数理解析研究所講究録
第404巻 1980年 117-129

ある特殊なWilliamson等式

名工大　情報　　沢出和江

1. R.Turyn[2]は1972年にWilliamson型Hadamard行列の無限系列を発見したが[3]，それは奇数n次の特殊な形のWilliamson等式

$$1^2+1^2+(1+2\sum_{\nu\in A}e_\nu u_\nu)^2+(1+2\sum_{\nu\in B}e_\nu u_\nu)^2=4n \qquad (1)$$

に基づくものである．ここに，ζは1のn乗根，$u_\nu=\zeta^\nu+\zeta^{-\nu}$，$e_\nu=+1$又は$-1$；$A=\{l_1,l_2,\cdots,l_h\}$は$\Omega=\{1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\}$の部分集合，BはAの余集合とする．

先に，式(1)の中で最も特殊な場合で

- $n\equiv 1 \pmod 4$ならば

$$1^2+1^2+(1+2u_l)^2+(1+2\sum_{\nu\neq l}e_\nu u_\nu)^2=4n$$

に解がない，

- $n\equiv 3 \pmod 4$ならば

$$1^2+1^2+(1-2u_l)^2+(1+2\sum_{\nu\neq l}e_\nu u_\nu)^2=4n$$

に解がない

ことを喜安善市先生[1]より教えて戴いたことがこの研究の契機となり，その拡張を行なって以下のことが得られた．

2. 式(1)は

$$f=\left(\frac{1}{2}+\sum_{\nu\in A}e_\nu u_\nu\right)+i\left(\frac{1}{2}+\sum_{\nu\in B}e_\nu u_\nu\right)$$

に対して

$$f\bar{f}=n-\frac{1}{2} \tag{2}$$

とも書けるが，記号を少し変えて

$$f=\sum_{\nu=0}^{n-1}\varepsilon_\nu\zeta^\nu,\quad \varepsilon_0=\frac{1+i}{2},\quad \varepsilon_\nu=\varepsilon_{-\nu}\in\{\pm1,\pm i\}\ (\nu\not\equiv 0\pmod n)$$

とおくと，式(2)は

$$\sum_{\mu+\lambda\equiv\nu}\varepsilon_\mu\bar{\varepsilon}_\lambda=0\qquad(\nu=1,2,\cdots,n-1) \tag{3}$$

を意味する．

今，ordered pair を (,)，unordered pair を [,] で記すことにすると，式(3)は $\nu\not\equiv 0\pmod n$ の時

(i) $\mu+\lambda\equiv\nu$ の n 個の解は，$\mu\equiv\lambda\equiv\frac{\nu}{2}$ 以外は (μ,λ)，(λ,μ) のように対となってあらわれる；

(ii) 対 $(0,\nu)$，$(\nu,0)$ を別に取出し

$$sgn\,\varepsilon_\nu=\begin{cases}1 & (\varepsilon_\nu=1\text{ または }i\text{ のとき})\\ -1 & (\varepsilon_\nu=-1\text{ または }-i\text{ のとき})\end{cases}$$

と定義すると

$$\varepsilon_0\overline{\varepsilon_\nu}+\varepsilon_\nu\overline{\varepsilon_0}=\frac{\varepsilon_\nu+\overline{\varepsilon_\nu}}{2}+i\,\frac{\overline{\varepsilon_\nu}-\varepsilon_\nu}{2}=\operatorname{sgn}\varepsilon_\nu\,;$$

(iii) さらに (i), (ii) 以外の対 (μ,λ), (λ,μ) については

$$\varepsilon_\mu\overline{\varepsilon_\lambda}+\varepsilon_\lambda\overline{\varepsilon_\mu}=\begin{cases}\pm 2 & (\varepsilon_\mu\overline{\varepsilon_\lambda}\text{ が実数のとき}),\\ 0 & (\varepsilon_\mu\overline{\varepsilon_\lambda}\text{ が虚数のとき});\end{cases}$$

