数理解析研究所講究録
第409巻 1980年 23-38

Wildly ramified elliptic surfaces

南パリ大学 M. Raynaud
(桂 利行 記)

kを標数p、$(p\geqq 0)$の代数的閉体，Cをk上定義された完備な非特異代数曲線とする。Cの有理函数体をKと書く。我々は，k上定義された相対的極小楕円曲面$f: X \longrightarrow C$を考える。その generic fiber をX_Kと書く。

楕円曲線X_Kは，かならずしもK上の有理点を含むとはかぎらないが，そのヤコビ多様体E_Kを考えれば，それは1次元アーベル多様体であり，原点0_Kを含む。X_Kは，group scheme E_Kに付随した principal homogeneous space である。楕円曲線E_Kは，有理点σ_Kを拡張した section σを持つ楕円曲面$g: \bar{E} \longrightarrow C$の generic fiber になっている。楕円曲面$g: \bar{E} \longrightarrow C$は，$f: X \longrightarrow C$に付随したヤコビ楕円曲面である。$E$を，$C$上 smooth な$\bar{E}$の最大の open subscheme とする。$E$は，section σを持つ，C-groupscheme である。Eの neutral component をE^0と書く。E^0の fiber

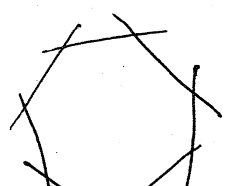
とは交わらない g の fiber の components をすべてつぶせば, 局所的には Weierstraß equation によってあらわされる平面3次曲線の族を得る。本稿の目的は, X と $\bar{E}$ の global invariants を比較することである。

U を, $X|U$ が étale topology で section を持つような C の最大の open subscheme とする。 $\Sigma = C - U$ とおく。Σ は, X_K が ramified であるような有限個の place の集合全体である。C の点 s に対し, place s での local ring $\mathcal{O}_{C,s}$ (函数体 数体 K) の completion を $\hat{\mathcal{O}}_s$ (resp. K_s) と書く。X_K の $H^1(Gal/K_s, E_{K_s})$ への像が 0 ではない場合にかぎり s は Σ に含まれる。その位数を d_s と書けば, d_s は, fiber $X(s) = f^{-1}(s)$ の components の重複度の最大公約数に等しい。

例 a) E が点 s で good reduction を持つならば, $X(s)_{red}$ は, $E(s)$ に isogenous な楕円曲線である。

例 b) E が点 s で multiplicative type の reduction を持ち, E の j-invariant が s で位数 m の極を持つならば, $\bar{E}(s)$ は type b_m の singular fiber であり, $X(s)$ は, すべての components が重複度 d_s の同じ type b_m の multiple fiber である

(証明は, M. Raynaud [4] を参照)



type b_m
component m 個

例 C)　E が additive type の reduction を持てば，$d_s=1$ であるか，又は $p>0$ で d_s は p 巾である (cf. M. Raynaud [3])。後に，$\overline{E}(s)$ と $X(s)$ の component 数は等しいことを示す。

問題．$X(s)$ と $\overline{E}(s)$ は重複度を除いて，同じ type か？

§1．X と $\overline{E}$ の不変量の比較．

一般に，曲面 S の structure sheaf の Euler-Poincaré 数を $\chi(\mathcal{O}_S)$ と書く。Second Chern number を $c_2(S)$ と書く。

<u>定理 1.</u>　$\chi(\mathcal{O}_X)=\chi(\mathcal{O}_{\overline{E}})$ が成立する。

証明は後まわしにしていくつかの系を述べる。

<u>系 1.</u>　$c_2(X)=c_2(\overline{E})$ が成立する。

証明．Noether の公式から，$12\chi(\mathcal{O}_X)=c_1^2(X)+c_2(X)$。また，楕円曲面に対しては $c_1^2=0$ だから，定理 1 より結果を得る。q.e.d.

