数理解析研究所講究録
第 399 巻 1980 年 108-121

Proper contraction を backward shift の part として表現するときの表現空間の構造について

東北大 教養 吉野 崇

可付番無限次元ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界線形作用素の全体を$\mathcal{B}(\mathcal{H})$とする。任意の作用素$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$は、片側シフトのadjointの部分のスカラー倍とユニタリ同値であることが知られている([3])。ここでは、不変部分空間との関連上、及び、便宜上、$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$について次の諸条件の下で、その表現空間の構造を調べる。(i) $\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\mathcal{H} = \vee\{A^{*n}x_0 ; n=0,1,2,\cdots\}$, $\|x_0\| = 1$ (iii) $\sigma_p(B) \cup \sigma_p(B^*) = \emptyset$ for all $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ such as $BA = AB$ and $B \neq \lambda I$. ここで$\sigma_p(B)$はBの point spectrum を表わす。

<u>補助定理 1.</u> $T = \left[\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n\right]^{\frac{1}{2}} A \left[\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n\right]^{-\frac{1}{2}}$ とすると、(a) $\|T\| < 1$ で (b) $A = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}\, T\, (I - T^*T)^{-\frac{1}{2}}$.

<u>証明</u>. (a) $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|A^{*n}A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^{2n} = \frac{1}{1-\|A\|^2} < 2$ より,

$\mathbf{I} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n < 2\mathbf{I}$ だから, $\|T\| \leqq \|[\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{1/2}\| \ \|A\| \ \|[\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{-1/2}\| < \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 = 1.$

(b) $T^*T = [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{-1/2} A^* [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n] A [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{-1/2} = [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{-1/2} [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n - \mathbf{I}] [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{-1/2}$

$= \mathbf{I} - [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{-1}$ だから $\mathbf{I} - T^*T = [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{-1}$ 従って $(\mathbf{I}-T^*T)^{1/2}\, T\, (\mathbf{I}-T^*T)^{-1/2} = A.$

補助定理 2. 補助定理 1 の $\mathbf{T}$ に対して, isometric transformation W of $\mathcal{H}$ into $H^2_{\mathcal{H}}$ が存在し $W\mathcal{H}$ は S^* で不変で $WT = S^*W$. ここで $H^2_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$-valued ハーディ空間で S は $H^2_{\mathcal{H}}$ 上の片側シフトである ([3]).

証明. $x \in \mathcal{H}$ に対し $\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(I-T^*T)^{1/2} T^n x] z^n$ とするとき, $Wx = \hat{x}(z)$ によって W を定義すれば, $\|Wx\|^2 = \|\sum_{n=0}^{\infty} [(I-T^*T)^{1/2} T^n x] z^n\|^2$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \|(I-T^*T)^{1/2} T^n x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle (I-T^*T) T^n x, T^n x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [\|T^n x\|^2 - \|T^{n+1}x\|^2]$

$= \|x\|^2 - \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^2 = \|x\|^2$ だから, W は isometric transformation of $\mathcal{H}$ into $H^2_{\mathcal{H}}$ で $WTx = \widehat{Tx}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(I-T^*T)^{1/2} T^{n+1} x] z^n = S^*\hat{x}(z) = S^*Wx$ だから, $W\mathcal{H}$ は S^* で不変で $WT = S^*W$ である.

$0 \neq x \in \mathcal{H}$ に対して, E_x を projection of $H^2_{\mathcal{H}}$ onto $\vee\{xz^n;\ n=0,1,2,\cdots\} = [H^2]x$ とすれば, E_x は S と可換で, 次を得る.

補助定理 3. $E_x W\mathcal{H}$ 及びその closure $\widetilde{E_x W\mathcal{H}}$ は $\phi(S)^*$, $\phi(z) \in H^\infty$ で不変である.

証明. $\phi(S)^* E_x W\mathcal{H} = E_x \phi(S)^* W\mathcal{H} \subset E_x W\mathcal{H} \subset \widetilde{E_x W\mathcal{H}}$ よって $\phi(S)^* \widetilde{E_x W\mathcal{H}} \subset \widetilde{E_x W\mathcal{H}}$.

補助定理 4. $E_x W\mathcal{H} \neq \{0\}$.

