数理解析研究所講究録
第 400 巻 1980 年 33-41

Normal graded ring が rational singularity 又は canonical singularity になるための条件について.

都立大・理　渡辺敬一

$R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$ を normal graded ring で (1) $R_0=k$ は体で $ch(k)=0$　(2) R は k 上有限生成　であるものとする。このとき, R が rational singularity 又は canonical singularity になるための条件を環論的に記述するのが本稿の目的である。

§1. Rational singularity, canonical singularity の定義と簡単な性質.

k は $ch(k)=0$ の代数閉体とする.
X を k 上の normal variety, $f: \tilde{X}\to X$ を resolution とする.

定義. $x\in X$ が rational singularity (又は $\mathcal{O}_{X,x}$ が rational singularity)

$\Longleftrightarrow$ $(R^i f_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))_x=0$　$(\forall i\geq 1)$.

Grauert-Riemenschneider の vanishing theorem と relative duality により, この条件は次の２つの条件と同値である.

(a) $\mathcal{O}_{X,x}$ は Cohen-Macaulay ring.

(b) $(f_*\omega_{\tilde{X}})_x=\omega_{X,x}$.

<u>定義</u> (M. Reid) $x \in X$ が canonical singularity とは

$$\begin{cases} \text{(i)} & \exists r>0,\ \omega_{X,x}^{[r]} \text{ は invertible } \mathcal{O}_{X,x}\text{-module} \\ \text{(ii)} & f_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r})_x = \omega_{X,x}^{[r]} \quad (r \text{ は (i) の } r). \end{cases}$$

の二つの条件をみたす事である. この条件は次の条件と同値である。

$$\begin{cases} \text{(i')} & r\cdot cl(\omega_{X,x}) = 0 \text{ in } Cl(\mathcal{O}_{X,x}). \ (Cl(\cdot) \text{ は divisor class group}). \\ \text{(ii')} & f^*(\omega_X^{[r]}) \subset \omega_{\tilde{X}} \ (\text{又は } f^*(\omega_X^{[r]}) = \omega_{\tilde{X}}(-\Delta),\ \Delta \geqq 0) \text{ near } f^{-1}(x). \end{cases}$$

但し, $X_0 = \mathrm{Reg}(X) \overset{i}{\hookrightarrow} X$ とし, $\omega_X = i_*(\Omega_{X_0}^n)$, $\omega_X^{[r]} = i_*((\Omega_{X_0}^n)^{\otimes r})$ ($n = \dim X$) とする. また $\omega_{\tilde{X}}|_{f^{-1}(X_0)} = \omega_X|_{X_0}$ と思う.

ここで "canonical singularity" の名前の由来を見よう. V を smooth proj. var. $/k$, V は general type, $R(V) = \bigoplus_{n \geqq 0} H^0(V, \omega_V^{\otimes n})$ が f.g. $/k$ としよう. (V: gen. type $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr.deg}_k R(V) = \dim V + 1$. $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Proj}(R(V))) = \dim V$). (このとき V を "f.g. general type" という) すると次が成立する.

<u>Proposition</u>. (M. Reid) X : normal proj. var. $/k$ のとき, 次は同値.

(i) $\exists r>0$, $\omega_X^{[r]}$ は invertible, ample, $\exists f : \tilde{X} \to X$ resolution, $f_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r}) = \omega_X^{[r]}$ (このとき X を "canonical var." という).

(ii) $\exists V$: smooth proj. var. of f.g. general type $/k$, $\mathrm{Proj}(R(V)) \cong X$.

注意. (1) Gorenstein, rational sing. は canonical sing.

(2) canonical, Cohen-Macaulay sing. は rational である.

(canonical sing. で Cohen-Macaulay でない例は多分まだ存在していない, $\dim X = 3$ のとき canonical sing. $\Rightarrow$ C.-M. を Reid が示しているという.)

(3) $\dim X = 2$ のとき, "canonical singularity" = "rat. dbl pt.".