以上 (i), (ii), (iii) より

$$0=\varepsilon_{\frac{\nu}{2}}\overline{\varepsilon_{\frac{\nu}{2}}}+(\varepsilon_0\overline{\varepsilon_\nu}+\varepsilon_\nu\overline{\varepsilon_0})+\sum_{\substack{[\lambda,\mu]\\ \varepsilon_\mu\overline{\varepsilon_\lambda}=\pm 1}}(\varepsilon_\mu\overline{\varepsilon_\lambda}+\varepsilon_\lambda\overline{\varepsilon_\mu})$$

$$\equiv 1+\operatorname{sgn}\varepsilon_\nu-2\left(\frac{n-3}{2}-N_\nu\right)\qquad(\mathrm{mod}\,4).\qquad(4)$$

ここで, N_ν は $\frac{n-3}{2}$ 個の $[\lambda,\mu]$ の中で, $\varepsilon_\mu\overline{\varepsilon_\lambda}$ が虚数であるものの個数である. 式(4)は

$$\operatorname{sgn}\varepsilon_\nu\equiv n+2N_\nu\qquad(\mathrm{mod}\,4)\qquad(5)$$

を意味する.

一方, 別の表現をすれば, $N_\nu=\#\{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda+\mu\equiv\nu,\ \lambda\in\pm A,\ \mu\in\pm B\}$ であるが,

$$\begin{aligned}N_\nu&\equiv 2r-N_\nu\\&\equiv\#\{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda+\mu\equiv\nu,\ \lambda\in\pm A\}-N_\nu\\&\equiv\#\{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda+\mu\equiv\nu,\ \lambda\in\pm A,\ \mu\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,n)\}\\&\quad+\#\{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda+\mu\equiv\nu,\ \lambda\in\pm A,\ \mu\in\pm A\}\qquad(\mathrm{mod}\,2).\end{aligned}\qquad(6)$$

A の特性函数を

$$\delta_A(\nu)=\begin{cases}1 & \nu\in\pm A \text{ のとき}\\ 0 & \nu\notin\pm A \text{ のとき}\end{cases}$$

と定義する時，式(6)の最後の辺の第1項は$\delta_A(\nu)$に等しく，第2項の集合には(λ,μ)と共に(μ,λ)も属するから第2項は一般に偶数で，唯$\nu\equiv 2\lambda \pmod n$なる$\lambda\in\pm A$が存在する時だけは奇数になるので，$A^*$を$\{2l_1,2l_2,\cdots,2l_r\}$の各要素の符号を適当に選んでΩの部分集合ならしめたものとすると第2項は法2に関してA^*の特性函数$\delta_{A^*}(\nu)$に合同である．
従って，$N_\nu\equiv\delta_A(\nu)+\delta_{A^*}(\nu) \pmod 2$で，定理1が得られる．

定理1.　$$e_\nu\equiv n+2\delta_A(\nu)+2\delta_{A^*}(\nu) \pmod 4. \qquad (7)$$

3. Ωの部分集合Aを互いに素な$A_+=\{\nu\in A\mid e_\nu=1\}$と$A_-=\{\nu\in A\mid e_\nu=-1\}$とに分割し，Bについても同様とする．
§2で得た式(7)から，次の必要条件が挙げられる．

定理2.　n次のWilliamson等式(1)が成立するならば，

1. $2n-1=p_1p_2\cdots p_kd^2$（p_i $(i=1,\cdots,k)$は相異なる奇素数）と表わした時，各iについて，$p_i\equiv 1 \pmod 4$.
2. 1.を満足するnについて，$4n-2$を2つの奇数α,βの平方の和として書き表わす：$4n-2=\alpha^2+\beta^2$，$\alpha\equiv 1$，

$\beta \equiv 1 \pmod 4$. このとき, $\alpha = 1+4W_1$, $\beta = 1+4W_2$ で決まる W_1, W_2 に対して