証明. $\| E_x W (I-T^*T)^{-1/2} x \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| E_x (I-T^*T)^{1/2} T^n (I-T^*T)^{-1/2} x \|^2$

$= \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \| E_x (I-T^*T)^{1/2} T^n (I-T^*T)^{-1/2} x \|^2 \geq \|x\|^2 \neq 0$.

補助定理 5. $\widetilde{E_x W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ で $\dim \widetilde{E_x W\mathcal{H}} > 1$ とすると, $\{0\} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \widetilde{E_x W\mathcal{H}}$ で $\mathcal{M} \cap E_x W\mathcal{H} \neq \{0\}$ であるような S^* の closed な不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在する.

証明. 補助定理 3 により $\widetilde{E_x W\mathcal{H}}$ は S^* で不変であり, 仮定から $\dim \widetilde{E_x W\mathcal{H}} > 1$ だから, [1; Theorem 16] 又は [3; Corollary 3.16] によって, $\{0\} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \widetilde{E_x W\mathcal{H}}$ であるような S^* の closed な不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在する. simply invariant subspace の構造についてのよく知られている結果によって, inner functions $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ が存在して, $[H^2]x \ominus \widetilde{E_x W\mathcal{H}} = \phi_1(S)[H^2]x$, $[H^2]x \ominus \mathcal{M} = \phi_2(S)[H^2]x$ と表わすことが出来る(∵ $\widetilde{E_x W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ だから). 従って $\phi_1(z) = \phi_2(z)\phi_3(z)$ for some inner function $\phi_3(z)$ である. 故に, $\mathcal{M} = \{f(z)x \,;\, f(z) \in H^2,\ \phi_2(S)^* f(z) = 0\}$ で, $\widetilde{E_x W\mathcal{H}} = \{f(z)x : f(z) \in H^2,\ \phi_2(S)^* \phi_3(S)^* f(z) = 0\}$

$$= \phi_3(S)\mathcal{M} \oplus \{f(z)x \,;\, f(z) \in H^2,\ \phi_3(S)^* f(z) = 0\}.$$

従って, $0\neq g(z)x\in E_xW\mathcal{H}$, $g(z)\in H^2$ に対して, $g(z)=g_1(z)\oplus g_2(z)$, $g_1(z)x\in\phi_3(S)\mathcal{M}$ and $g_2(z)x\in\{f(z)x ; f(z)\in H^2,\ \phi_3(S)^*f(z)=0\}$ と表わせる. もし $g_1(z)=0$ ならば, $\mathcal{M}$ の代りに $\{f(z)x ; f(z)\in H^2,\ \phi_3(S)^*f(z)=0\}$ をとれば証明は終了から $g_1(z)\neq 0$ としてよい. 従って, この時 $\phi_3(S)^*g(z)=\phi_3(S)^*g_1(z)\in\mathcal{M}$ だから, 補助定理3によって,
$0\neq\phi_3(S)^*g(z)\in\mathcal{M}\cap E_xW\mathcal{H}$.

<u>定理1</u>. 或る non-zero $x\in\mathcal{H}$ に対して $E_xW\mathcal{H}=[H^2]x$ 又は, $\widehat{E_xW\mathcal{H}}\subsetneq[H^2]x$ ならば, A は non-trivial closed invariant subspace を持つ.

