数理解析研究所講究録
第 406 巻 1980 年 47-51

数式処理の実例

京大数理研　一松 信

1. IV-ICME (1980年8月 Berkeley) より [2]

第4回国際数学教育会議(IV-ICME) における数多くのMini-Lectures のうち, 数式処理の実演は大変に興味深かった. 使用システムは同年2月に Berkeley に入った VAX 11/780 用に MACSYMA を改造した VAXYMA で, OS は UNIX である. 以下の実例で, 時間は ms 単位の CPU-時間である.

			時間
1.	30! を求めよ		16
	それを因数分解せよ. 答 $2^{26}\cdot3^{14}\cdot5^{7}\cdot7^{4}\cdot11^{2}\cdot13^{2}\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29$		133
2.	$1/(x^3+2)$ を積分せよ.	入力	50
		計算	1683
3	上記の結果を微分せよ		416
	それを整理簡易化せよ. 答 $1/(x^3+2)$		916
4.	$(x+3)^{20}$ を展開せよ	入力	33
		計算	150
	それを微分せよ		83

時間

それを因数分解せよ. 答 $20(x+3)^{19}$　3066

5. x^6-1 を因数分解せよ　200

$x^6-1=0$ を解け　全 3250

$x=(\sqrt{3}i+1)/2$ が $x^6=1$ を満足することを確かめよ　116

6. $x^6-1=0$ を数値的に解き, もとの方程式を満足することを確かめよ. 誤差最大 5.2E−17

解 233　検 183

7. SQRT(1+x) を $x=0$ で x^5 まで展開　200

2乗して検算　216

8. $x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}$ を x^5 まで展開　入力 183

計算 766

9. $f(x)$ の Taylor 展開 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i\frac{d^i}{dx^i}f(x)\Big|_{x=0}}{i!}$　333

10. $\sin(x)*\cos(x)$ の Taylor 展開　入力 16

(正しく $\sin(2x)/2$ と変形して一般項) ⟶ 計算 533

11. $\log(\sin(x)/x)$ を $\int\cot x\,dx-\log x$ に変形　16

12. 4次の van der Monde 行列式の展開　533

それを4変数多項式として因数分解　7283

13. Rodrigues の公式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

により $P_n(x)$ を計算. $n=5$ まで　2316

14. $3f'' - 2g' = \sin x$, $ag'' + f' = a\cos x$ (a：定数)
を解け

入力	133
Laplace 変換	2916
解いて 逆変換	5950
総計	71050 ms

これらはそれほど難問ではないが，大学初年級の学生で，全部を 7100 秒(≒ 2時間)で解いたら，かなり腕達者といってよかろう．もちろん端末による処理時間は数十分を要するが，これらの例では，もう人間よりはるかに早くなった！

この他助変数を含む非線型常微分方程式の解を形式的べき級数に書き，順次の係数を求める例も報告された．

2. Norman 教授の講演より

数式処理は，M.I.T.が先端をきってきたが，天体力学用の CAMAL を地道につみ上げてきた Cambridge グループが，いまやその王座をゆるがし始めている．

近年 Hensel の補題の応用により，多項式の因数分解が著るしく能率化された．Demonstration 用ではあるが，次の多項式の因数分解が 1 秒(!) でできている．

$$81x^8 + 4x^7 + 50306x^6 + 2484x^5 - 1532169x^4$$
$$-75816x^3 - 76622274x^2 - 3779136x - \text{(つづく)}$$

-4723920 ;　　定数項 $= 2^4 \times 3^{10} \times 5$

答は $(81x^2+4x+5)\times(x^2-54)\times(x^2+27)$
$\times(x^2+648)$。

他の興味ある例は定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-\alpha \sin t}{\beta - \sin t}\, dx \ (\beta>1)$ である．これは不定積分が初等函数でえられるが，arctanの項に機械的に0，2π を代入して主値をとると，答が誤る．積分された函数が連続になるように，arctan の枝を正しくとらなければならない．こういう注意は，初歩の学生がよく犯す誤りであり，微積分の教科書に注意されているが，計算機も新米の人間と同じ誤りを犯すのである．

この積分を単位円周上の複素積分に直して，留数の定理で求めることも可能だが，積分路で囲まれた領域内の極を正しく判別する topology の問題が，意外な伏兵である．人間の幾何学的直観を計算機で扱うことは，予想外の難問らしい．

3. IFIP の講演より [3]

8-IFIP (東京と Melbourne) において，REDUCE の作者 Hearn がいくつかの実例を示した．

1° 初等函数の等しいことの判定

一般には決定不能であるが，部分的には可能である．

$$\log \tan(x+\pi/4) = \operatorname{arsinh} \tan(2x)$$

は，厳密に正しい式であり，最近ようやく数式処理による検証（公式を記憶させておいて変形）が成功した．

2° $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}}{x}\,dx$ のように，二重根号を含む不定積分は難物だったが，これも最近ようやく成功した．しかしまだ根号と exp, log の混在する函数を一般的に扱うことまでは成功していない．

参考文献

[1] 佐々木建昭：EUROSAM '79 の報告，記号処理 9－3 (1979)

[2] 一松信．ICME-IV．参加レポート．日本数学教育学会研修団発行 (1980)

[3] A.C.Hearn, The Personal Algebraic Machine, Proc. Information Processing 80, North-Holland, 1980 p.621-629.