} = 1, \qquad \varepsilon_{2k} = p_{2k+2}$$

$$\delta_{2k+1} = p_{2k+3}, \quad \varepsilon_{2k+1} = 0$$

証明．kについての帰納法による．

$k=0$のとき，$\delta_0 = p_1 \cup p_2 = 1$，$\varepsilon_0 = p_2$

$$\delta_1 = (p_1 \cap p_3) \cup (\delta_0 \cap p_3) = 0 \cup (1 \cap p_3) = p_3$$

$$\varepsilon_1 = (p_1 \cap p_3) \cup (\varepsilon_0 \cap p_3) = 0 \cup (p_2 \cap p_3) = 0$$

kより小さいときを仮定し，一般のステップkについて考える．

$$\delta_{2k} = \bigcap_{i=1}^{2k} (p_i \cup p_{2k+2}) \cap (\delta_{2k-1} \cup p_{2k+2}) = 1 \cap 1 = 1$$

$$\varepsilon_{2k} = \bigcap_{i=1}^{2k} (p_i \cup p_{2k+2}) \cap (\varepsilon_{2k-1} \cup p_{2k+2}) = 1 \cap p_{2k+2} = p_{2k+2}$$

$$\delta_{2k+1} = \bigcup_{i=1}^{2k+1} (p_i \cap p_{2k+3}) \cup (\delta_{2k} \cap p_{2k+3}) = 0 \cup p_{2k+3} = p_{2k+3}$$

$$\varepsilon_{2k+1} = \bigcup_{i=1}^{2k+1} (p_i \cap p_{2k+3}) \cup (\varepsilon_{2k} \cap p_{2k+3}) = 0 \cup 0 = 0$$

定理2. n本マスL_nはD_n束ではない.

証明. $x_i = p_i$と置くと, 補助定理1より$\delta_n \neq \varepsilon_n$. したがって, L_nはD_n束ではない.

定理3. n本マスL_nはD_{n+1}束である.

証明. $L_n = \{0, p_1, \cdots, p_{n+2}, 1\}$の各元を代入したとき, 等式$\delta_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$を満たすことを, nについての帰納法で証明する.

$n=0$のとき. D_1束は分配束自身であるし, 0本マスL_0は分配束になっているので, D_1束である.

nより小さいときを仮定し, 一般のステップnについて考える. $x_1, \cdots, x_{n+2}, x_{n+3}$に対し, n本マスL_nの任意の元を代入する.

1) $x_1, \cdots, x_{n+2}$に対し, あるp_iを代入していないと

する．帰納法の仮定より $\delta_n = \varepsilon_n$ がいえるので，$\delta_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$ もいえる．

2) $x_1, \cdots, x_{n+2}$ に対し，すべての p_i を代入しているときを考える．このとき，$x_i = p_i$ と考えても一般性を失わない．

○ $n = 2k$ のとき

補助定理1より，$\delta_{2k} = 1$，$\varepsilon_{2k} = p_{2k+2}$

$$\delta_{2k+1} = \bigcup_{i=1}^{2k+1} (p_i \cap x_{2k+3}) \cup (1 \cap x_{2k+3}) = x_{2k+3}$$

$$\varepsilon_{2k+1} = \bigcup_{i=1}^{2k+1} (p_i \cap x_{2k+3}) \cup (p_{2k+2} \cap x_{2k+3})$$

イ) $x_{2k+3} = 0$ なら，$\varepsilon_{2k+1} = 0 = \delta_{2k+1}$

ロ) $x_{2k+3} = p_j$ なら，$\varepsilon_{2k+1} = p_j = \delta_{2k+1}$

ハ) $x_{2k+3} = 1$ なら，$\varepsilon_{2k+1} = 1 = \delta_{2k+1}$

○ $n = 2k-1$ のとき

補助定理1より，$\delta_{2k-1} = p_{2k+1}$，$\varepsilon_{2k-1} = 0$

$$\delta_{2k} = \bigcap_{i=1}^{2k} (p_i \cup x_{2k+2}) \cap (p_{2k+1} \cup x_{2k+2})$$

$$\varepsilon_{2k} = \bigcap_{i=1}^{2k} (p_i \cup x_{2k+2}) \cap (0 \cup x_{2k+2}) = x_{2k+2}$$

$x_{2k+2} = 0, p_j, 1$ のどの場合も，$\delta_{2k} = x_{2k+2} = \varepsilon_{2k}$

以上をまとめると，

1) D_1束は分配束と一致する.

2) 各D_n束はモジュラー束である.

3) 各D_n束はD_{n+1}束である.

4) n本マスL_nはD_n束ではないが, D_{n+1}束である.

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[d, Rightarrow, "/" marking] \arrow[dr, Rightarrow] & & & L_n \arrow[d, Rightarrow, "/" marking] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
\text{分配束} \arrow[r, Rightarrow] & D_2\text{束} \arrow[r, Rightarrow] & \cdots \arrow[r, Rightarrow] & D_n\text{束} \arrow[r, Rightarrow] & D_{n+1}\text{束} \arrow[r, Rightarrow] & \cdots \arrow[r, Rightarrow] & \text{モジュラー束}
\end{tikzcd}$$