(i) $n \equiv 1 \pmod 4$ の時, $S = \frac{1}{2}(W_1^2+W_2^2)$ について

$\#A_- = \#B_- = S$, $\#A_+ = W_1+S$, $\#B_+ = W_2+S$;

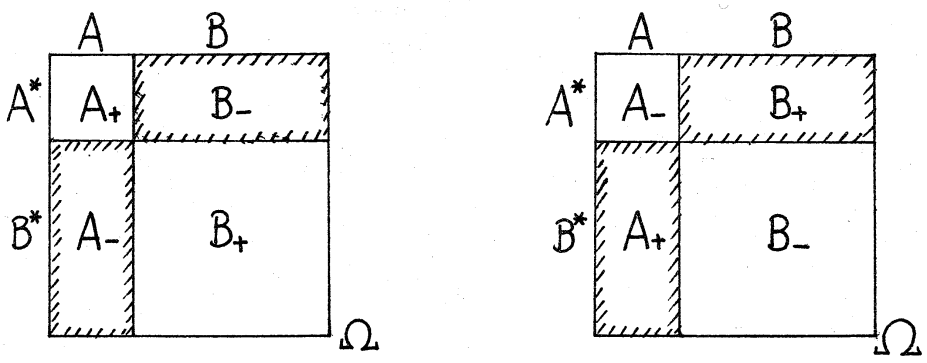
(ii) $n \equiv 3 \pmod 4$ の時, $S = \frac{1}{2}(W_1^2+W_2^2+W_1+W_2)$ について

$\#A_+ = \#B_+ = S$, $\#A_- = S-W_1$, $\#B_- = S-W_2$.

(証明) 1. は $4n-2 = \alpha^2+\beta^2$ が解を持つ為の, 即ち $2n-1$ が2平方和で表現出来る為の必要十分条件として明らかである.

2. $n \equiv 1 \pmod 4$ の時, 式(7)は $\nu \in \pm A$ について, $e_\nu \equiv 3+2\delta_{A^*}(\nu) \pmod 4$ となり, $e_\nu = 1$ は $\nu \in \pm A^*$ と同値. 従って, $A_+ = A \cap A^*$. 同様にして図1(a)を得る. 即ち

$$\begin{cases} A_+ = A \cap A^*, & A_- = A \cap B^*, \\ B_+ = B \cap B^*, & B_- = B \cap A^*. \end{cases}$$



(a) $n \equiv 1 \pmod 4$ のとき. (b) $n \equiv 3 \pmod 4$ のとき.

図1. ベン図式.

