数理解析研究所講究録
第 400 巻 1980 年 58-69

Z-transforms and Seminormality

広島大　理学部　　伊藤　史朗

イデアル transform を拡張した概念である Z-transform を用いて，ネーター環 A の拡大環 B の性質を調べるのがこの講演の目的である。拡大環 B を調べるにあたって，全てを $\mathrm{Ass}_A(B/A)$ の点 $\mathfrak{z}$ での $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}$（又は $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap B_{\mathfrak{z}}$）の性質に帰着させる。ここでは次の３つの問題を取り扱う。

(A) R をネーター環 A の拡大環で $A \subseteq R \subseteq Q(A)$ とする。このとき A が R で seminormal となる条件を $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap R_{\mathfrak{z}}$（$\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(R/A)$）の性質で記述すること。

(B) R をネーター環 A の拡大環で $A \subseteq R \subseteq Q(A)$ とする。このとき R が A 加群として有限生成となる条件を $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap R_{\mathfrak{z}}$（$\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(R/A)$）の性質で記述すること。

(C) Aをネーター環でSerreの条件(S_1)を満たすものとする。Aが有限(S_2)-拡大環をもつための条件を$(A_\mathfrak{p})^g$ $(\mathfrak{p}\in Spec(A))$の性質でもって記述すること。

§1. Z-transforms

Aをネーター環，Zを$Spec(A)$の部分集合で特殊化で安定なものとする。AのZ-transform $T(Z,A)$とは，次のようにして定まる$Q(A)$のA-subalgebraである。

$$T(Z,A)=\{z\in Q(A)\mid V(A:_A z)\subseteq Z\}.$$

又，Aのglobal transform A^gとはAの$Max(A)$-transformのことである。定義からすぐに分かるように

(1.1) $z\in Q(A)$について，$z\in T(Z,A) \Leftrightarrow z/1\in A_\mathfrak{p}$ $\forall \mathfrak{p}\in Spec(A)-Z$。

さて，$\mathfrak{p}\in Z$であって$\mathfrak{q}\subsetneqq\mathfrak{p}$なる$A$の素イデアル$\mathfrak{q}$については$\mathfrak{q}\notin Z$のとき$\mathfrak{p}$を$Z$のgeneric pointと呼ぶことにする。そうすると次の事実も定義より容易に分かる。

(1.2) $\mathfrak{p}\in Z$がZのgeneric pointで正則元を含んでいれば$T(Z,A)_\mathfrak{p}=(A_\mathfrak{p})^g$。

次の2つの補題も簡単ではあるが大切な事実である。

(1.3) 補題. $A \subseteq B \subseteq Q(A)$ なる拡大環 B について,

$$\mathrm{Ass}_A(B/A) = \{\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{z}} \subsetneq (A_{\mathfrak{z}})^{g} \cap B_{\mathfrak{z}}\}。$$

(1.4) 補題. 上と同じ条件のもとで

$$\mathrm{Ass}_A(T(Z, A) \cap B / A) = \mathrm{Ass}_A(B/A) \cap Z.$$

一般に $A^{g} = A \Leftrightarrow$ Aのどの極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対しても $\mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{m}} \neq 1$ が成立するので, $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(B/A)$ であれば $\mathfrak{z}$ は正則元を含みかつ $\mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{z}} = 1$ となる。

§2 問題(A).

最初に次のような場合について考えてみよう。即ち, B はネーター環 A の有限拡大環で $A \subseteq B \subseteq Q(A)$ かつ $\mathrm{Ass}_A(B/A) = \{\mathfrak{z}\}$。このとき $\mathfrak{z}$ 上の B の素イデアル全体を $P_1, \cdots, P_r$ とおき, AとBの中間の環の列 $C_0, C_1, \cdots$ を帰納的に次のようにして定める。

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ k(\mathfrak{z}) \arrow[r] & \prod k(P_i) \end{tikzcd} , \qquad \begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[d] \\ k(\mathfrak{z}) \arrow[r] & C_n \otimes k(\mathfrak{z}) \end{tikzcd} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

は全て pull back 図式。

このとき次の補題が成立する。

(2.1) 補題. A, B, C_n ($n=0,1,\cdots$), $\mathfrak{z}$ は上の通りとする。このとき次の主張が成立する。

(1) C_0 は B で seminormal.

(2) ある n について $A=C_n$ となる.

