数理解析研究所講究録
第 403 巻 1980 年 88-95

C^2-安定写像について

京大 理 石川剛郎

本稿では，C^∞写像のある種の安定性を定義し，その非稠密性を示す（Prop. 1，Prop. 2）

§1. 定義と結果

M, N をそれぞれC^∞-manifolds，$C^\infty(M,N) = \{f : M \to N\ C^\infty\text{-map}\}$ とおく．$C^\infty(M,N)$には Whitney C^∞-topology を入れる

<u>Def. 1</u>（C^r-equivalence）

$f, g : M \to N$, C^∞-maps（resp. $f : (M,x) \to (N,y)$, $g : (M,x') \to (N,y')$ C^∞-map germs）が C^r-equivalent（$r = 0, 1, 2, \cdots, \infty$）

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ C^r-diffeom. $\sigma : M \to M$, $\tau : N \to N$（resp. C^r-local diffeom. $\sigma : (M,x) \to (M,x')$, $\tau : (N,y) \to (N,y')$）が存在して，$\tau \circ f = g \circ \sigma$ が成り立つ

<u>Def. 2</u>（C^r-(local) stability up to (A,f)）

(A,f)を，f における $C^\infty(M,N)$ の 1 つの germ of subset とする

とき，$f\in C^\infty(M,N)$がC^r-stable（resp. C^r-locally stable）up to (A,f) $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ fの$C^\infty(M,N)$における任意の近傍V_fに対し，fの近傍U_f（$U_f\subseteq V_f$）があって，$U_f\ni\forall g$（resp. $U_f\ni\forall g,\ M\ni\forall x$）に対し，$V_f\cap A\ni h$（resp. $V_f\cap A\ni h,\ M\ni x'$）が存在して，gとhがC^r-equivalent（resp. g at xとh at x'がC^r-equivalent）

Remark 1. fがC^r-stable up to (A,f)ならばC^r-locally stable up to (A,f)．また$(A,f)=(\{f\},f)$のときC^r-stability up to (A,f)は通常のC^r-stabilityに一致する．

Def. 3（C^r-l-(local) stability）

$f\in C^\infty(M,N)$がC^r-l-stable（resp. C^r-l-locally stable），($l\in\mathbb{N}$) $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ fのl-parameter deformation，$F: M\times\mathbb{R}^l\to N$，$F_\lambda=F(\ ,\lambda)$ $(\lambda\in\mathbb{R}^l)$，$F_0=f$，があって，$\forall\varepsilon>0$に対し，fがC^r-stable（resp. C^r-locally stable）up to $(\{F_\lambda\}_{\lambda\in B(l,\varepsilon)},f)$，ここで$B(l,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^l \mid |x|<\varepsilon\}$

Remark 2 $r\geqq r'$，$l\leqq l'$のとき，fがC^r-l-stable $\Rightarrow$ $C^{r'}$-l'-stable

Proposition 1. Mをcompactとする．自然数の組(m,n,l)が次の条件☆をみたすとき，つねに，$C^\infty(M^m,N^n)$の中で，C^2-l-locally stable なもの全体はdenseでない

$$☆\begin{cases} k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\text{があって，}\quad (a)\cdots\ 0\leqq m-k(n-m+k), \\ (b)\cdots\ m-k(n-m+k)+l\leqq\frac{1}{2}k(k+1)(n-m+k)-(n-m+k)^2-k^2 \end{cases}$$

Def. 4 (C^r-l-weak (local) stability)

$f\in C^\infty(M,N)$ が C^r-l-weakly stable (resp. C^r-l-weakly locally stable) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f の有限個の l-parameter deformations, $F_i : M\times\mathbb{R}^l\to N$, $F_{i,0}=f$ $(i=1,2,\cdots,s)$ があって, $\forall\varepsilon>0$ について f は C^r-stable (resp. C^r-locally stable) up to ($\{F_{1,\lambda_1}\}_{\lambda_1\in B(l,\varepsilon)} \cup \{F_{2,\lambda_2}\}_{\lambda_2\in B(l,\varepsilon)} \cup \cdots \cup \{F_{s,\lambda_s}\}_{\lambda_s\in B(l,\varepsilon)}$, f)

