数理解析研究所講究録
第 404 巻 1980 年 8-13

Block Intersection Numbers of Block Designs

慶応大学　商学部　芳沢光雄

最初に、英語で簡単なアブストラクトを載せるということなので、主として述べた2つの定理を英語で書かせてもらいます。

__Theorem 1__ For each $n \geq 1$ and $\lambda \geq 1$,

(a) there exist at most finitely many block-schematic t-(v, k, λ) designs with $k-t=n$ and $t \geq 3$, and

(b) if also $\lambda \geq 2$, there exist at most finitely many block-schematic t-(v, k, λ) designs with $k-t=n$ and $t \geq 2$.

__Theorem 2__ A Steiner system $S(t, t+1, v)$ is block-schematic if and only if one of the following holds: (i) $t=2$, (ii) $t=3$, $v=8$, (iii) $t=4$, $v=11$, (iv) $t=5$, $v=12$.

$\mathbb{D}$をt-(v,k,λ) designとし、$\mathbb{D}$のi点を含むblockの個数をλ_iとする。$(\lambda_t=\lambda)$。

$\mathbb{D}$のblockから成る集合が、intersection numberに関して、association schemeをみたすとき、$\mathbb{D}$はblock-schematicであるという。すなわち、$|B_1\cap B_2|=h$となる$\mathbb{D}$の2つのblocks B_1, B_2に対して、$|\{B \mid B:\text{block}, |B\cap B_1|=i, |B\cap B_2|=j\}|$は$B_1$, B_2のとり方によらないで、h, i, jのみにより定まる$(0\leq h,i,j\leq k)$。

$\lambda=1$となるdesign (Steiner system)でblock-schematicになるものの例として、$S(5,6,12)$ $(=5\text{-}(12,6,1)\ \text{design})$について説明します。

Bを$S(5,6,12)$のblockとするとき、x_i $(i=0,\cdots,4)$でBとi点で交わるblockの個数を表わすことにすれば、Mendelsohnの定理から、x_iはBのとり方によらず、

$$\begin{cases} x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=(\lambda_0-1) \\ x_1+\binom{2}{1}x_2+\binom{3}{1}x_3+\binom{4}{1}x_4=(\lambda_1-1)\binom{6}{1} \\ x_2+\binom{3}{2}x_3+\binom{4}{2}x_4=(\lambda_2-1)\binom{6}{2} \\ x_3+\binom{4}{3}x_4=(\lambda_3-1)\binom{6}{3} \\ x_4=(\lambda_4-1)\binom{6}{4} \end{cases}$$

ここで、$\lambda_i=\dfrac{(12-i)\cdots 8}{(6-i)\cdots 2}$.

以上から、$x_4=45$, $x_3=40$, $x_2=45$, $x_1=0$, $x_0=1$ が出る。
$S(5,6,12)$ の自己同型群が M_{12} であることを使って、次のことを示す。(そのことから、block-schematic であることが分る。)

「B_1, B_2, B_3, B_4 が $|B_1\cap B_2|=|B_3\cap B_4|$ をみたす $S(5,6,12)$ の blocks ならば、次のような M_{12} の元 σ がある: $B_1^{\sigma}=B_3$, $B_2^{\sigma}=B_4$」.
次の4つの場合に分ける。

(1) $|B_1\cap B_2|=|B_3\cap B_4|=0$, (2) $|B_1\cap B_2|=|B_3\cap B_4|=2$

(3) $|B_1\cap B_2|=|B_3\cap B_4|=3$, (4) $|B_1\cap B_2|=|B_3\cap B_4|=4$.

(1)のとき. B_1 の complement が B_2 で、B_3 の complement が B_4 であるから、$S(5,6,12)$ の block-transitive 性を使えば o.K.

(2)のとき. block-transitive 性から $B_1=B_3$ としてよい。さて、$M_{12}(=Aut(S(5,6,12)))$ の B_1 への制限は S_6 (6次の対称群) となるから、さらに、$B_1\cap B_2=B_1\cap B_4$ としてよい。
$B_1=\{1,2,3,4,5,6\}$, $S(5,6,12)$ の点集合を $\{1,\cdots,12\}$ とする。
B_1 との intersection が $B_1\cap B_2$ である block の個数は、

$45\div\binom{6}{2}=3$ 個 である。$B_1\cap B_2=\{4,5\}$ としてよい。
$a=(123)(4)(5)(6)\cdots$ となる order 3 の permutation が M_{12} にある。B_1 との intersection が $B_1\cap B_2$ である blocks を B_2, B_4, B_5 とする。a は $(B_2\,B_4\,B_5)$ という働きをする。なぜならば、もし a が B_2, B_4, B_5 を fix すると、a は B_2, B_4, B_5 上、少なくとも1点ずつ fix するので、M_{12} の性質に反する。

3), (†) のときは(2)と同様に示せる。($S(5,6,12)$が block-schem. になることの説明はどこにもなく、又、置換群になれた人でなくてはちょっと分からないと思ったので、あえて書きました。)

Th. 1 の証明の概略

$\mathbb{D}$: block-schem. t-(v, k, λ) design.