(3) A が B で seminormal $\Leftrightarrow$ A は $\mathrm{End}_A(\mathfrak{z})\cap B$ で seminormal。

($\mathrm{End}_A(\mathfrak{z})$ は $Q(A)$ の部分環 $\{x\in Q(A) \mid x\mathfrak{z}\subseteq\mathfrak{z}\}$ と同一視する。)

この補題を用いると

定理 A. R をネーター環 A の拡大環で $A\subseteq R\subseteq Q(A)$ とする。このとき次の4条件は同値.

(1) A は R で seminormal.

(1′) 各 $\mathfrak{z}\in \mathrm{Ass}_A(R/A)$ に対し $A_{\mathfrak{z}}$ は $R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.

(2) 各 $\mathfrak{z}\in \mathrm{Ass}_A(R/A)$ に対し, $A_{\mathfrak{z}}$ は $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}\cap R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.

(3) 各 $\mathfrak{z}\in \mathrm{Ass}_A(R/A)$ に対し, $A_{\mathfrak{z}}$ は $\mathrm{End}_{A_{\mathfrak{z}}}(\mathfrak{z}A_{\mathfrak{z}})\cap R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.

(証明) R は A の有限拡大としてよい。又 (1) $\Rightarrow$ (1′) $\Rightarrow$ (3) は明らか。$\mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}((A_\mathfrak{p})^\mathfrak{p}\cap R_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p})=\{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\}$ であるので (2.1) を用いれば (3) $\Rightarrow$ (2) が示される。(2) $\Rightarrow$ (1) もし A が R で seminormal でなければ $b\in R-A$ で、b^2, $b^3\in A$ となる元 b が存在する。$\mathfrak{p}$ を $A:_A b$ の極小素イデアルとすると $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(R/A)$, $b/1\notin A_\mathfrak{p}$, $b/1\in(A_\mathfrak{p})^\mathfrak{p}\cap R_\mathfrak{p}$ である。$b^2/1$, $b^3/1\in A_\mathfrak{p}$ かつ $A_\mathfrak{p}$ は $(A_\mathfrak{p})^\mathfrak{p}\cap R_\mathfrak{p}$ で seminormal であるから $b/1\in A_\mathfrak{p}$. これは矛盾.

<u>系</u> ネーター環 A が seminormal $\Longleftrightarrow$ 各 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(\bar{A}/A)$ に対し A は $\mathrm{End}_A(\mathfrak{p})$ で seminormal.

§3 問題 (B).

<u>定理</u> B. B をネーター環 A の拡大環で $A\subseteq B\subseteq Q(A)$ とする。このとき次の条件は同値である。

(1) B は有限生成 A-加群.

(2) $\mathrm{Ass}_A(B/A)$ は有限集合で 各 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(B/A)$ に対し $(A_\mathfrak{p})^\mathfrak{p}\cap B_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$-加群として有限生成.

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2) は明らかである。(2) $\Rightarrow$ (1):

$\mathrm{Ass}_A(B/A)$ が有限集合であるから，特殊化で安定な $\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合の列 $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ で，$\mathrm{Spec}(A)=Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots$，$\bigcap_n Z_n = \phi$，$Z_n - Z_{n+1}$ は Z_n の generic points の一部からなる，$\mathrm{Ass}_A(B/A) \cap (Z_n - Z_{n+1})$ は空集合又は１点よりなる――ようなものが選べる。n_0 を $\mathrm{Ass}_A(B/A) \cap Z_{n_0} = \phi$ にとれば (1.4) より $T(Z_{n_0}, A) \cap B = A$。さて $L = T(Z_{n+1}, A) \cap B$ が有限生成 A-加群であることを仮定して $L' = T(Z_n, A) \cap B$ もそうであることを示そう。$L \neq L'$ としてよい。このときは (1.1)(1.2)(1.3) を用いて $\mathrm{Ass}_A(B/A) \cap (Z_n - Z_{n+1})$ は１点（それを $\mathfrak{z}$ としよう）からなる集合であることが分かる。さて，$L_{\mathfrak{z}} = A_{\mathfrak{z}}$，$L'_{\mathfrak{z}} = (A_{\mathfrak{z}})^{g} \cap B_{\mathfrak{z}}$ （(1.1) 及び (1.2)）である。従って正則元 $t \in \mathfrak{z}$ を適当にとれば $tL'_{\mathfrak{z}} \subseteq L_{\mathfrak{z}}$。このとき (1.1)(1.2)(1.3) を用いると $tL' \subseteq L$ が示される。よって L' は有限生成 A-加群である。以下帰納法を用いて $T(Z_0, A) \cap B = B$ は有限生成 A-加群。

