数理解析研究所講究録
第 399 巻 1980 年 24-37

Peak sets と Subnormal Operators およびその周辺

琉球大教育　　呉屋永徳

§1. H, K はヒルベルト空間とする。Operator $T \in B(H)$ が subnormal とは，$K(\supset H)$ と normal Operator $N \in B(K)$ があって，$N|H = T$ であること。またこの N が T の the minimal normal extension とは，K_0($: H \subset K_0 \subset K$) を T の reducing subspace とするとき，$K_0 = K$ となることである。このとき，$\sigma(N) \subset \sigma(T)$ であることはよく知られている。

次に，Operator $W \in B(H, K)$ が 1:1 で dense range をもつとき，W を quasi- affinity（略して，q- affinity とかく）という。$T \in B(H)$ が $S \in B(K)$ の quasi- affine transform（略して，q- affine transform とかく）とは，$SW = WT$ となる q- affinity $W \in B(H, K)$ が存在することをいう。このとき，特に S が subnormal Operator ならば，$\sigma(S) \subset \sigma(T)$ である（Fong [3]）。次に，$X \subset \mathbb{C}$ を compact set，$R(X)$ を unif closure of rational functions with poles off X，$C(X)$ を X 上の continuous function の algebra とする。closed set $Q \subset X$ が peak set of $R(X)$ とは，$f(z) \equiv 1$ on Q でかつ $|f(z)| < 1$ on X/Q となる function $f \in R(X)$ が存在すること。このとき，f を peak function for Q という。X が spectral set for T とは，

(1). $X \supset \sigma(T)$ (2) rational function $r \in R(X)$ に対して，

$\|r(T)\| \leq \|r\|_X$ が成立つことである。

T が subnormal operator ならば，$\sigma(T)$ が spectral set for T であることは明らかである。

以後 X を spectral set for T とする。このとき，

Unital hom ; $R(X) \ni f \longrightarrow f(T) \in B(H)$ でかつ

$f(z) \equiv z$ ならば $f(T) = T$

が一意に存在する。

実際 $f \in R(X)$ に対して，rational functions $g_n \in R(X)$ があって，$\|f - g_n\|_X \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ である。

$$\| g_n(T) - g_m(T) \| \leq \| g_n - g_m \|_X \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

より，$f(T) = \lim_{n \to \infty} g_n(T)$ は存在する。$f(T)$ が $\{g_n\}$ の選び方に依存せずかつ $\|f(T)\| \leq \|f\|_X$ が成立つことは明らかである。

更に次の関係が成立つ。

(1・1) $f(X)$ は spectral set for $f(T)$ である。

(1・2) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$

(1・3) $R(X) = C(X)$ ならば，T は normal である。

(1·4)　$g \in R(f(X))$ に対して，

$(g \cdot f)(T) = g(f(T))$ である。

詳細は [1] 参照

この報告は $R(X)$ の peak sets と T の reducing subspace との関係およびそれと関連する問題について，C.R. putnam [6] C.K. Fong [3] の結果を紹介するのが主な目的である。

§2. ここでは，T が subnormal operator のときの C.R. Putnam の結果を紹介しよう。

定理1 (Putnam[6]). $N = \int z\,dE_z \in B(K)$ を subnormal operator $T \in B(H)$ の the minimal normal extension とする。

(i)　Q : proper peak set of $R(\sigma(T))$, $E(Q) \neq 0$

であるならば，$E(Q)H$ は T の nontrivial reducing subspace で，$N/E(Q)K$ は $T/E(Q)H$ の the minimal normal extension でかつ (2·1) が成立つ。

(2·1)　$\sigma(T|E(Q)H) \subset Q$

更に，

(ii)　$R(Q) = C(Q)$

ならば，(2·2) が成立つ。

(2·2)　$T/E(Q)H$ は normal operator である。

証明. $P = P_H$ を H 上への projection とする。$\sigma(T)$ は spectral set for T でかつ $\sigma(N) \subset \sigma(T)$ であるから，$f \in R(\sigma(T))$

