数理解析研究所講究録
第 403 巻 1980 年 45-56

Quasihomogeneous singularities の位相型

筑波大 数学系 鈴木正彦

Abstract : Do the topological types of quasihomogeneous isolated hypersurface singularities determine their weights? We shall give the positive answer to this problem in the case of quasihomogeneous hypersurface singularities in $\mathbb{C}^2$ and Brieskorn-Pham type singularities. This work is made in collaboration with E. Yoshinaga.

Brieskorn-Pham singularitiesから始めよう。孤立特異点をもつ解析函数の芽 $f:(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{C},0)$ の Milnor fibrationのmonodromy の特性多項式の位相不変性とこの多項式のweightsによる表現（f が q.h. polynomial のとき）を用いる。その説明から始めよう。今

$$S^1:=\{t\in\mathbb{C}\mid |t|=1\},\quad S_\varepsilon:=\{z\in\mathbb{C}^n\mid |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=\varepsilon\}\ (0<\varepsilon<<1)$$

$$K:=\{z\in\mathbb{C}^n\mid f(z)=0\}\cap S_\varepsilon$$

とおくことにする。このとき，写像

$$\phi(z) := f(z)/|f(z)| : S_\varepsilon - K \longrightarrow S^1$$

は局所自明なファイバー束である。その一般束は $F_\theta :=$ $\phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon - K$ で，S^{n-1} のブーケのホモトピー型を持つ。そして $\pi_1(S^1)$ の生成元は monodromy automorphism

$$h_* : H_{n-1}(F_0;\mathbb{Z}) \circlearrowleft$$

を導びく。このとき，この monodromy の特性多項式を

$$\Delta(t) := \det(tI_* - h_*)$$

で定義する。

さて，今 $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を孤立特異点をもつ解析函数の芽とし，f と g で定義される超曲面を H_1, H_2 とする。このとき，原点の近傍 U_1, U_2 と位相同型 $\psi : U_1 \longrightarrow U_2$ があって，　$\psi(H_1 \cap U_1) = H_2 \cap U_2$ ，$\psi(0) = 0$

となるとき，H_1 と H_2 は同じ位相型をもつということにする。Milnor は [4] の中では，近傍 U_1, U_2 の代わりに超球を用いているが，この方が条件として強いのかどうかは我々にはわからない。Lê Dũng Tráng によれば次の定理が得られる（[2]参照）。

定理. 二つの孤立特異点をもつ超曲面の位相型が同じならば，それらの monodromy matrices は同値である。

特性多項式は始めBrieskorn と Phamにより,

$$z_1^{a_1}+z_2^{a_2}+\cdots+z_n^{a_n},\quad a_i\geq 2,\quad a_i\in\mathbb{N}$$

という定義式をもつものに対して計算されたが, その後, Milnor と Orlik によって, quasihomogeneous 多項式で定義される超曲面の monodromy の特性多項式が計算された ([5] 参照)。

定理. $f(z_1,\dots,z_n)$ を孤立特異点をもつ $(1;r_1,\dots,r_n)$ 型の quasihomogeneous 多項式とする。ただし, $r_i=a_i/b_i$ で a_i, b_i は自然数とする。今,

$$I:=\{i_1,\dots,i_s\}\subset\{1,2,\dots n\},\quad B_I:=[b_{i_1},\dots,b_{i_s}]$$

$$A_I:=b_{i_1}\cdots b_{i_s}/a_{i_1}\cdots a_{i_s}\cdot B_I.$$

とおく。([ ] は最小公倍数) そのとき, 特性多項式は

$$\Delta_f(t)=\frac{\prod_{n-s:\mathrm{even}}(t^{B_I}-1)^{A_I}}{\prod_{n-s:\mathrm{odd}}(t^{B_I}-1)^{A_I}}$$

で与えられる。

先の Lê Dũng Tràng の結果は特性多項式は位相不変であることを示している。よって, f と g の定義する超曲面の位相型が等しければ, 我々は恒等式

$$\Delta_f(t)=\Delta_g(t)$$

を得る。f と g が quasihomogeneous ならば，Milnor-Orlik の定理から $\Delta_f(t)$ や $\Delta_g(t)$ はそれらの weights で表わせる。f と g が Brieskorn-Pham のとき，この恒等式から次の結果を得る：

定理. $f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n}$, $a_{i+1} \geq a_i \geq 2$, $a_i \in \mathbb{N}$.
$g(z_1, \ldots, z_n) = z_1^{b_1} + \cdots + z_n^{b_n}$, $b_{i+1} \geq b_i \geq 2$, $b_i \in \mathbb{N}$.
としたとき，次の三条件は同値である：