n：奇数より，$\#A=\#A^*$，$\#B=\#B^*$ であるから，図1(a)より明らかなように

$$n\equiv 1 \pmod 4 \text{ならば} \qquad \#A_- = \#B_- .$$

今，$S=\#A_-=\#B_-$ とおく．また仮定より，$W_1=\#A_+-\#A_-$，$W_2=\#B_+-\#B_-$．　従って

$$W_1+W_2=(r-2S)+\left(\frac{n-1}{2}-r-2S\right)=\frac{n-1}{2}-4S$$

及び

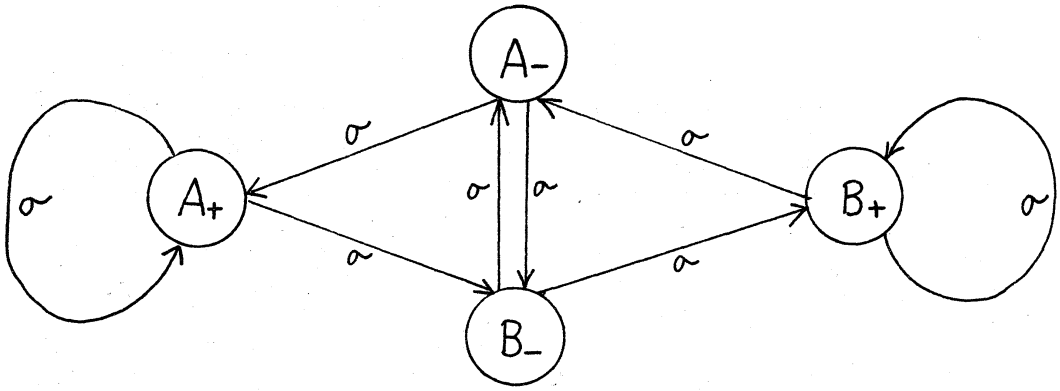
$$(1+4W_1)^2+(1+4W_2)^2=4n-2$$

より

$$W_1^2+W_2^2=2S .$$

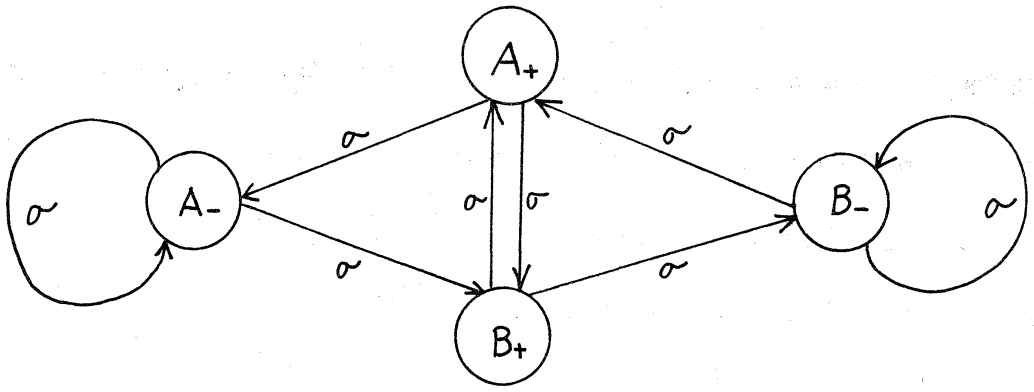
$n\equiv 3 \pmod 4$ の場合も同様な方法で得られる．

定理2により，与えられた n から得られる1組の α，β について，パラメータ $\#A_+$，$\#A_-$，$\#B_+$，$\#B_-$ が全て決定される．



(a)　$n\equiv 1 \pmod 4$ のとき

図2．有向グラフ



(b) $n \equiv 3 \pmod 4$ のとき

図2.（続き）

また

$$\sigma : \Omega \ni \nu \longmapsto \nu^* \in \Omega, \quad \nu^* \equiv 2\nu \text{ または } -2\nu \pmod n$$

でσを定義すると，式(7)から図2(a),(b)のような有向グラフが得られる．

4. 定理2とは逆に，パラメータ$\#A = r$を持つWilliamson等式の次数nは，以下のようにrによって決定されることも分かる．

定理3. $\#A = r$なるWilliamson等式(1)が成立する次数nは

$$4r+1 = c^2 + d^2$$

を満足するc，dについて

$$n = 4r+2-(c+d).$$

さらに

$$4r+2-\sqrt{8r+1} \leqq n \leqq 4r+2+\sqrt{8r+1}.$$

（証明）　$b = \#A - \#B = r - (\frac{n-1}{2} - r) = 2r - \frac{n-1}{2}$ とおくと，定理2より，$W_1 - W_2 = \pm(2r - \frac{n-1}{2}) = \pm b$.　したがって，

$$n = (4r+2) - (2b+1). \tag{8}$$

また，$a = 1 + 2(W_1 + W_2)$ とおくと

$$2n-1 = \frac{1}{2}\{(1+4W_1)^2 + (1+4W_2)^2\} = (1+2W_1+2W_2)^2 + 4(W_1-W_2)^2 = a^2 + 4b^2.$$