と $x \in H$ に対して、

$$(2\cdot3) \qquad f(T)x = f(N)x, \quad f(T)^n x = f(N)^n x$$

が成立つ。今 f を peak function for Q すなわち、$f(z) \equiv 1$ on Q でかつ $|f(z)| < 1$ on $\sigma(T) \backslash Q$ とする。$f^n(z) \longrightarrow \chi_Q$ により、$f(N)^n x \longrightarrow E(Q)x$ である。従って $(2\cdot3)$ より、

$$E(Q)H \subset H$$

である すなわち、H は $E(Q)$ の reducing subspace である。また $x \in H$ に対して、

$$TE(Q)x = \lim_{n\to\infty} Tf(T)^n x = \lim_{n\to\infty} f(T)^n Tx = E(Q)Tx$$

であることと、H が projection $E(Q) \in B(K)$ の reducing subspace であることから、$E(Q)H$ は T の reducing subspace である。$(2\cdot1)$ より、$E(Q)H \neq H$ である。今 $E(Q)H = \{0\}$ としよう。このとき、$E(Q)P = 0$ である。従って任意の整数 $j \geq 0$ に対して、

$$(2\cdot4) \qquad E(Q)N^{*j}P = N^{*j}E(Q)P = 0$$

である。$K = \overline{\text{lin span}}\{N^{*j}x \,;\, x \in H, j \geq 0\}$ であるから、$(2\cdot4)$ より $E(Q)K = \{0\}$ となる。これは (i) に反する。以上で $E(Q)H$ が T の nontrivial reducing subspace であることは示された。

次に、$N_1 = N / E(Q)K$ が $T / E(Q)H$ の the minimal normal-extension であることを示そう。実際、$E(Q)H \subset K_0 \subset E(Q)K$ で、K_0 を N_1 の reducing subspace とする。

このとき，$N_1^{*j}K_0 \subset K_0$ より $N_1^{*j}E(Q)H \subset K_0$ である。ところが，

$$E(Q)N^{*j}H = N^{*j}E(Q)H = N_1^{*j}E(Q)H \subset K_0$$

より，$E(Q)K \subset K_0$ すなわち，$E(Q)K = K_0$ である。

最後に，(2·1) を示そう。まず，

$$(2\cdot5) \qquad \partial\sigma(T|E(Q)H) \subset Q$$

を示す。$z \in \partial\sigma(T|E(Q)H)$ としよう。このとき，$x_n = E(Q)x_n$ ($x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$) があって，

$$(T-z)x_n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

である。$\|(T-z)x_n\| = \|(N_1-z)x_n\| \geqq \mathrm{dist}[z, \sigma(N_1)]\|x_n\| \geqq \mathrm{dist}[z, Q]$ より，$z \in \overline{Q} = Q$ である。次に，

$$\sigma(T|E(Q)H) = \partial\sigma(T|E(Q)H) \cup \mathrm{int}\,\sigma(T|E(Q)H)$$

であるから，(2·5) より，$R = \mathrm{int}\,\sigma(T|E(Q)H) \subset Q$ を示せば，(2·1) は証明される。(2·5) より，$\partial R \subset Q$ である。また，$\sigma(T|E(Q)H) \subset \sigma(T)$ より，$R \subset \sigma(T)$ である。今 f を peak-function for Q すなわち，$f(z) \equiv 1$ on Q でかつ $|f(z)| < 1$ on $\sigma(T) \setminus Q$ とする。このとき，f は analytic on R で contenous on $\overline{R} = R \cup \partial R$ でかつ $f(z) \equiv 1$ on ∂R である。今 Ω_0 を R の任意の component とするとき，$\partial\Omega_0 \subset \partial R$ であるから，$f(z) \equiv 1$ on $\partial\Omega_0$ である。最大値の原理により，$f(z) \equiv 1$ on Ω_0 となり，$\Omega_0 \subset Q$ を得る。ゆえに $R \subset Q$ である。

(2·2) は (1·3) と (2·1) より明らかである。 (証終)

ある特別な peak sets に注目することによって，定理1からいくつかの結果がみちびかれる。

系1 (Olin[2. Corollary 7.11])． $T \in B(H)$ を completely subnormal contraction with the minimal normal extension $N = \int z\,dE_z$ on $K \supset H$ とする。このとき，$Z \subset (|z|=1)$ が arc length measure zero の Borel set であれば，$E(Z) = 0$ である。

証明は Putnam[6] による。$\sigma(N) \subset \sigma(T)$ でかつ $E(Z \cap \sigma(T)^c) = 0$ により，$Z \subset \sigma(T)$ としてよい。またすべての $x \in K$ に対して，$(E(\ )x, x)$ は regular であるから，Z を closed と仮定してよい。Z が peak set であることを示そう。