(1) $a_i = b_i$

(2) $(\mathbb{C}^n, \{f=0\}) \overset{\text{top}}{\approx} (\mathbb{C}^n, \{g=0\})$，すなわち，$f$ と g の定義する超曲面の位相型が等しい。

(3) $\Delta_f(t) = \Delta_g(t)$

この定理の本質的な部分は (3) $\Rightarrow$ (1) の証明であるが，この証明は [7] を参照されたい。

さて，Brieskorn-Pham type のときは特性多項の位相不変性だけから指数を決定できたが，一般の quasihomogeneous 多項式についてはどうであろうか？　これには次のような反例がある。

例. $f(x, y) = x^a y + x y^b$: type $\left(1; \frac{b-1}{ab-1}, \frac{a-1}{ab-1}\right)$
$g(x, y) = x^c y + x y^d$: type $\left(1; \frac{d-1}{cd-1}, \frac{c-1}{cd-1}\right)$

a, b, c, d は自然数とし，$ab=cd$ と仮定しておく。このとき，f に対する特性多項式を計算すると，

$$A_1=\frac{ab-1}{(b-1)(ab-1)}=\frac{1}{b-1}\ ,\quad A_2=\frac{ab-1}{(a-1)(ab-1)}=\frac{1}{a-1}$$

$$A_{\{1,2\}}=\frac{(ab-1)^2}{(a-1)(b-1)(ab-1)}=\frac{ab-1}{(a-1)(b-1)}$$

$$B_1=B_2=ab-1\ ,\quad B_{\{1,2\}}=ab-1.$$

従って，

$$\Delta_f(t)=\frac{(t-1)(t^{ab-1}-1)^{\frac{ab-1}{(a-1)(b-1)}}}{(t^{ab-1}-1)^{\frac{1}{b-1}}(t^{ab-1}-1)^{\frac{1}{a-1}}}=(t-1)(t^{ab-1}-1)$$

同じように g に対する特性多項式として，

$$\Delta_g(t)=(t-1)(t^{cd-1}-1)$$

を得る。$ab=cd$ と仮定したので $\Delta_f=\Delta_g$ が成り立つ。しかし，f と g に異なる quasihomogeneous type を与えるような a, b, c, d の自然数の組はいくらでも作れる。これは特性多項式だけでは quasihomogeneous type を決定しえないことを示している。

それでは特性多項式がどのくらい quasihomogeneous type を決めるのかをみておこう(但し，二変数のとき)。

補題. $f(x,y)$, $g(x,y)$ を孤立特異点をもつ type が夫々 $(1;r_1,r_2)$, $(1;s_1,s_2)$ の quasihomogeneous 多項式とす

る。このとき，f と g の定義する超曲面の monodromy の特性多項式が一致するための必要十分条件は次のようである：

(1) $(r_1, r_2)=(s_1, s_2)$

あるいは

(2) $(a_i, d)=(b_i, d)=1$ なる自然数 a_1, a_2, b_1, b_2, d があって，$f(x, y)$: $\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}\right)$ type の quasihomogeneous ,
$g(x, y)$: $\left(\frac{b_1}{d}, \frac{b_2}{d}\right)$ type の quasihomogeneous，

となりしかもこれらの自然数は

$$\frac{d-a_1-a_2}{a_1 a_2}=\frac{d-b_1-b_2}{b_1 b_2}$$

をみたす。

この補題は恒等式 $\Delta_f=\Delta_g$ の指数を比較してやれば証明できる。この補題を一般変数の quasihomogeneous に対して証明したものに[9]がある。

我々の問題を解決するのに特性多項式だけでは不十分なことはわかった。とにかく，超曲面の位相型が等しいための必要条件がほしいのである。ところが，曲線の場合には次のように実に強力な定理があるのである。これは Zariski と Hironaka による([1]，[10]を参照)。

定理．$f(x, y)$ と $g(x, y)$ で定義された $\mathbb{C}^2$ 内の曲線の二つ

の芽X，Yの位相型が等しいための必要十分条件は次のようである： $X=\bigcup_{i=1}^{p} X_i$ ， $Y=\bigcup_{j=1}^{q} Y_j$ を既約成分への分解とすると，$p=q$ で，Y_j の index j を並べ換えておけば，

$$(\mathbb{C}^2, X_i) \overset{top}{\cong} (\mathbb{C}^2, Y_i), \quad (X_i, X_j)_0 = (Y_i, Y_j)_0 .$$