式(8)から

$$2n-1 = 2\{(4r+2)-(2b+1)\} - 1 = a^2 + 4b^2,$$

$$8r+2 = a^2 + (2b+1)^2,$$

$$4r+1 = \left(\frac{a+1}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{-a+1}{2} + b\right)^2 = c^2 + d^2,$$

但し，$c = \frac{a+1}{2} + b$，$d = \frac{-a+1}{2} + b$.　従って，

$$c + d = 2b + 1. \tag{9}$$

(8)及び(9)より

$$n = (4r+2) - (c+d).$$

また一般に，$(c+d)^2 = 2(c^2+d^2) - (c-d)^2 \leqq 8r+2-1 = 8r+1$.

$$\therefore \quad 4r+2-\sqrt{8r+1} \leqq n \leqq 4r+2+\sqrt{8r+1}.$$

これは，nがrによって定まる限界内に入ることを示す．

定理3により，喜安先生が示された$r=1$に対しては，次数$n = 3, 5, 7, 9$の時のみ等式(1)の成立が可能で，

$n \geqq 11$ならば　$1^2+1^2+(1\pm 2u_\ell)^2+(1+2\sum_{\nu\neq\ell} e_\nu u_\nu)^2 = 4n$　に解がない

ことが証明された．

また，$r=5,8,14,17,\cdots\cdots$については，$4r+1$を2平方和に表わすことが出来ない（定理2の1.）ので，このようなパラメータrを持つ等式(1)は，如何なるnをもってしても成立しないことに注意したい．

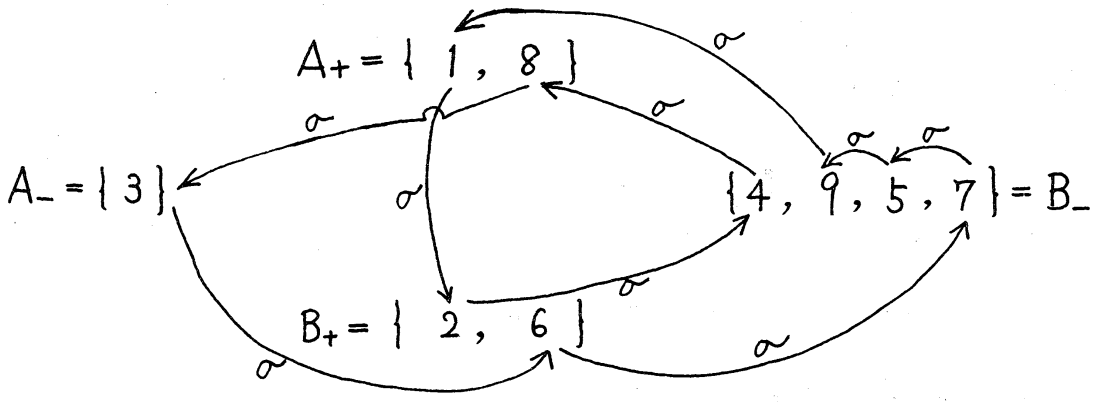
5. 定理2を適用して，我々は$n\leq 37$及び$n=61$についてWilliamson等式(1)の探索をすべて行なった．$n\leq 35$では充分手計算で間に合うが，$n=37$と$n=61$については計算機（HITAC 8450）を使ってrun timeそれぞれ2秒と10分43秒を要した．61の場合は，37の探索に使用したアルゴリズムを改良した為，計算時間が随分短縮されている．

また，$n=37$から飛ばして$n=61$の計算を特に試みたのは，$n=61$が2を原始根にもつ素数で，しかも$2n-1$が素数中となりTuryn型[3]のものの存在することが分っていると言う点にある．この時，§3の写像$\sim$が法nでは位数$\frac{n-1}{2}$の巡回群を生成する．即ち，得られる有向グラフは長さが$\frac{n-1}{2}$の周期を持つ唯1つの閉グラフで構成される為，探索のアルゴリズムが中でも最も単純で計算機にのせ易かったからである．一般にnが素数のとき，nの既約剰余類の乗法群の中において-1と2とで生成される部分群の位数をtとすると，問題の有向グラフはそれぞれ長さ$\frac{t}{2}$をもつ$\frac{n-1}{t}$個の閉グラフで構成される．