<u>証明</u>. 補助定理1及び2によって, $S^*/W\mathcal{H}$ が non-trivial closed invariant subspace を持つことを示せばよい. $\dim\widehat{E_xW\mathcal{H}}>1$ ならば, 補助定理5によって, いづれの場合にも,
$\{0\}\subsetneq\mathcal{M}\subsetneq\widehat{E_xW\mathcal{H}}$ 且つ $\mathcal{M}\cap E_xW\mathcal{H}\neq\{0\}$ なる S^* の closed な不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在するから. $0\neq g(z)\in\mathcal{M}\cap E_xW\mathcal{H}$ に対して, $\hat{u}(z)$ を $E_x\hat{u}(z)=g(z)$ なる $W\mathcal{H}$ の vector とするとき, $\mathfrak{m}=\vee\{S^{*n}\hat{u}(z) ; n=0,1,2,\cdots\}$ を作れば, $\mathfrak{m}$ は明らかに S^* で不変で補助定理2によって
$\{0\}\subsetneq\mathfrak{m}\subset W\mathcal{H}$ である. $\phi(z)\in H^\infty$ に対して $E_x\phi(S)^*\hat{u}(z)=\phi(S)^*E_x\hat{u}(z)$ $=\phi(S)^*g(z)\in\mathcal{M}$ だから, $\{0\}\subsetneq E_x\mathfrak{m}\subset\mathcal{M}$ 従って, $\{0\}\subsetneq\widehat{E_x\mathfrak{m}}\subset\mathcal{M}\subsetneq\widehat{E_xW\mathcal{H}}$ よって $\{0\}\subsetneq\mathfrak{m}\subsetneq W\mathcal{H}$. 故に $\mathfrak{m}$ は求める $S^*/W\mathcal{H}$ の不変部分空間で

ある．補助定理4により，最後に $\dim E_x\widetilde{W\mathcal{H}} = 1$ としてよい．この場合 $E_x\hat{u}(z)=0$ なる $0\neq \hat{u}(z)\in W\mathcal{H}$ が存在するから，$\mathfrak{M} = \vee\{S^{*n}\hat{u}(z);\ n=0,1,2,\cdots\}$ とすれば，$\mathfrak{M}$ は明らかに S^* で不変で補助定理2により $\{0\}\subsetneqq \mathfrak{M}\subset \widetilde{W\mathcal{H}}$．又 $\phi(z)\in H^\infty$ に対して，$E_x\phi(S)^*\hat{u}(z) = \phi(S)^*E_x\hat{u}(z)=0$ だから，$E_x\mathfrak{M}=\{0\}$ よって $\mathfrak{M}\subsetneqq \widetilde{W\mathcal{H}}$ 何故なら補助定理4より $E_x\widetilde{W\mathcal{H}}\neq\{0\}$ だから．故に $\mathfrak{M}$ は求める $S^*|\widetilde{W\mathcal{H}}$ の不変部分空間である．

<u>註1</u>. $E_x W\mathcal{H} = [H^2]x$ ならば，x は A^* の cyclic vector ではない．実際，$E_xW\mathcal{H}=[H^2]x$ ならば，$E_xWy = x$ なる $0\neq y\in\mathcal{H}$ が存在する．この時，$E_x(I-T^*T)^{1/2}y = x$ で $E_x(I-T^*T)^{1/2}T^ny=0$ for all $n=1,2,\cdots$ だから，$\langle (I-T^*T)^{1/2}Ty,\ A^{*n}x\rangle = \langle (I-T^*T)^{1/2}T^{n+1}y,\ x\rangle = \langle E_x(I-T^*T)^{1/2}T^{n+1}y,\ x\rangle = 0$ for all $n=0,1,2,\cdots$．又，A の仮定(iii)より $(I-T^*T)^{1/2}Ty = A(I-T^*T)^{1/2}y\neq 0$ だから，$\vee\{A^{*n}x;\ n=0,1,2,\cdots\}\subsetneqq\mathcal{H}$．

<u>註2</u>. 次は同値である．

(a) 或る $0\neq x\in\mathcal{H}$ に対して $\widetilde{E_xW\mathcal{H}}\subsetneqq[H^2]x$

(b) $A^*\in$ the class C_0 defined by Sz.-Nagy and C. Foias [2].

(c) $\widetilde{E_xW\mathcal{H}}\subsetneqq[H^2]x$ for all non-zero $x\in\mathcal{H}$.