$(\ ,\ )_0$ は 0 における二曲線の交点数である。

この定理を使うことで二変数の quasihomogeneous のときに我々の問題が解ける。

定理. $f(x,y)$ と $g(x,y)$ は孤立特異点を有する type $(1; r_1, r_2)$，$(1; s_1, s_2)$ の quasihomogeneous 多項式とする。VとW をfとgで定義される平面曲線の0における芽とする。このとき次の条件は同値である。

(1) $(\mathbb{C}^2, V) \overset{top}{\cong} (\mathbb{C}^2, W)$，すなわちVとWの位相型が等しい。

(2) $(r_1, r_2) = (s_1, s_2)$.

次の補題はほとんど自明であるが有効である。

補題. 原点における集合芽 $\{x^a + y^b = 0\}$ が非特異成分をもつための必要十分条件は $a|b$ あるいは $b|a$ である。

今 $d:=(a,b)$, $A:=a/d$, $B:=b/d$, $u_k:=e^{\pi i(2k+1)/d}$ とおくと,

$$x^a+y^b=\prod_{k=0}^{d-1}(x^A-u_k y^B)$$

と既約分解できることからこの補題はすぐ示せる。

さて次に曲線の局所位相型は次の式で定義される三つのタイプに帰着されることを示そう。

$$F^{a,b}(x,y):=x^a+y^b \quad (a,b\geq 2)$$

$$G^{a,b}(x,y):=x^a+xy^b \quad (a\geq 2,\ b\geq 1)$$

$$H^{a,b}(x,y):=x^a y+xy^b \quad (a,b\geq 1).$$

今 f を孤立特異点をもつ二変数の quasihomogeneous 多項式とすると，孤立特異点をもつという性質から次の三つの場合が考えられる:

(1) $\exists\, a,b\ (a,b\geq 2)$, f は x^a と y^b を含む。

(2) $\exists\, a,b\ (a\geq 2,\ b\geq 1)$, f は x^a と xy^b を含む。

(3) $\exists\, a,b\ (a,b\geq 1)$, $x^a y$ と xy^b を f は含む。

例えば, (1)のとき f は

$$f=px^a+qy^b+g(x,y)\ ,\ pq\neq 0.$$

と表わされる。$g(x,y)$ は weights $(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$ に対して次数 1 の多項式である。

$$f_t:=px^a+qy^b+tg(x,y) \quad t\in\mathbb{C}$$

とパラメーター族 $\{f_t\}$ を考える。パラメーター t に対して,

f_tが孤立特異点をもつという性質は"generic"なので，パラメーター空間$\mathbb{C}$の0と1を結ぶ実曲線$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$，$\alpha(0)=0$，$\alpha(1)=1$が存在して$f_{\alpha(\lambda)}$が常に孤立特異点をもつようになる。しかも$f_{\alpha(\lambda)}$はいつでも$(1; \frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ type の quasihomogeneous多項式なので，その Milnor 数は

$$\mu_0(f_{\alpha(\lambda)}) = (a-1)(b-1) \quad (\forall \lambda)$$

である。よって，Lê-Ramanujan [3] から$\{f_{\alpha(\lambda)}=0\}$の位相型は常に一定である。従って$\{f=0\}=\{f_{\alpha(1)}=0\}$の位相型は$\{x^a+y^b=0\} \cong \{f_{\alpha(0)}=0\}$の位相型と同じである。(2)(3)のときも同様のことがいえて結局曲線の位相型は先の三つの type に帰着される。そこで我々はF，G，Hで定義される三つのタイプの曲線の位相型とその weights の関係をみてやればよい。

まず，$(\mathbb{C}^2, \{F^{a,b}=0\}) \overset{top}{\approx} (\mathbb{C}^2, \{F^{c,d}=0\})$のとき，先の特性多項式が一致するための条件を述べた補題から$a=c$，$b=d$を得る。