$B_1, \cdots, B_{\lambda_0}$: $\mathbb{D}$のblocks全体.

x_j: B_iとj点で交わるblocksの個数.

$\lambda_0 \times \lambda_0$行列$A_h$ $(h=0, \cdots, k)$を次のように定める。

$$A_h(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{if } |B_i \cap B_j| = h, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

$\mathbb{D}$がblock-schem. であるという性質を使って、次の式を得る。(*) $A_i A_j = \sum_{h=0}^{k} \mu(i,j,h) A_h$ $(0 \le i, j \le k)$.

ここで$\mu(i,j,h)$は次のような整数である。

- $|B_1 \cap B_2| = h$となる2つのblocksがあるとき,
  $\mu(i,j,h) = |\{B \mid B: \text{a block}, |B \cap B_1| = i, |B \cap B_2| = j\}|$.
- $|B_1 \cap B_2| = h$となる2つのblocksがないとき,
  $\mu(i,j,h) = 0$.

さて、$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}\lambda_0$次、を(*)の両辺に右からかければ、

$$x_i x_j = \sum_{h=0}^{k} \mu(i,j,h) x_h.$$

この式および一部の$\mu(i,j,h)$が正になることを使って、$k-t$とλでvをboundしたのである。

注意として、Th.1の(a)にある $t\geq 3$ は $t\geq 2$ にすることはできない。それは、一般的に $S(2,k,v)$ が block-schem. であることが知られており、又、$S(2,3,v)$ は無限個あるからである。

<u>Th.2の証明の概略</u>

Th.1の証明のideaから、$t\leq 43$ および次の式が出る。

$$x_{t-1}^2=\mu(t-1,t-1,t-3)x_{t-3}+\mu(t-1,t-1,t-2)x_{t-2}+\mu(t-1,t-1,t+1)x_{t+1}+x_{t-1}. \qquad \cdots\cdots ①$$

a_α, a_β を次のような λ_0 次のたてベクトルとする。($\alpha\neq\beta$:点)

$$a_\alpha\ (a_\beta) \text{ の第}i\text{成分} = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha\in B_i\ (\beta\in B_i) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$a_\alpha-a_\beta$ は A_k の固有ベクトルになることが分かり、対応する固有値を d_k とすれば、次の式か成り立つことが分る。

$$d_i+\binom{i+1}{i}d_{i+1}+\cdots+\binom{t-1}{i}d_{t-1}+\binom{t+1}{i}=\binom{t}{i-1}(\lambda_i-\lambda_{i+1}).$$
$$(i=1,\cdots,t-1).$$

(最近、d_k に関する上式が一般的に、block-regular design についても成り立つことが分かりました。)

各 d_k は v, t で与えられることに注意。

4ページ式(※)に右から $a_\alpha-a_\beta$ をかけることを考えれば、ここでは次の式が成り立つ。

$$d_{t-1}^2=\mu(t-1,t-1,t-3)d_{t-3}+\mu(t-1,t-1,t-2)d_{t-2}+\mu(t-1,t-1,t+1)d_{t+1}+\lambda_{t-1} \qquad ②$$

$\mu(t-1, t-1, t-3)$, $\mu(t-1, t-1, t-2)$, $\mu(t-1, t-1, t-1)$ がとりうる値の範囲を求め、①, ②が成り立つ (t, v) を、blocks の個数に関する整数条件 (λ_j : integer) をみたす範囲内で求めた。(computer 使用).

(t, v) として、$(3,8)$, $(3,10)$, $(3,14)$, $(4,11)$, $(4,15)$, $(5,12)$, $(5,16)$ が出た。ここで $(3,10)$, $(3,14)$, $(4,15)$, $(5,16)$ からは矛盾を導くことが出来た。$S(3,4,8)$, $S(4,5,11)$, $S(5,6,12)$ は block-schem. なので、Th. 2 が得られた。

尚、(t, v)を決定するときの計算は、東大理学部情報科学科榎本彦衛先生にやってもらいました。又、別のプログラムで同じ計算を学習院大学数学科、中野伸, 藤野賢 両君にもやってもらいました。計算機を使って色々と調べて下さった方々に、心から感謝いたします。