実際，$\widetilde{E_xW\mathcal{H}}\subsetneqq[H^2]x$ for some non-zero $x\in\mathcal{H}$ ならば，補助定理4より $\widetilde{E_xW\mathcal{H}}\supsetneqq\{0\}$ だから，或る inner function $q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nz^n$ が

存在して，$[H^2]x \ominus \widetilde{E_x W \mathcal{H}} = q(S)[H^2]x$ と表わすことができる．従って，$\langle q(S)x, W\mathcal{H}\rangle = \langle q(S)x, E_x W\mathcal{H}\rangle = 0$．この時，任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle q(T^*)(I-T^*T)^{1/2}x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle q_n x, (I-T^*T)^{1/2}T^n y\rangle = \langle q(S)x, \hat{y}(z)\rangle = 0$ 従って，補助定理1により，$(I-T^*T)^{1/2}q(A^*)x = q(T^*)(I-T^*T)^{1/2}x = 0$．Aに対する仮定(iii)より，$q(A^*)=0$ でなければならない．故に $A^* \in$ the class C_0．次に $A^* \in$ the class C_0 ならば，inner function $q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ が存在して $q(A^*)=0$ である．この時，補助定理1により，$q(T^*)(I-T^*T)^{1/2}x = (I-T^*T)^{1/2}q(A^*)x = 0$ for all non-zero $x \in \mathcal{H}$．よって，$\langle q(S)x, \hat{y}(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle q_n x, (I-T^*T)^{1/2}T^n y\rangle = \langle q(T^*)(I-T^*T)^{1/2}x, y\rangle = 0$ for all $y \in \mathcal{H}$．従って，$\langle q(S)x, E_x W\mathcal{H}\rangle = \langle q(S)x, W\mathcal{H}\rangle = 0$．故に，$\widetilde{E_x W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ for all non-zero $x \in \mathcal{H}$．

<u>定理2</u>．任意の $0 \neq x \in \mathcal{H}$ に対して，$\widetilde{E_x W\mathcal{H}} = [H^2]x$ である．

<u>証明</u>．或る $0 \neq x \in \mathcal{H}$ に対して，$\widetilde{E_x W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ ならば，註2により $A^* \in$ the class C_0．従って，或る inner function $q(z)$ が存在して $q(A^*)=0$．$q(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ で analytic で，仮定(i)より $\sigma(A^*) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ だから，spectral mapping theorem により $q(\sigma(A^*)) = \sigma(q(A^*)) = \{0\}$．従って $\sigma(A^*)$ は $q(z)$ の zero point の集合に含まれる．$q(z)$ は inner だから，non-zero よって $\sigma(A^*)$ は

有限個である。故に $q(A^*) = q_1(A^*)\,q_2(A^*)$, $q_1(A^*)$ は A^* の多項式, $q_2(A^*)$ は invertible と分解できる。これは A の仮定(iii)に反す。

次に、$W\mathcal{H}$ の orthogonal complement in $H^2_{\mathcal{H}}$ を調べる。

<u>補助定理 6</u>. 任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して、$-A^*y + yz \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$.

<u>証明</u>. 補助定理 1 によって、任意の $\hat{x}(z) \in W\mathcal{H}$ に対して、

$$\langle -A^*y + yz, \hat{x}(z)\rangle = \langle -A^*y, (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}x\rangle + \langle y, (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}Tx\rangle$$

$$= -\langle T^*(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}y, x\rangle + \langle y, (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}Tx\rangle = 0.$$

<u>定理 3</u>. $H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} = \vee\{z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\,;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\}$.

<u>証明</u>. 補助定理 6 より $\vee\{z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\,;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\} \subset H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ だから, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \in [H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}] \ominus \vee\{z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\,;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ とすると, 任意の $\hat{x}(z) \in W\mathcal{H}$ に対して, $0 = \langle g(z), \hat{x}(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle g_n, (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}T^n x\rangle$ $= \langle \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}g_n, x\rangle$ よって $\sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}g_n = 0$. $g(z)$ は又, $\vee\{z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\,;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ とも直交しているから, 各 $m, n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, $0 = \langle g(z), z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\rangle$ $= \langle g_m, -A^{*n+1}x_0\rangle + \langle g_{m+1}, A^{*n}x_0\rangle = \langle -Ag_m + g_{m+1}, A^{*n}x_0\rangle$. よって, $g_{m+1} = A g_m = A^2 g_{m-1} = \cdots = A^{m+1} g_0$ ($\because$ x_0 は A^* の cyclic vector).

故に、$0=\sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)^{\frac{1}{2}} g_n = \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)^{\frac{1}{2}} A^n g_0 = \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)\, T^n (I-T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_0$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (T^{*n}T^n - T^{*n+1}T^{n+1})(I-T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_0 = (I-T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_0 - \lim_{n\to\infty} (T^{*n}T^n)(I-T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_0 = (I-T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_0.$

よって $g_0=0$ 従って. $g_m=0$, $m=1,2,\cdots$. 故に $g(z)=0$ である.