<u>系 2.</u>　C の点 s に対して，$X(s)$ と $\overline{E}(s)$ の component の数は等しい。

証明．l を p 及び，f, g の fiber の重複度とは互いに素な素数とする。c_2 を，$\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ を係数にする étale cohomology を使って計算すれば，

$$c_2(X)=\chi_X(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})=\chi_C(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})-\chi_C(R^1f_*(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}))+\chi_C(R^2f_*(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})), \tag{1.1}$$

ただし，χ_X，χ_C はそれぞれ曲面 X，曲線 C の，与えられ

た sheaf に係数を持つ étale cohomology の Euler-Poincaré number である。X の C 上の relative Picard functor における ℓ 倍写像の kernel を ${}_{\ell}\underline{\mathrm{Pic}}_{X/C}$ と書けば、

(1.2) $$R^1 f_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mu_\ell, {}_{\ell}\underline{\mathrm{Pic}}_{X/C})$$

が成立する。ただし、μ_ℓ は multiplicative group G_m の ℓ 倍写像の kernel である (cf. M. Raynaud [2])。また、

(1.3) $${}_{\ell}\underline{\mathrm{Pic}}_{X/C} \simeq {}_{\ell}\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathbb{E}/C} \simeq {}_{\ell}E^0$$

だから、

(1.4) $$R^1 f_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \simeq R^1 g_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

を得る。$X(s)$ の component 数 (resp. $\mathbb{E}(s)$ の component 数) を α_s (resp. β_s) とすれば、$R^2 f_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ (resp. $R^2 g_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$) は、$\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ の、点 s で rank $\alpha_s - 1$ (resp. $\beta_s - 1$) の finite support の sheaf による拡大である。系1、及び (1.1)、(1.4) より $\chi_C(R^2 f_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})) = \chi_C(R^2 g_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$ だから、

(1.5) $$\sum_{s\in C}(\alpha_s - 1) = \sum_{s\in C}(\beta_s - 1)$$

を得る。ところで、additive type の reduction がただ1つならば、先の例(a)、例(b) から、(1.5) を使って系2を得る。もし、additive type の reduction がいくつか存在するならば、点 s をそのうちの1つとして、s で étale、その他の点で semi-stable reduction になるような曲線 C' と正則写像 $h: C' \longrightarrow C$ をとれば、C' 上で考えて、例(a)、例(b) 及び (1.5)

から，求める結果を得る。 q. e. d.

系 3. X と $\overline{E}$ の Picard 数は等しい。

証明. $r(E_k) = \begin{cases} 0 & (E_K \text{ が constant のとき}) \\ E_K \text{ の rank} & (\text{その他}) \end{cases}$

と定義すれば，

(1.6) $$\rho(X) = r(E_k) + \sum_{s \in C} (\alpha_s - 1) + 2$$

(1.7) $$\rho(\overline{E}) = r(E_k) + \sum_{s \in C} (\beta_s - 1) + 2$$

だから，系 2 を使って 系 3 を得る。 q. e. d.

§2. Wild ramification

$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(R^1 f_*(\mathcal{O}_X))$ を計算するために，sheaf $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ を研究する。$\mathfrak{P} = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/C}$ を X/C の relative Picard functor とする。$\mathfrak{P}$ は群に値を持つ formally smooth functor で，点 $s \in C$ での $\mathfrak{P}$ の fiber は，次元 $H^1(X(s), \mathcal{O}_{X(s)})$ の smooth group scheme である。$R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ は，$\mathfrak{P}$ の Lie algebra である。また，$\underline{\mathrm{Pic}}_{\overline{E}/C}$ は group scheme になり，その neutral component は，標準的に，E の neutral component E^0 に同型である。$\mathrm{Pic}_{\overline{E}/C}$ は，$\overline{E}(s)$ が irreducible ではないような place s で 分離的ではないが，unit section の closure による $\underline{\mathrm{Pic}}_{E/C}$ の商は，$\mathcal{E}_C$ の E による拡大である (cf. M. Raynaud [2])。また，U 上では，$\mathfrak{P}$ の neutral component $\mathfrak{P}^0$ は，E の neutral component E^0

に標準的に同型で，$R^1f_*(\mathcal{O}_X)|U$ は line bundle である。

s を C の closed point とする。

定義．$R^1f_*(\mathcal{O}_X)$ が $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_s$ 上 free であるならば，X は点 s で tamely ramified であるという。それ以外の時には，X は，点 s で wildly ramified であるという。

$R^1f_*(\mathcal{O}_X)$ は，C 上の base change と可換であり，f の fiber の Euler Poincaré number は一定であるから，次の3条件の同値を得る。