Remark. 3. f が C^r-l-weakly (locally) stable $\Rightarrow$ C^r-l-(locally) stable. しかし，この間に本当に差があるかどうか筆者は知らない

Example. 1 もっとも簡単な例として, $f(x)=x^3$, $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ は C^∞-1-locally stable である. この場合 C^∞-1-stable でもある.

Proposition 2. M を compact とする. 自然数の組 (m,n,l) が条件※ (c.f. Prop. 1) をみたすとき，つねに $C^\infty(M^m,N^n)$ の中で, C^2-l-weakly locally stable なもの全体は dense でない

Remark 4. 条件※の(a)から $k\leq m$ がしたがう

Remark. 5. Prop. 1, および 2 で, $l=0$ のときは, M が compact という仮定は必要ではない

Remark 6. Prop. 2 より自動的に Prop. 1 が従う (Rem. 3)

Example. 2 条件※をみたす (m,n,l) の例として，たとえば $(8,6,0)$, $(9,9,0)$, $(10,7,1)$, $(11,8,0)$, $(12,8,2)$ などがある.

§2. 補題と注意

<u>Lemma 1.</u> M, NをC^∞-manifolds, $N \supseteq A$を,(locally finite な) stratification $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ でWhitneyの条件aをみたすものが与えられている closed subset とする. このとき

$\{f \in C^\infty(M,N) \mid \forall\lambda\in\Lambda$ について, $f \pitchfork S_\lambda\}$

は$C^\infty(M,N)$において, Whitney C^1-topology (したがって, Whitney C^∞-topology) について open である

<u>Lemma 2</u> (trivial) $\mathbb{R}^m \supseteq U$を0を含む open set, $f : U \to \mathbb{R}^n$を$f(0)=0$かつ0で$\mathbb{R}^{n-m}(\subseteq \mathbb{R}^n)$にtransversal な$C^\infty$-map とする. このとき, $\varepsilon>0$があって, $\forall g : U \to \mathbb{R}^n$ C^∞-map s.t. $|g(x)-f(x)|<\varepsilon$ (for $x\in U$) に対し, $g(U)\cap\mathbb{R}^{n-m}\neq\emptyset$

<u>Lemma 3</u>, M, P, NをC^∞-manifolds, $M\times P \supseteq \Sigma$を$C^\infty$-submanifold とし, $F : M\times P\to N$ C^∞-map について, $F|M\times\{p\}$が$\Sigma\cap M\times\{p\}$の上で constant rank (for all $p\in P$) であり, しかも, その rank が$p\in P$によらないとする. このとき, $K = \bigcup_{(x,p)\in\Sigma}\{(x,p)\}\times \ker(T(F|M\times\{p\})_{(x,p)}) \subseteq TM$ は, C^∞で pointwise に linearly independent な local cross-sections over Σをもつ.

<u>Remark 7</u>. $\Sigma\ni\forall(x_0,p_0)$の$\Sigma$における充分小さな近傍$L$について, C^∞-map $\widetilde{\Phi} : L\times GL(k,\mathbb{R})\times GL(n-m+k,\mathbb{R})\to Q(k, n-m+k)$が次のように定義できる(ここで$Q(k,n-m+k)$