A に対する仮定(iii) より $\sigma_p(A^*)=\phi$ だから, $\{A^{*n}x_0 \,;\, n=0,1,2,\cdots\}$ は 1 次独立. 従って. $x_n = \dfrac{A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0 ; x_k\rangle x_k}{\| A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k \|}$, $n=1,2,\cdots$

とすれば, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の完備な正規直交基になる. (条件(i)により)

補助定理 7. 上で定義した x_n, $n=1,2,\cdots$ に対して,

$p_n(z)\, x_0 + x_n \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ 但し, $p_1(z) = \dfrac{\langle A^*x_0, x_0\rangle - z}{\| A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0\|}$,

$$p_n(z) = \frac{(-1)^n z^n + \langle A^{*n}x_0, x_0\rangle - \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle p_k(z)}{\| A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k \|}, \quad n=2,3,\cdots$$ である.

証明. $x_1 = \dfrac{A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0}{\| A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0 \|} = \dfrac{-(-A^*x_0 + x_0 z) - (\langle A^*x_0, x_0\rangle - z)x_0}{\| A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0 \|}$

であり, 補助定理 6 より $-A^*x_0 + x_0 z \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ だから,

$\dfrac{\langle A^*x_0, x_0\rangle - z}{\| A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0\|}\, x_0 + x_1 \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ である.

次に, $p_j(z)\, x_0 + x_j \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$, $j=1,2,\cdots,n-1$ と仮定すると,

$$x_n = \frac{A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k}{\| A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k \|}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(-A^{*k+1}x_0 + A^{*k}x_0 z)z^{n-1+k} - (-1)^n x_0 z^n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle (p_k(z)\,x_0 + x_k) - \langle A^{*n}x_0, x_0\rangle x_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle p_k(z)\, x_0}{\| A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*m}x_0, x_k\rangle x_k \|}$$

だから，補助定理６によって，

$$\frac{(-1)^n z^n + \langle A^{*n}x_0, x_0\rangle - \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle p_k(z)}{\| A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k \|} x_0 + x_n \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$$ である．

従って，帰納法により結論を得る．

<u>定理４</u>．補助定理７の多項式 $p_n(z)$ に対して，

$H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} = \vee\{ z^m[p_n(z)x_0 + x_n] ;\ m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,\cdots \}$.

<u>証明</u>．補助定理７の証明からわかるように，$-(-A^*x_0 + x_0 z)$ $= \| A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0 \| (p_1(z)x_0 + x_1)$ であり，$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(-A^{*k+1}x_0 + A^{*k}x_0 z)z^{n-1-k}$ $= \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle (p_k(z)x_0 + x_k) + \| A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k \| (p_n(z)x_0 + x_n)$, $n=2,3,\cdots$ だから，$-A^{*k+1}x_0 + A^{*k}x_0 z \in \vee\{ z^m[p_n(z)x_0 + x_n] ;\ m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,\cdots \}$, $k=0,1,2,\cdots$．故に，定理３によって，

$H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} \subset \vee\{ z^m[p_n(z)x_0 + x_n] ;\ m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,\cdots \}$.

逆向きの包含は補助定理７より明らか．

<u>系</u>．$\overline{(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]} = H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}}$.

<u>証明</u>．任意の $f(z) \in H^2$ 及び各 $n=1,2,\cdots$ に対して，定理４により，$p_n(z)f(z)x_0 + f(z)x_n = f(z)[p_n(z)x_0 + x_n] \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ だから，$f(z)x_n \in (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$ よって，$[H^2]x_n \subset (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$,

for all $n=1,2,\cdots$ である．故に $\bigoplus_{k=1}^{n}[H^2]x_k \subset (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}]$．

よって $H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}} \subset (I-E_{x_0})\overline{[H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}]}$．逆向きの包含は明らか．

<u>補助定理8</u>．$H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}\subset M$ なる S の closed invariant subspace M に対して，$M\cap[H^2]x_0\neq\{0\}$ ならば，$M=H^2_{\mathcal{H}}$ である．