この定理 B は Nishimura による結果 [5, (2.6.2)] 及び [5, (3.1)] を含んでいる。次の系は次節で用いる。

<u>系</u>　A をネーター整域とする。又 $\Delta = \{\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathrm{ht}\,\mathfrak{z} \geqq 2,\ \mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{z}} = 1\}$ とおく。このとき $A^{(1)} =$

$\bigcap_{ht\,\mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$ が有限生成 A-加群 $\Longleftrightarrow$ Δ は有限集合で各 $\mathfrak{p}\in\Delta$ に対し $(A_{\mathfrak{p}})^{g}$ は有限生成 $A_{\mathfrak{p}}$-加群。

(証明) $Z=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) \mid ht\,\mathfrak{p}\geqq 2\}$ とし，$B=A^{(1)}=T(Z,A)$ をおく。(1.4) より $\mathrm{Ass}_A(B/A)=\mathrm{Ass}_A(T(Z,A)\cap Q(A)/A)=\mathrm{Ass}_A(Q(A)/A)\cap Z=\Delta$. 又 $\mathfrak{p}\in Z$ のとき $(A_{\mathfrak{p}})^{g}\subseteq B_{\mathfrak{p}}$ であるから $(A_{\mathfrak{p}})^{g}\cap B_{\mathfrak{p}}=(A_{\mathfrak{p}})^{g}$. 従って系は定理より従う。

§4. 問題(C).

B がネーター環の有限 (S_2)-拡大環であるとは，$A\subseteq B\subseteq Q(A)$，$B$ は A-加群として有限生成かつ Serre の条件 (S_2) をみたす。さて，問題(C)に関しては複雑な議論をさけるために整域のみを考えよう。

議論に必要な事柄を列挙しておこう。A はネーター整域とする。

(4.1) (Matijevic) B を A と A^{g} の中間の環とする。このとき任意の $x(\neq 0)\in A$ に対し B/xB は有限生成 A-加群。とくに B はネーター環となる。又，A が局所環$\underbrace{\text{であれば，}}_{\dim A\geqq 2\text{ で}}$ B は半局所環となる。

(4.2) $A \subseteq B \subseteq A^g \Rightarrow B^g = A^g$。

(4.3) $A \subseteq B \subset Q(A)$, B は A 上有限 $\Rightarrow B^g$ は A^g 上有限（加群として）。

(4.4) A が半局所環のとき，$t(\neq 0) \in A$ を高さ $\geqq 2$ のどの極大イデアルにも含まれないが，高さ 1 のどの極大イデアルにも含まれるようにとると $A_t \subseteq A^g$。

(4.5) A が半局所環のとき，適当な有限拡大環 B（$A \subseteq B \subseteq A^g$）と積閉集合 S に対し $A^g = S^{-1}B$ であったとする。このとき B の高さ $\geqq 2$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\operatorname{depth} B_{\mathfrak{m}} \geqq 2$。

(4.6) R を A の有限拡大環（$A \subseteq R \subseteq Q(A)$），$B = A^g \cap R$ とおくと {R の高さ 1 の極大イデアル} と {B の高さ 1 の極大イデアル} とは対応 $N \mapsto N \cap B$ によって 1 対 1 対応がつく。さらに N を R の高さ 1 の極大イデアルとすると $B_{N \cap B} = R_N$。

(4.2)～(4.5) は A^g の定義から容易に導かれる。(4.6) については [4] 又は [6] を参考にせよ。

さて，局所ネーター整域 A が（$\dim A \geqq 2$ かつ）有限 (S_2)-拡大環 R をもつとしよう。$B = A^g \cap R$ とおくと B は半局所環である。

そこで $t(\neq 0) \in B$ を高さ $\geqq 2$ の B のどの極大イデアルにも含まれないが，高さ1の B のすべての極大イデアルにも含まれるようにとる。 このとき，§1の最後に述べた注意及び(4.2)(4.4)(4.6)より $A^g = (B_t)^g \subseteq (R_t)^g = R_t$。従って A^g は B_t 上 finite。よって A^g は A 上 essentially finite である。

以上の注意より次の定理Cの (1)⇒(2) はほとんど明らかである。

<u>定理</u>C. A をネーター整域，$\Delta = \{ \mathfrak{z} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \operatorname{ht} \mathfrak{z} \geqq 2, \operatorname{depth} A_{\mathfrak{z}} = 1 \}$ とおく。このとき次の条件は同値である。

(1) A は有限 (S_2)-拡大環をもつ。

(2) Δ は有限集合で各 $\mathfrak{z} \in \Delta$ に対し $(A_{\mathfrak{z}})^g$ は $A_{\mathfrak{z}}$ 上 essentially finite.