例. (1) $X = \{f(x_0, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$, $x = 0 \in X$ が孤立特異点とする。このとき,

(a) (Kimio Watanabe) $x \in X$ が rational singularity
$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \deg x_i > \deg f$.

(b) (M. Reid) もし $x \in X$ が rational sing. なら, $k[x_0, \dots, x_n]$ の任意の grading に関して, $\sum_{i=0}^{n} \deg x_i > \deg f$ (= min{f にあらわれる monomial の degree}).

(2). (Boutot). ring S (ess. of finite type / k) が rat. sing. で R が S の subring, R 加群として S の直和因子
$\Rightarrow$ R も rational singularity である。(これは本稿に於ては, 非常に重要な役割を果たす.)

有限群又は reductive な代数群による quotient singularity は従って rational singularity である。

(3) X : smooth proj. var., $\mathcal{L}$ を X 上の ample inv. sheaf.
$R = R(X, \mathcal{L}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \cdot T^n \hookrightarrow k(X)[T]$ とする. (Spec(R) は $\mathcal{L}^{-1}$ に対応する line bdl の 0-section の contraction)

このとき，

(a) $R(X,\mathcal{L})$ が rational singularity $\Leftrightarrow \forall p>0, \forall n\geq 0, H^p(X,\mathcal{L}^{\otimes n})=0$.

(b) $R(X,\mathcal{L})$ が canonical singularity $\Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{Z}, \exists r>0, a\leqq -r,$
$\omega_X^{\otimes r}\cong\mathcal{L}^{\otimes a}$.

従ってこのとき，$R(X,\mathcal{L})$ が canonical sing. なら ω_X^{-1} は ample となり，Kodaira vanishing theorem により $R(X,\mathcal{L})$ は rational singularity になる。

§2. Rational singularity の判定.

R を最初の条件をみたす normal graded ring とするとき，Demazure により，$\exists D\in \mathrm{Div}(X,\mathbb{Q})$ $(X=\mathrm{Proj}(R))$, s.t. $R\cong R(X,D)=\bigoplus_{n\geqq 0} H^0(X,\mathcal{O}_X(nD))$ である事がわかっている。また，(X,D) の組に対し，$C^+=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\geqq 0}\mathcal{O}_X(nD))$, $C=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(nD))$ とおくと，$\overset{\text{can. map}}{\Phi}: C^+\to\mathrm{Spec}(R)$ が存在し，$\Phi|_C: C\xrightarrow{\sim}\mathrm{Spec}(R)-\{m\}$ $(m=R_+=\bigoplus_{n>0}R_n)$, $\Phi(S^+)=\{m\}$ となっている $(S^+=C^+\setminus C)$. これを図示すると，次のようになる。

$$\begin{tikzcd}
 & S^+ \arrow[r] \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, hook] & \{m\} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
X & C^+ \arrow[l, "\pi^+"'] \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Spec}(R) \\
 & C \arrow[ul, "\pi"] \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Spec}(R)-\{m\} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

（注） E.G.A. II, §8 の notation によれば，

$C^+ \cong \mathrm{Proj}(R^\natural) \cong \mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_X(n)) \qquad (\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{R(n)})$

である事が容易に確かめられる。

さて，§1 の例 (3) の $R(X, \mathcal{L})$ に於て，C^+ は smooth で，従って Φ は $\mathrm{Spec}(R)$ の resolution だった。一般には C^+ は smooth でないが，もし C^+ が rational singularity しかもたないと仮定すると，$\mathrm{Spec}(R)$ の resolution を C^+ を経由してとる事により $[f : \tilde{X} \xrightarrow{g} C^+ \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Spec}(R)]$，$R^q g_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0 \ (q>0)$，から Leray spectral sequence より，$R^p f_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \cong R^p\Phi_*(\mathcal{O}_{C^+}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(n)) \cong \bigoplus_{n\geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(nD))$ を得る。

<u>補題</u> 1. C^+ が rational singularity $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Spec}(R) - \{m\}$ が rat. sing.