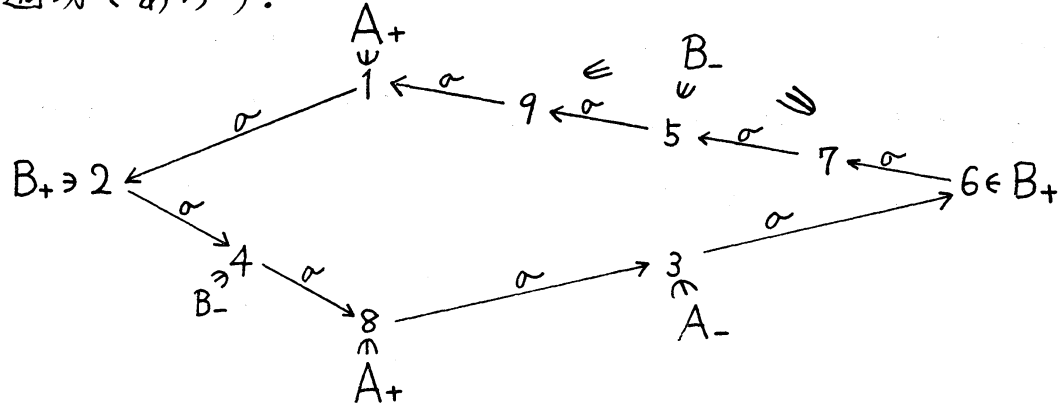
例として，同じく2を原始根にもつ素数19の場合を挙げる．19次のWilliamson等式：

$$76 = 4\cdot 19 = 1^2+1^2+5^2+7^2$$
$$= 1^2+1^2+(1+2u_1+2u_8-2u_3)^2+(1+2u_2+2u_6-2u_4-2u_5-2u_7-2u_9)^2$$

に対する有向グラフは



であるが，閉グラフであることを明白にするには，下図の方が適切であろう．



我々の現在迄の計算結果では，Williamson等式(1)で成立するのは，R. Turynによって発見された系列に属するもののみで[4]，表1の通りである．

表1. $n<100$ に対するパラメータ表. $(2n-1=a^2+b^2,\ r_1=\#A,\ r_2=\#B.)$

$n \equiv 1 \pmod 4$

n	2n-1	a	b	α	β	W_1	W_2	s	$\#A_+$	$\#A_-$	$\#B_+$	$\#B_-$	r_1	r_2	Result
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	One solution
5	9	-3	0	-3	-3	-1	-1	1	0	1	0	1	1	1	One solution
9	17	1	4	-3	5	-1	1	1	0	1	2	1	1	3	One solution
13	25	5	0	5	5	1	1	1	2	1	2	1	3	3	None
		-3	4	-7	1	-2	0	2	0	2	2	2	2	4	One solution
17	33	—	—												
21	41	5	4	1	9	0	2	2	2	2	4	2	4	6	One solution
25	49	-7	0	-7	-7	-2	-2	4	2	4	2	4	6	6	One solution
29	57	—	—												
33	65	1	8	-7	9	-2	2	4	2	4	6	4	6	10	None
		-7	4	-11	-3	-3	-1	5	2	5	4	5	7	9	None
37	73	-3	8	-11	5	-3	1	5	2	5	6	5	7	11	One solution
41	81	9	0	9	9	2	2	4	6	4	6	4	10	10	
45	89	5	8	-3	13	-1	3	5	4	5	8	5	9	13	
49	97	9	4	5	13	1	3	5	6	5	8	5	11	13	
53	105	—	—												
57	113	-7	8	-15	1	-4	0	8	4	8	8	8	12	16	
61	121	-11	0	-11	-11	-3	-3	9	6	9	6	9	15	15	One solution *
65	129	—	—												
69	137	-11	4	-15	-7	-4	-2	10	6	10	8	10	16	18	
73	145	1	12	-11	13	-3	3	9	6	9	12	9	15	21	
		9	8	1	17	0	4	8	8	8	12	8	16	20	
77	153	-3	12	-15	9	-4	2	10	6	10	12	10	16	22	
81	161	—	—												
85	169	13	0	13	13	3	3	9	12	9	12	9	21	21	
		5	12	-7	17	-2	4	10	8	10	14	10	18	24	
89	177	—	—												
93	185	13	4	9	17	2	4	10	12	10	14	10	22	24	
		-11	8	-19	-3	-5	-1	13	8	13	12	13	21	25	
97	193	-7	12	-19	5	-5	1	13	8	13	14	13	21	27	