F. and M. Riesz (cf. [7. p36~37]) は次の性質をもつ function $f \in C(|z|\leq 1)$ の存在を示した。

f は analytic on R で $f(z) \equiv 1$ on Z でかつ

$|f(z)| < 1$ on $Z^c \cap (|z|\leq 1)$ である。

Mergelyan の定理 (cf. [8. Theorem 20.5]) により，f は $(|z|\leq 1)$ 上で多項式によって一様に近似される。$\sigma(T) \subset (|z|\leq 1)$ であるから，$f \in R(\sigma(T))$ である。よって，Z は peak set である。Z は Lebesque measure zero であるから，Hartogs - Rosental の定理 (cf. [4. P47]) により，$C(Z) = R(Z)$ である。定理1 (2.2) と T が completely subnormal であることから，$E(Z) = 0$

を得る。 (証終)

注. Z が peak set であることが示されたら，(2・1) と Theorem 1 の系 [5] により，$T/E(Z)H$ は normal operator になる。

系1の結果は一般の Jordan 閉曲線に対しても次の場合には成立つ。

系2 (Putnam [6])． $T\in B(H)$ は completely subnormal with the minimal normal extension $N=\int z\,dE_z$ on $K\supset H$ とする。C が長さをもつ Jordan 閉曲線でかつ

(2・6) $\sigma(T)\subset C\cup \mathrm{int}(C)$ または

$\subset C\cup \mathrm{ext}(C)$

ならば，arc length measure zero の Borel set $Z\subset C$ に対して，$E(Z)=0$ である。

証明は Putnam [6] 参照

§3. C. R. Putnam の結果は C. K. Fong によって subnormal operator の q-affine transform に対しても成立つことが示された。ここでは Fong の結果を紹介する。

定理2 (Fong [3])． $T\in B(H)$ を q-affine transforms of subnormal operator $S\in B(K)$ とし，X を spectral set for T でかつ Q を peak set of $R(X)$ とする。このとき，

(1)． projection $F(Q)\in B(H)$ が存在して，

$F(Q)H = X_T(Q)$ で $F(Q)$ は T で生成された weakly closed inverse closed algebra $W(T)$ の元である。

(2). $T|F(Q)H$ ($T|(I-F(Q))H$) は g-affine transforms of subnormal operator であり, Q は spectral set for $T|F(Q)H$ である。

証明. いくつかの step に分ける。

$W \in B(H, K)$ を g-affinity で $SW = WT$ とし, $N = \int z\,dE_z \in B(\hat{K})$ を S の the minimal normal extension とする。

$\hat{W}x = Wx$ $(x \in H)$ とおけば, $\hat{W} \in B(H, \hat{K})$ は 1:1 で $\overline{\hat{W}H} = K$ でかつ

$$N\hat{W} = \hat{W}T$$

である。$\sigma(N) \subset \sigma(S) \subset \sigma(T) \subset X$ より, $g \in R(X)$ に対して,

$$g(N)\hat{W} = \hat{W}g(T)$$

である。

step 1. projection $F(Q) \in B(H)$ があって,

$E(Q)\hat{W} = \hat{W}F(Q)$ でかつ $F(Q) \in W(T)$ である。

実際 $f \in R(X)$ を peak function for Q すなわち, $f(z) \equiv 1$ on Q でかつ $|f(z)| < 1$ on X/Q とする。

$$\|f(T)^n\| = \|f^n(T)\| \leq \|f^n\|_X \leq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

であるから, $\{f(T)^n;\ n = 1, 2, 3, \cdots\}$ は weakly converge する subsequence をもつ。例えば,

$$(w)-\lim_{j\to\infty} f(T)^{n_j} = F(Q)$$

とする。$f^n(z) \longrightarrow \chi_Q\ (z\in X)$ で，$f(N)^n = \int f^n(z)\,dE_z$ であるから

$$(s)-\lim_{n\to\infty} f(N)^n = E(Q)$$

である。また，$f(N)^{n_j}\hat{W} = \hat{W} f(T)^{n_j}$ より

$$E(Q)\hat{W} = \hat{W}F(Q)$$

を得る。

$$\hat{W}F(Q)^2 = E(Q)^2\hat{W} = E(Q)\hat{W} = \hat{W}F(Q)$$

と，$\hat{W}$ が 1:1 であることから $F(Q)^2 = F(Q)$ となる。$F(Q)$ は contraction であるから，実は projection である。また $F(Q)\in W(T)$ であることはその作り方から明らかである。