（証明） $\Rightarrow$) は $\mathrm{Spec}(R) - \{m\} \cong C \overset{\text{open}}{\hookrightarrow} C^+$ より自明．

$\Leftarrow$) $\mathrm{Spec}(R) - \{m\} \cong \mathrm{Spec}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD))$ が rational sing.

$\Rightarrow [\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)][T]$ も so. $\deg(T) = -1$ とおくと，

$\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_X(nD)$ は $[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)][T]$ の degree 0 と同型：

$[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)][T]_0$ は $[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)][T]$ の直和因子だから，Boutot の定理により rational singularity である。

<u>補題</u> 2. $R^p\Phi_*(\mathcal{O}_{C^+}) \cong H^p(C^+, \mathcal{O}_{C^+}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cong \bigoplus_{n\geq 0} [H^{p+1}_m(R)]_n.$

$(p \geq 1)$

（証明） [W], §2, 命題 1. 参照

以上の2つの補題により次を得る．

<u>定理</u>. $\mathrm{Spec}(R)-\{\mathfrak{m}\}$ が rational singularity のとき,

$$R^p f_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} [H^{p+1}_{\mathfrak{m}}(R)]_n.$$

特に, R が rational singularity $\Leftrightarrow$ R は Cohen-Macaulay かつ $a(R)<0$.

[但し, $\dim R=d$ のとき, $a(R) \stackrel{\text{def.}}{=} \max\{i \mid (H^d_{\mathfrak{m}}(R))_i \neq 0\}$ であった.

R が Cohen-Macaulay で, $f\in R$ が $\deg(f)=s$ の正則元のとき,

$a(R/fR)=a(R)+s$ だから, 不変量 $a(R)$ は理論的に計算可能な量であると云える.]

<u>例</u>. $R=k[X_1,\dots,X_{n+r}]/(f_1,\dots,f_r)$ が完全交叉のとき,

$a(R)=-\sum_{i=1}^{n+r}\deg(X_i)+\sum_{j=1}^{r}\deg(f_j)$. 従って, $\mathrm{Spec}(R)-\{\mathfrak{m}\}$ が rational singularity のとき, R が rational sing. $\Leftrightarrow$ $\sum \deg X_i > \sum \deg f_j$.

§3. Canonical singularity の判定.

X を normal proj. scheme $/k$

$D=\sum \frac{p_V}{q_V}\cdot V \in \mathrm{Div}(X,\mathbb{Q})$ (但し, $q_V>0$, $(p_V,q_V)=1$ $(\forall V)$). は条件 "$\exists N>0$, ND は ample Cartier divisor" をみたすとし,

$R=R(X,D)$ とする。 また,

$D'=\sum \frac{q_V-1}{q_V}\cdot V$ とおく. C^+, S^+ 等は §2 の記号を使う.

<u>補題</u> 1. $\omega_{C^+} \cong \bigoplus_{n>0} \mathcal{O}_X(K_X+D'+nD)$. (divisor の言葉で述べると, $\mathrm{div}_{C^+}(\omega_{C^+}) \equiv \pi^*(K_X+D')-S^+$.)

(証明). 1°. D が ample Cartier divisor のときは知られている。

2°. $(C^+)^{(N)} = \mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_X(nND))$ とおくと、$C^+ \longrightarrow (C^+)^{(N)}$ は finite morphism より、$\omega_{C^+} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{C^+}^{(N)}}(\mathcal{O}_{C^+}, \omega_{(C^+)^{(N)}})$. として求めれば良い。

このとき、$\Phi_*(\omega_{C^+}) = \bigoplus_{n>0} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$,

$\omega_R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$ だから、$a(R) = -\min\{i \mid (\omega_R)_i \neq 0\}$ より、

系. $\Phi_*(\omega_{C^+}) = \omega_R \iff a(R) < 0$.

補題 2. $\omega_R^{[r]} \cong R(a')$ のとき, $\mathrm{div}(\Phi^*(\omega_R^{[r]})) \equiv r[\pi^*(K_X + D')] + a'S^+$.