* 山田美枝子氏が1979年に Shift register 列を使って発見されたもの.

表1. (続き)

$n \equiv 3 \pmod 4$

n	2n-1	a	b	α	β	W_1	W_2	s	$\#A_+$	$\#A_-$	$\#B_+$	$\#B_-$	r_1	r_2	Result
3	5	1	2	1	-3	0	-1	0	0	0	0	1	0	1	One solution
7	13	-3	2	5	1	1	0	1	1	0	1	1	1	2	One solution
11	21	—	—												
15	29	5	2	-3	-7	-1	-2	1	1	2	1	3	3	4	One solution
19	37	1	6	5	-7	1	-2	2	2	1	2	4	3	6	One solution
23	45	-3	6	9	-3	2	-1	3	3	1	3	4	4	7	None
27	53	-7	2	9	5	2	1	4	4	2	4	3	6	7	One solution
31	61	5	6	1	-11	0	-3	3	3	3	3	6	6	9	One solution
35	69	—	—												
39	77	—	—												
43	85	9	2	-7	-11	-2	-3	4	4	6	4	7	10	11	
		-7	6	13	1	3	0	6	6	3	6	6	9	12	
47	93	—	—												
51	101	1	10	9	-11	2	-3	6	6	4	6	9	10	15	
55	109	-3	10	13	-7	3	-2	7	7	4	7	9	11	16	
59	117	9	6	-3	-15	-1	-4	6	6	7	6	10	13	16	
63	125	-11	2	13	9	3	2	9	9	6	9	7	15	16	
		5	10	5	-15	1	-4	7	7	6	7	11	13	18	
67	133	—	—												
71	141	—	—												
75	149	-7	10	17	-3	4	-1	10	10	6	10	11	16	21	
79	157	-11	6	17	5	4	1	11	11	7	11	10	18	21	
83	165	—	—												
87	173	13	2	-11	-15	-3	-4	9	9	12	9	13	21	22	
91	181	9	10	1	-19	0	-5	10	10	10	10	15	20	25	
95	189	—	—												
99	197	1	14	13	-15	3	-4	12	12	9	12	16	21	28	

この結果からは，問題のWilliamson等式の成り立つのはTurynによって発見された系列に属するもののみであるのか否かが未だ分らない．また，等式(1)をさらに拡張して

$$1^2+(1+2\sum_{\nu\in A}e_\nu u_\nu)^2+(1+2\sum_{\nu\in B}e_\nu u_\nu)^2+(1+2\sum_{\nu\in C}e_\nu u_\nu)^2=4n$$

についてもパラメータを決定出来ないだろうかが今後の課題とするところである．

文　献

1. 喜安善市，私信，1980年1月．
2. R.J. Turyn, An infinite class of Williamson matrices, J. Combinatorial Theory Ser. A12 (1972), 319-321.
3. 山田美枝子，Turyn型Williamson行列について，京都大学数理解析研究所講究録，本号．
4. 山本幸一，Williamson型Hadamard行列とshift register列について，大阪市立大学での「実験計画法とその関連分野」の研究集会予稿集，1978年12月．