$=\{g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^{n-m+k}$; 2次同次写像$\}$) すなわち, Lを充分小さくとれば, $L\ni(x,p)$に対して$\langle\pi(\frac{\partial}{\partial y_1}|_{F(x,p)}),\cdots,\pi(\frac{\partial}{\partial y_{n-m+k}}|_{F(x,p)})\rangle_{\mathbb{R}}$ $=\mathrm{coker}(T(F|_{M\times\{p\}})_{(x,p)})$をみたす$F(x_0,p_0)$における座標系$y_1,\cdots,y_n$がとれ, さらにLemma 3より, KはLの上にsections $v_1,\cdots,v_k$をもつ(ここで $\pi: T_{F(x,p)}N\to\mathrm{coker}(T(F|_{M\times\{p\}})_{(x,p)})$はprojection) このとき, $\tilde{\Phi}(x,p,\sigma,\tau)=(\sigma,\tau)\cdot\left(\left(v_\mu\cdot v_\nu(y_i\circ F|_{M\times\{p\}})(x,p)\right)_{\mu\le\nu\le k}\right)$と定義する (ここで, $(x,p)\in L$, $(\sigma,\tau)\in GL(k)\times GL(n-m+k)$, また$GL(k)\times GL(n-m+k)$の$Q(k,n-m+k)$への自然な作用を考えている) このとき, $\tilde{\Phi}(\{(x,p)\}\times GL(k)\times GL(n-m+k))$は$F|_{M\times\{p\}}$の$(x,p)$における2-nd intrinsic derivative $d^2(F|_{M\times\{p\}})_{(x,p)}$を含む$GL(k)\times GL(n-m+k)$-orbitと一致する. さらに, $I=\{\frac{1}{\alpha}E_k,\alpha^2E_{n-m+k}\mid\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}\subseteq GL(k)\times GL(n-m+k)$ (閉正規部分群) とおくとき, $\Phi: L\times\{(GL(k)\times GL(n-m+k))/I\}\to Q(k,n-m+k)$; C^∞ mapが, $\Phi\circ(id_L\times\pi')=\tilde{\Phi}$をみたすように1意的に定まる. (ここで, π'はprojection)

§3. 証明

Remark 6にしたがって, Proposition 2のみを証明する

Proposition 2の証明

Step 1 (m,n,ℓ)が条件$*$をみたすとする(対応するkを1つとりfixする. いま仮りにC^2-ℓ-weakly locally stable

なもの全体が dense であるとしよう．すると，次の条件①，②，③ をみたす $f\in C^\infty(M,N)$ がある

① f は C^2-l-weakly locally stable

② $j^1f: M\to J^1(M,N)$ は $S_{m-k}, S_{m-k-1},\cdots, S_1, S_0$ にそれぞれ transversal

③ $(j^1f)^{-1}(S_{m-k})\neq\phi$

ここで $S_r(0\leq r\leq \min(n,m))$ は M 上の，fiber を $M(m,n,r)=\{A\in M(m,n;\mathbb{R})\mid \operatorname{rank}A=r\}$ にもつ bundle $\subseteq J^1(M,N)$ を表わす．

∵ はじめに条件②，③ をみたすもの全体が $C^\infty(M,N)$ の中で空でない open set をなすことを示そう．実際，条件※の(a)より，M の或る1点で j^1f が S_{m-k} に transversal に交わるような f をとる．これを②をみたすもので近似したとき，やはり③はみたされる（Lemma 2）よって空でない．さらに Lemma 1, 2 により，openness が従う．仮定より ① をみたすものは dense であったから，①，②，③をみたす $C^\infty(M,N)$ の元がある．

Step 2．①②③をみたす f をとる．①をみたすから，対応する f の有限個の l-parameter deformations $F_i: M\times\mathbb{R}^l\to N$ $(i=1,2,\cdots,s)$ をとり固定する．いま M は compact だから，

$\mathbf{F}: \mathbb{R}^l\times\cdots\times\mathbb{R}^l$ (s-times) $\longrightarrow C^\infty(M,N)\times\cdots\times C^\infty(M,N)$ (s-times)

$\mathbf{F}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s)=(F_{1,\lambda_1},F_{2,\lambda_2},\cdots,F_{s,\lambda_s})$ は連続．したがって $\varepsilon>0$ が存在して，$B(l,\varepsilon)\ni\forall\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ について $F_{1,\lambda_1},\cdots,F_{s,\lambda_s}$ は ②，③