<u>証明</u>．或る non-zero $f(z)\in H^2$ に対して $f(z)x_0\in M$ **ならば**，$f(z)=q(z)m(z)$，$q(z)$ は inner か又は絶対値1のスカラーで，$m(z)$ は outer function に分解出来るから，$q(z)x_0\in M$ である．補助定理7により，$p_n(z)x_0+x_n\in H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}\subset M$ だから，$q(z)x_n\in M$ を得る．従って，$q(z)H^2_{\mathcal{H}}\subset M$ である．もし $q(z)$ が inner ならば，任意の $\hat{x}(z)\in H^2_{\mathcal{H}}\ominus M\subset W\mathcal{H}$ に対して $q(S)^*\hat{x}(z)=0$ となり，任意の $\hat{x}(z)\in W\mathcal{H}$ に対して $q(S)^*\hat{x}(z)=0$ とすると $\langle q(z)x, E_xW\mathcal{H}\rangle=\langle q(z)x, W\mathcal{H}\rangle=0$ for all $x\in\mathcal{H}$ でこれは定理2と矛盾するから，$0\in\sigma_p(q(S)^*|W\mathcal{H})$ である．従って，補助定理1及び2によって $0\in\sigma_p(\tilde{q}(A))$，ここで $\tilde{q}(z)=\overline{q(\bar{z})}$，となり，これは A に対する仮定(ii)に反する．故に $q(z)$ は絶対値1のスカラーでなければならない．故に $H^2_{\mathcal{H}}\subset M$．

<u>定理5</u>．$(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}]$ が closed ならば，A は non-trivial closed invariant subspace を持たない．

証明. 補助定理1及び2によって. $H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} \subsetneqq M \subsetneqq H^2_{\mathcal{H}}$ なる $\mathfrak{S}$ の closed invariant subspace M が存在しないことを示せばよい. 系によって $(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}] = H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}}$ となるから, もし, $H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} \subsetneqq M \subsetneqq H^2_{\mathcal{H}}$ なる $\mathfrak{S}$ の closed invariant subspace M が存在したとすれば, non-zero $w(z) = f_0(z)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n \in M \ominus [H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$, $f_0(z), f_n(z) \in H^2, n=1,2,\cdots$ に対して, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n \in H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}}$ よって, 或る $h(z) \in H^2$ が存在して, $h(z)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ である. 従って, $0 \neq \{f_0(z) - h(z)\}x_0 = w(z) - \{h(z)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n\} \in M$ よって補助定理8により, $M = H^2_{\mathcal{H}}$ となり矛盾する.

残念なことには, 次の結果が得られる.

定理 6. $(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$ は closed ではない.

証明. A に対する条件 (i) により, $A^* + \alpha I$ が invertible になるように $|\alpha| < 1$ なる α をえらぶことができる. 従って, 補助定理6によって, $(-A^* + zI)(A^* + \alpha I)^{-1}x_0 \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ である.

$$(-A^* + zI)(A^* + \alpha I)^{-1}x_0 = (-A^* - \alpha I + \alpha I + zI)(A^* + \alpha I)^{-1}x_0$$

$$= -x_0 + (z+\alpha)(A^* + \alpha I)^{-1}x_0$$

$$= [-1 + (z+\alpha)\langle (A^* + \alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle]x_0 + (z+\alpha)[(A^* + \alpha I)^{-1}x_0 - \langle (A^* + \alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle x_0]$$ で

$\langle [(A^* + \alpha I)^{-1}x_0 - \langle (A^* + \alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle x_0], x_0\rangle = 0$ だから,

$u_\alpha = (A^*+\alpha I)^{-1}x_0 - \langle (A^*+\alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle x_0 \in H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}}$ で、
$(z+\alpha)u_\alpha \in (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$ である。もし、或る $f(z)\in H^2$ に対して、$f(z)x_0 + u_\alpha \in H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}$ ならば、
$[(z+\alpha)f(z) - \{-1+(z+\alpha)\langle (A^*+\alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle\}]x_0 \in H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}$ となり、
$(z+\alpha)f(z) = -1 + (z+\alpha)\langle (A^*+\alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle$ である。何故ならば、定理2により $\widetilde{E_{x_0}W\mathcal{H}} = [H^2]x_0$ だから。しかし、上の等式は $z=-\alpha$ とおいてみればわかるように成立しない。故に、$u_\alpha \notin (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}]$ である。従って、系より、$(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}}\ominus W\mathcal{H}]$ は closed ではない。