step 2. $T_1 = T/F(Q)H$ は g-affine transforms of subnormal operator である。

実際 $f(T)^{n_j}T = Tf(T)^{n_j}$ でかつ $F(Q) = (w)-\lim_{j\to\infty} f(T)^{n_j}$ であるから，$F(Q)T = TF(Q)$ となる。よって，$F(Q)H$ は T の reducing subspace である。また $E(Q)\hat{W} = \hat{W}F(Q)$ より $\hat{W}F(Q)H \subset E(Q)\hat{K}$ である。$N_1 = N/E(Q)\hat{K}$, $W_1x = \hat{W}x$; $F(Q)H \longrightarrow E(Q)\hat{K}$ とおけば，N_1 は normal operator で $\sigma(N_1)\subset Q$ であり，W_1 は 1:1 でかつ $N_1W_1 = W_1T_1$ である。$\overline{W_1F(Q)H}$ は N_1- invariant であるから，$N_1' = N_1/\overline{W_1F(Q)H}$ は subnormal operator でかつ

$$N_1'W_1' = W_1'T_1$$

である。ここに，$W_1'x = W_1x$; $F(Q)H \longrightarrow \overline{W_1F(Q)H}$

は g — affinity である。

step 3. $g \in R(X)$ を rational function とすれば，

$$\| g(T_1) \| \leq \| g \|_Q \text{ である。}$$

step 3 の Fong の証明には若干あいまいさがある。これを正そう。はじめに，$C\ (\subset X)$ を compact set で $C \cap Q = \phi$ とする。

$$\| g(T) f(T)^n \| \leq \| g f^n \|_X = \max (\| g f^n \|_{X \setminus C}, \| g f^n \|_C)$$

$$\leq \max \{ \| g \|_{X \setminus C}, \| g f^n \|_C \} \longrightarrow \| g \|_{X \setminus C} \quad (n \to \infty)$$

である。$F(Q) = (w) - \lim_{j \to \infty} f(T)^{n_j}$ であるから，

$$\| g(T) F(Q) \| \leq \| g \|_{X \setminus C}$$

である。また C は任意であるから，

$$\| g(T) F(Q) \| \leq \| g \|_Q$$

である。$\| g(T_1) \| \leq \| g(T) F(Q) \|$ より step 3 が得られる。

step 4. $r \in R(Q)$ を rational function とするとき，rational functions $g_n \in R(X)$ があって，

$$\| g_n - r \|_Q \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

である。

まず任意の component $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus Q$ に対して，$\Omega \not\subset X$ を示そう。$\Omega \subset X$ としよう。$Q \cap \Omega = \phi$ により Q の peak function $f \in R(X)$ に対して，$f-1$ は non zero，analytic on Ω で $f-1 \equiv 0$ on $\partial\Omega$ である。これは最大値の原理に反する。従って，Runge の定理 (cf.[8. Theorem 13.6]) により，上記の g_n を求め

ることが出来る。

さて以上の結果を用いて，$X_T(Q)=F(Q)H$ および Q が spectral set for T_1 であることを示そう。

今 $r\in R(Q)$ を rational function とする。step 4 より，rational functions $g_n\in R(X)$ があって，

$$\|g_n-r\|_Q \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

である。step 3 より，

$$\|g_n(T_1)-g_m(T_1)\|\leqq\|g_n-g_m\|_Q\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

であるから，$Tr=\lim_{n\to\infty}g_n(T_1)$ は存在する。Tr は $\{g_n\}$ の選び方に依存せずかつ $\|Tr\|\leqq\|r\|_Q$ が成立つことは明らかである。

まず $\sigma(T_1)\subset Q$ を示そう。

$N_1W_1=W_1T_1$ より，$g_n(N_1)W_1=W_1g_n(T_1)$ である。N_1 は normal であるから，$n\to\infty$ として，

$$r(N_1)W_1=W_1Tr$$

である。今 $\mu\notin Q$ として，$r(z)=(z-\mu)^{-1}$ とおくと，$\sigma(N_1)\subset Q$ より，$r(N_1)=(N_1-\mu)^{-1}$ となり，

$$(N_1-\mu)^{-1}W_1=W_1Tr$$

である。$W_1=(N_1-\mu)^{-1}(N_1-\mu)W_1=(N_1-\mu)^{-1}W_1(T_1-\mu)=W_1Tr(T_1-\mu)$ であることと W_1 が 1:1 であることから，$Tr(T_1-\mu)=I$ となる。また，$g_n(T_1)T_1=T_1g_n(T_1)$ より $TrT_1=T_1Tr$ となるから，$\mu\notin\sigma(T_1)$ である。