をみたす．$J^1F_i\,;\,M\times\mathbb{R}^l\to J^1(M,N)$, $J^1F_i(x,\lambda)=j^1F_\lambda(x)$ とおくとき，J^1F_i は C^∞ かつ，$J^1F_i\pitchfork S_{m-j}$ $(j=k,k+1,\cdots,m)$ over $M\times B(l,\varepsilon)$ $(i=1,\cdots,s)$ をみたす．しかも $(J^1F_i)^{-1}(S_{m-k})\neq\phi$．したがって，$\Sigma_i=(J^1F_i)^{-1}(S_{m-k})$ とおくと Σ_i は，$M\times B(l,\varepsilon)$ の $m+l-k(n-m+k)$ 次元 submanifold になる

Step 3．ここで Lemma 3 および Remark 7 を思い起こす．すると $\Sigma_i=\bigcup_{j\in N}L_{ij}$ なる Σ_i の可算開被覆が存在して，

$$\Phi_{ij}\,;\,L_{ij}\times\{GL(k)\times GL(n-m+k)\}/L\to Q(k,n-m+k)$$

が Remark 7 の Φ と同じく定義できる．ここで I, $Q(k,n-m+k)$ は Remark 7 で定義したもの．いま条件※の(b)より

$$m+l-k(n-m+k)-1<\frac{1}{2}k(k+1)(n-m+k)$$

よって Image Φ_{ij} は $Q(k,n-m+k)\cong\mathbb{R}^{\frac{1}{2}k(k+1)(n-m+k)}$ の中で測度 0．したがって，$\bigcup_{\substack{1\leq i\leq s\\ j\in N}}\mathrm{Im}\,\Phi_{ij}$ は測度 0 ------ (※)

Step 4 他方 f の C^2-l-weakly locally stability と $F_i\ (i=1\cdots s)$ のとり方から，f の $C^\infty(M,N)$ における近傍 U_f が存在して，$U_f\ni{}^\forall g$ と $M\ni{}^\forall x_0$ に対して，$x\in M$, $i\in\{1,2,\cdots,s\}$, $\lambda\in B(l,\varepsilon)$ があって g at $x_0\underset{2}{\sim}F_{i,\lambda}$ at x ------ (※,※)．さて $(j^1f)^{-1}(S_{m-k})\ni x_0$ を fix して，$X=\{g\in C^\infty(M,N)\mid j^3g(x_0)=j^3f(x_0)\}\subseteq C^\infty(M,N)$ とおく．$X\cap U_f\ni g$ について (※,※) をみたす x は必然的に Σ_i に属する．よって，とくに，Remark 7 より

$$Od^2g_{x_0}\subseteq\bigcup_{j\in N}\mathrm{Im}\,\Phi_{ij}$$

ここで $Od^2g_{x_0}$ は $d^2g_{x_0}$ の $Q(k, n-m+k)$ の中での orbit.
したがって，

$$\bigcup_{g \in U_f \cap X} Od^2g_{x_0} \subseteq \bigcup_{1 \le i \le s,\, j \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}\, \Phi_{ij}$$

が成り立つ．右辺は[補]より測度0．ところが1方，左辺は内点を含むことがわかる．これで矛盾が導びかれ，Proposition 2（したがって Proposition 1）が証明された．

Q.E.D.

文献（最後の括弧は特に参考にした箇所を示す）

Bröcker. T.H. & Lander L.L.; Differentiable Germs and Catastrophes (Cambridge); (PP.85-91)

Feldman. E.A; The geometry of immersions I, Trans. A.M.S. 120, PP.185-224 (1965); (PP.196-197)

Mather. J.; Stability of C^∞-mappings V. Adv. in Math. 4. PP.301-336 (1970); (§6)

Trotman. D.J.A; Stability of Transversality to a Stratification Implies Whitney (a)-Regularity, Inv. Math. 50 PP.273-277 (1979); (historical notes)

以上