(証明) (2)⇒(1)： A の有限拡大環 B $(\subseteq Q(A))$ に対し

$$\Delta(B) = \{ Q \in \operatorname{Spec}(B) \mid \operatorname{ht} Q \geqq 2, \operatorname{depth} B_Q = 1 \}$$

$$\Delta^*(B) = \{ Q \in \Delta(B) \mid (B_Q)^g \text{ は有限 } B_Q\text{-加群でない} \}$$

$$n(B) = \inf \{ \operatorname{ht} Q \cap A \mid Q \in \Delta(B) \}$$

$$n^*(B) = \sup \{ \operatorname{ht} Q \cap A \mid Q \in \Delta^*(B) \}$$

とおく。$\Delta(B)$ は必然的に有限集合となる。

Aの適当な有限拡大環Rについて$\Delta^*(R)=\phi$であればよい。実際そのようなRについては§3の系より$R^{(1)}$はR（従ってA）上有限であって$R^{(1)}$は(S_2)をみたす。そこで$\Delta^*(A)\neq\phi$としよう。$\Delta=\Delta(A)$の有限性よりAの適当な有限拡大環Cをとれば各$\mathfrak{z}\in\Delta(A)$に対して$(A_\mathfrak{z})^\mathfrak{z}$は$(A_\mathfrak{z})^\mathfrak{z}\cap C_\mathfrak{z}$の局所化となるように出来る。そこで$Z=\bigcup_{\mathfrak{z}\in\Delta(A)}V(\mathfrak{z})$, $B=T(Z,A)\cap C$とおく。このときBは定理の条件(2)をみたし$n^*(A)\geqq n^*(B)$（もし$\Delta^*(B)\neq\phi$ならば）となることが容易に示される。又，(4.5)を用いることにより$n(B)>n(A)$（もし$\Delta(B)\neq\phi$ならば）であることが証明出来る。これらの事実を用いて帰納的にAの有限拡大環の列B_n（$\subseteq Q(A)$）で，

(a) 各B_nは定理の条件(2)をみたし，

(b) もし$\Delta^*(B_i)\neq\phi$ $(i=1,\cdots,n)$であれば

$$n^*(A)\geqq n^*(B_1)\geqq\cdots\geqq n^*(B_n)\geqq n(B_n)>\cdots>n(B_1)>n(A),$$

となるものが構成できる。数列$n(B_i)$は上に有界であるので適当なjについて$\Delta^*(B_j)=\phi$でなければならない。

<u>注意</u> 上の定理においてAの整域性は不要である。（[6]を参考にせよ。）

<u>注意</u> [2] において示されているようにネーター局所環 A で $\operatorname{depth} A = 1$ なるものについて

(1) $A^{\mathfrak{g}}$ が A 上 finite $\Leftrightarrow$ 任意の $\mathfrak{z} \in \operatorname{Ass} \hat{A}$ に対し $\dim \hat{A}/\mathfrak{z} \geqq 2$,

(2) $A^{\mathfrak{g}}$ が A 上 integral $\Leftrightarrow$ 任意の $\mathfrak{z} \in \operatorname{Min} \hat{A}$ に対し $\dim \hat{A}/\mathfrak{z} \geqq 2$

である。これと類似の結果として,

(3) $A^{\mathfrak{g}}$ が A 上 essentially finite $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ の embedded prime ideal $\mathfrak{z}$ について $\dim \hat{A}/\mathfrak{z} \geqq 2$

が成立する。とくに $\hat{A}$ が embedded prime ideals をもたない(即ち (S_1))ならば $A^{\mathfrak{g}}$ は A 上 essentially finite である。

参考文献

[1] M. Brodmann, Finiteness of ideal transforms, J. of Algebra 63, 162 - 185 (1980)

[2] D. Ferrand - M. Raynaud, Fibres formelles d'un anneaux local noethérien, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 3 (1970), 295 - 311.

[3] J. Matijevic, Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), 49 - 52.

[4] J. Nishimura, On ideal transforms of noetherian rings I, J. Math. Kyoto Univ., 19 (1979), 41-46

[5] ——, —— II, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 149-154.

[6] S. Itoh, Z-transforms and overrings of a noetherian rings, (to appear in Hiroshima Math. J.)