次に，$(\mathbb{C}^2, \{G^{a,b}=0\}) \overset{top}{\approx} (\mathbb{C}^2, \{G^{c,d}=0\})$のとき，$G^{a,b}$の type は$(\frac{1}{a}, \frac{a-1}{ab})$。先の補題より，$a=c$で，$b' := (a-1)/b$は自然数でなくてはならない。$d' := (c-1)/d$とおくと補題より

$$\frac{a-1-b'}{b'} = \frac{c-1-d'}{d'}, \quad b'=d', \quad b=d.$$

次に $(\mathbb{C}^2, \{H^{a,b}=0\}) \overset{top}{\sim} (\mathbb{C}^2, \{H^{c,d}=0\})$ のときは，Zariski-Hironakaの定理を使う。今上の位相同型を与える写像を $H:(\mathbb{C}^2,0)\longrightarrow(\mathbb{C}^2,0)$ とする。$H(\{x^{a-1}+y^{b-1}=0\})\supset\{x=0\}$ あるいは $\{y=0\}$ とすると先の補題より $a-1|b-1$ あるいは $b-1|a-1$ が成り立つので，$\{x^{a-1}+y^{b-1}=0\}$ は非特異成分だけから成る。従って $\{x^{c-1}+y^{d-1}=0\}$ も非特異成分から成っていなくてはいけない。今例えば $a\le b$，$c\le d$ としておくと，成分の数が等しいことから $a=c$ を得る。又交点数が保存されることから $b=d$ がわかる。

$(\mathbb{C}^2, \{F^{a,b}=0\}) \overset{top}{\sim} (\mathbb{C}^2, \{G^{c,d}=0\})$

$(\mathbb{C}^2, \{G^{a,b}=0\}) \overset{top}{\sim} (\mathbb{C}^2, \{H^{c,d}=0\})$

$(\mathbb{C}^2, \{H^{a,b}=0\}) \overset{top}{\sim} (\mathbb{C}^2, \{F^{c,d}=0\})$

のときもほとんど同じようにして，定義式のquasi typeが等しいことが示される。よって，我々は定理の(1)⇒(2)の部分の証明ができた。(2)⇒(1)は一般的にいえるのである。すなわち，

定理．typeの等しいquasihomogeneous多項式で定義された超曲面は局所位相型が等しい。

この証明を与えてみよう。但し，以下の証明はL合と

Ramanujan の結果を使うので，曲面の次元が2でない場合に有効である。2のときも有効な証明については岡[6]を見よ。さて，f，g を $(1; r_1, \cdots, r_n)$ type の quasihomogeneous とし，孤立特異点をもつとする。

$$F_t := \sum_{i_1 r_1 + \cdots + i_n r_n = 1} t_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

とおくと，F_t は $(1; r_1, \cdots, r_n)$ type の quasihomogeneous である。パラメーター t に対して F_t が孤立特異点をもつという性質は"generic"である，すなわち，ある代数的集合 V がパラメーター空間 $\mathbb{C}^N$ 内にあって，$\forall t \in \mathbb{C}^N - V$ に対しては F_t は孤立特異点をもつ（岡[6]参照）。仮定より，$\exists\, t_0, t_1 \in \mathbb{C}^N - V$，$F_{t_0} = f$，$F_{t_1} = g$。このとき，実曲線 γ を $\mathbb{C}^N - V$ 内で t_0 と t_1 をむすぶようにとる。そうすると $F_{\gamma(\lambda)}$ はもちろん type 一定なので Milnor 数一定，よって Lê - Ramanujan から $(\mathbb{C}^n, \{F_{\gamma(\lambda)} = 0\})$ $(n \neq 3)$ の位相型が一定であり，結局，$(\mathbb{C}^n, \{f = 0\}) \underset{\text{top}}{\approx} (\mathbb{C}^n, \{g = 0\})$ がいえる。

参 考 文 献

[1] Hironaka, H.: Course on singularities, C.I.M.E., Bressanone, June, 1974.

[2] Lê Dũng Tráng: Topologie des singularites des hypersurfaces complexes, Asterisque 7 et 8 (1972).

[3] Lê Dũng Tráng and Ramanujam : The invariance of Milnor number implies the invariance of the topological type, Am. J. Math. 98 (1976), 67-78.

[4] Milnor, J. : Singular points of Complex Hypersurfaces. Princeton Univ. Press (1968).

[5] Milnor, J and Orlik, P. : Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. Topology 9 (1970), 385-393.

[6] Oka, M : Deformation of Milnor fibering. J. of Fac. sci. University of Tokyo. Sec. IA. vol. 20, no. 3, pp 397-400 (1973).

[7] Yoshinaga, E and Suzuki, M : On the topological types of singularities of Brieskorn-Pham type. Science Rep. of Yokohama National Univ. (1978).

[8] Yoshinaga, E and Suzuki, M : Topological types of quasihomogeneous singularities in $\mathbb{C}^2$. Topology vol. 18 (1979).

[9] Yoshinaga, E : Topological types of quasihomogeneous isolated singularities, to appear.

[10] Zariski, O : Contributions to the problem of equisingularities. C.I.M.E. Varenna (1969).