<u>定理7</u>. A が non-trivial closed invariant subspace を持つ為の必要十分条件は、或る non-zero vectors x 及び y が $\mathcal{H}$ に存在して、$E_x W y = 0$ なることである。

<u>証明</u>. $E_x W y = \sum_{k=0}^{\infty} [E_x (I-T^*T)^{1/2} T^k y] z^k$ であり、補助定理1により、$(I-T^*T)^{1/2}T^k y = A^k (I-T^*T)^{1/2} y$ だから、或る non-zero x 及び y に対して $E_x W y = 0$ なることと、$\langle (I-T^*T)^{1/2} y, A^{*k} x\rangle$
$= \langle (I-T^*T)^{1/2} T^k y, x\rangle = \langle E_x (I-T^*T)^{1/2} T^k y, x\rangle = 0$, for all $k=0,1,2,\cdots$
なることは同値である。又、これは、x が A^* の cyclic vector ではないことと同値である。

H^2 上の the simple unilateral shift S_0 に対して，$\mathfrak{M}_0$ を S_0^* の凡ての cyclic vectors の全体とすると，次の結果を得る．

<u>定理 8.</u>　$[\mathfrak{M}_0 \cup \{0\}]x$ が $E_x W\mathcal{H}$ を含まないような non-zero $x \in \mathcal{H}$ が存在すれば，A は non-trivial closed invariant subspace を持つ．

<u>証明.</u> 仮定より，$f(z)x \in E_x W\mathcal{H}$ なる $0 \neq f(z) \notin \mathfrak{M}_0$ が存在する．従って，$\vee\{S_0^{*k} f(z)\,;\, k=0,1,2,\cdots\}$ は S_0^* の non-trivial closed invariant subspace である．よって，或る inner function $g(z)$ が存在して，$H^2 \ominus \vee\{S_0^{*k} f(z)\,;\, k=0,1,2,\cdots\} = g(z)H^2$ と表わせるから，$g(S_0)^* f(z)=0$．又，$f(z)x \in E_x W\mathcal{H}$ で $f(z) \neq 0$ だから，$E_x \hat{u}(z) = f(z)x$ なる non-zero な $\hat{u}(z) \in W\mathcal{H}$ が存在する．従って，$E_x\, g(S)^* \hat{u}(z) = g(S)^* E_x \hat{u}(z) = g(S)^* f(z)x = [g(S_0)^* f(z)]x = 0$．故に，もし，$g(S)^* \hat{u}(z) \neq 0$ ならば，補助定理 2 によって $g(S)^* \hat{u}(z) \in W\mathcal{H}$ だから，定理 7 によって，A は，non-trivial closed invariant subspace を持つ．定理 2，註 2 及び，A に対する条件(iii) によって，$g(S)^* \hat{u}(z) \neq 0$ である．何故ならば，補助定理 1 及び 2 によって，$g(S)^* W = W g(T^*)^* = W(I-T^*T)^{-\frac{1}{2}} g(A^*)^* (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}$ だから．

定理 8 より，A の不変部分空間との関連に於て，$\mathfrak{M}_0$ の構造を調べることは，非常に意味のあることであろう．証明は省

略するが、 $\mathfrak{M}_0 \cup \{0\}$ は、$\phi(S_0)^*$, $\phi(z) \in H^\infty$ で不変な, dense set in H^2 で, linear manifold ではないが、S_0^*で不変な linear manifold $\mathfrak{N} \neq \{0\}$ を含んでいる。 そしてこのとき $\mathfrak{N} \subsetneqq \hat{\mathfrak{N}} = H^2$ 等が示される。

文　献

[1] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic press 1964.

[2] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, Analyse harmonique des opèrateurs de l'espace de Hilbert, Acadèmiai Kiadó 1967.

[3] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 77 1973.