(証明). Φ は S^+ の contraction だから、$\exists b \in \mathbb{Z}$,

$\mathrm{div}(\Phi^*(\omega_R^{[r]})) = r.\pi^*(K_X + D') + bS^+$. しかし、$\omega_R^{[r]} \cong R(a')$

$\iff r(K_X + D') \equiv a'D$ in $\mathrm{Div}(X)$ と、$\pi^*(D) \equiv -S^+$ と、

$\Phi^*(\omega_R^{[r]}) \otimes_{\mathcal{O}_{C^+}} \mathcal{O}_{S^+} \cong \mathcal{O}_{S^+}$ に注意すると、結果を得る。

Spec(R) の resolution を

$f = [\tilde{X} \xrightarrow{g} C^+ \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Spec}(R)]$ と分解するとき、$g_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r}) \subset \omega_{C^+}^{[r]}$ は常に成立するから、$f_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r}) = \omega_R^{[r]}$ となるために、$\Phi_*(\omega_{C^+}^{[r]}) = \omega_R^{[r]}$ となる事は必要条件である。従って、

定理. もし $R(X, D)$ が canonical singularity

$\Rightarrow \exists r > 0$, $r(K_X + D') \equiv a'D$ in $\mathrm{Div}(X)$ かつ $a' \leqq -r$.

§3. Rational singularity のある環論的性質.

一般に、$(A, \mathfrak{m})$ は n 次元 Noeth. local ring で、$|A/\mathfrak{m}| = \infty$ とする.

このとき $\mathfrak{q}=(t_1,\cdots,t_n)\subset\mathfrak{m}$ で，$\mathfrak{m}$ は integral over $\mathfrak{q}$ であるものが存在する（$\mathfrak{m}$ の minimal reduction）．このとき，

$t(A)=\min\{t \mid \mathfrak{m}^t\subset\mathfrak{q}\}$ とおこう．

M. Artin，H. Laufer はそれぞれ，2次元 rational sing.，2次元の "minimally elliptic" singularity に関してかなり詳しい環論的記述をしているが，この事は実は，それぞれ，$t(A)\leqq 2, 3$ である事から導く事ができる。また，$t(A)=2$ で A が Cohen-Macaulay 又は $t(A)=3$ で A が Gorenstein のとき，J. Sally は $gr_{\mathfrak{m}}(A)$ がそれぞれ Cohen-Macaulay，Gorenstein になる事を示している。$t(A)$ に関し，次のような事が知られている．

<u>定理</u> [L-T]．$(A,\mathfrak{m})$ を ① regular local ring ② 2次元 rational singularity（任意標数）③ $ch(k)=0$ 上 ess. of finite type 又は analytic な local ring で rational singularity．

のいずれかとする．$\dim A=n$ のとき，$\forall$イデアル $I\subset A$，$\forall\lambda\geqq 1$ に対し，$\overline{I^{\lambda+n-1}}\subset I$（$\overline{\ \ }$ は integral closure を示す．）．

これを $I=\mathfrak{q}$ に対して使うと，"A が rational singularity，$\dim A=n \Rightarrow t(A)\leqq n$" を得る．この事実の一つの応用として，

<u>系</u>．A が rational singularity で $\dim A=n$，A が complete intersection $\Rightarrow$ emb.(A) $(=\dim_{A/\mathfrak{m}}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)\leqq 2n-1$．

問題. 一般に,「$(A, \mathfrak{m})$ が rational singularity $\Rightarrow$ $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ は Cohen-Macaulay（又は $(A, \mathfrak{m})$ が Gorenstein rational sing. $\Rightarrow$ $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ が Gorenstein)」は成立するだろうか？

［追記］§3 の内容に関しては後藤四郎氏に教えられた点が多い。この場をお借りして感謝の意を表したい。

References.

[L-T] J. Lipman and B. Teissier: On a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals. (preprint).

[R] M. Reid; Canonical 3-folds, (preprint, Warwick univ., September, 1979).

[D] M. Demazure; Anneaux gradués normaux, preprint, C.N.R.S. 169, Mai 1979.

[W] K. Watanabe: Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, 数理研講究録 374 (1980).