次に，$r(T_1) = T_r$ を示す。

$\sigma(N_1)$，$\sigma(T_1) \subset Q$ でかつ $N_1 W_1 = W_1 T_1$ であるから，

$$R(\lambda : N_1) W_1 = W_1 R(\lambda : T_1) \quad (\lambda \notin Q)$$

である。従って，$W_1 r(T_1) = r(N_1) W_1 = W_1 T_r$ となり，W_1 が $1:1$ であることから，$T_r = r(T_1)$ を得る。

最後に，$F(Q)H = X_T(Q)$ を示そう。

$x \in X_T(Q) \iff (T-z)f(z) \equiv x$ on $\mathbb{C}\backslash Q$ となる analytic function $f : \mathbb{C}\backslash Q \longrightarrow H$ が存在すること

である。$\sigma(T_1) \subset Q$ より，$f(z) = (T_1 - z)^{-1} F(Q)x$ $(x \in H)$ は analytic on $\mathbb{C}\backslash Q$ でかつ $(T-z)f(z) \equiv F(Q)x$ on $\mathbb{C}\backslash Q$ であるから，$F(Q)H \subset X_T(Q)$ である。次に，$x \in X_T(Q)$ で，$f : \mathbb{C}\backslash Q \longrightarrow H$ を analytic function でかつ $(T-z)f(z) \equiv x$ on $\mathbb{C}\backslash Q$ とする。

$$(N-z)\hat{W} f(z) = \hat{W}(T-z)f(z) \equiv \hat{W}x \text{ on } \mathbb{C}\backslash Q$$

より，$\hat{W}x \in X_N(Q) = E(Q)\hat{K}$ である。$\hat{W}F(Q)x = E(Q)\hat{W}x = \hat{W}x$ と $\hat{W}$ が $1:1$ であることから，$F(Q)x = x$ すなわち，$x \in F(Q)H$ である。 (証終)

系 1 は次のように一般化される。

系 (Fong [3])。$T \in B(H)$; (1) Completly non normal contraction. (2) q - affine transforms of subnormal operator $S \in B(K)$ with the minimal normal extension $N = \int z\, dE_z$ on $\hat{K} \supset K$ とする。このとき，

$Z \subset (|z| \leq 1)$ が arc length measure zero の Borel set であれば，$E(Z)=0$ である。

証明は系1の証明を部分的に修正することによって得られるから，ここでは省略する。

注　系1の自然な拡張としては，T に completely non-normal を要求するのではなく，S に completely subnormal を要求すべきであろう。Fong [3. prop3] により，次の主張も正しいことがわかる。

$T \in B(H)$ $(\|T\| \leq 1)$ は q-affine transforms of completely subnormal operator $S \in B(K)$ with the minimal normal extension $N = \int z\,dE_z$ on $\hat{K} \supset K$ とする。このとき，

$Z \subset (|z| \leq 1)$ が arc length measure zero の Borel set であれば $E(Z)=0$ である。

参考文献

[1] S. K. Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator theory, GTM, Springer-Verlag,

[2] Conway and Olin, A functional calculus for subnormal operator II, Memo, Amer, Math, soc, 184 (1977),

[3] C. K. Fong, Quasi-affine transforms of subnormal Operators, Pacific J. Math, Vol 70, NO 2 (1977), 361 — 368

[4] T. W. Gamelin, Uniform algebra, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1969,

[5] C. R. Putnam, An inequality for the area of hyponormal spectra, Math. Z. 28 (1971), 473-477,

[6] ————, Peak sets and Subnormal Operators, Illinois J. Math. Vol 21 NO 2 (1977), 388-394,

[7] F. and M. Riesz, über die randwerte einer analytischen functione, Quatrième Congrès des Math. scand. stockholm, (1916), 27— 44,

[8] W. Rudin, Real and complex analysis, Mc Graw-Hill, N. Y. 1966,