1) X は点 s で tamely ramified である。

2) $H^1(X(s), \mathcal{O}_{X(s)})$ は1次元である。

3) $H^0(X(s), \mathcal{O}_{X(s)})$ は constants からなる。

点 s での ramification を研究するために，C を $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_s)$ でおきかえ，さらに，完備な valuation ring $R = k[[t]]$ におきかえる。$k[[t]]$ の商体を K と書く。標数0では，次のように wild ramification はおこらない。

命題1．$f: X \longrightarrow \mathrm{Spec}\,R$ を proper で flat な正則写像とし，X が normal で $H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}) = K$ とする。もし，$\mathrm{char}.k = 0$ ならば，$H^0(X(k), \mathcal{O}_{X(k)}) = k$ となる。

証明．closed fiber $\bar{X}$ の irreducible components の重複度の最小公倍数を n とする。$u^n = t$ とおき，R の degree n の ramified extension を $R' = k[[u]]$ とおく。$X \times_R R'$ の

normalization を X' とすれば，n のとり方から，X' の R' 上の closed fiber は reduced である。従って，$H^0(X'(k), \mathcal{O}_{X'(k)}) = k$。また，拡大 R'/R は，Galois 拡大で，Galois 群 $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。$X$ は normal だから，$X'/G \cong X$。標数は 0 だから，invariant をとる操作と，base change は可換である。故に，$X/tX = (X'/tX')^G = (X'/u^nX')^G$。故に，$H^0(\mathcal{O}_X/t\mathcal{O}_X) = \left(H^0(\mathcal{O}_{X'}/u^n\mathcal{O}_{X'})\right)^G = [R'/u^nR']^G = k$。　q.e.d.

tame な場合に Picard functor P を研究することはたやすい。実際，M. Artin の結果を使えば，P は smooth algebraic space になる。neutral component P^0 の unit section は，locally closed だから，P^0 におけるその closure H は，R 上 étale な群の algebraic space である（closed fiber $H(s)$ は位数 d_s の巡回群である）。そのとき，P^0/H は smooth group scheme になり，Néron model の普遍性によって，canonical isomorphism $P^0_K \longrightarrow E_K$ は，morphism $u : P^0/H \longrightarrow E$ に拡張される。u は closed fiber で surjective だから，u は flat epimorphism である (cf. P9)。$\mathrm{Ker}\, u$ は R 上 flat で，その generic fiber は unit group になるから，$\mathrm{Ker}\, u = 0$ をうる。従って，u は isomorphism である。H は R 上 étale だったから $\mathrm{Lie}\, P^0 \cong \mathrm{Lie}(P^0/H) \cong \mathrm{Lie}\, E$ をうる。

命題2．$U \subset V$ を，X がその上で tame であるような C の最大の開集合とする。そのとき，次のような canonical isomorphism が存在する，

(2.1) $$R^1 f_*(\mathcal{O}_X)|_V \xrightarrow{\sim} R^1 g_*(\mathcal{O}_{\bar{E}})|_V = \mathrm{Lie}\, E|_V .$$

さて，wild な場合を考える。

定理2．1) generic fiber 上の canonical morphism を拡張するような group functor の canonical isomorphism

$$u : \mathcal{P}^0 \longrightarrow E^0$$

が存在する。

2) u の原点での tangent map

(2.2) $$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Lie}\, u : & \mathrm{Lie}\, \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\, E \\ & \| & & \| \\ & H^1(X, \mathcal{O}_X) & & H^1(\bar{E}, \mathcal{O}_{\bar{E}}) \end{array}$$

を考える。

そのとき，a) $\mathrm{Lie}\, u$ の kernel は，$H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の torsion part。

b) $\mathrm{Ker}(\mathrm{Lie}\, u)$ と $\mathrm{Coker}(\mathrm{Lie}\, u)$ は，同じ長さを持つ。

注意．2) から，global な場合に，$\chi(R^1 f_*(\mathcal{O}_X)) = \chi(R^1 g_*(\mathcal{O}_{\bar{E}}))$ を得，従って $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\bar{E}})$ を得る。

定理2の証明のスケッチ

X が wildly ramified のときには，$\mathcal{P}$ は，algebraic space としてさえ representable ではない。しかし，rigidificater を使って (cf. M. Raynand [2])，次のような group functor の exact sequence がある。

(*) $$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} \mathcal{P} \longrightarrow 0,$$

ここで，A，B は smooth group schemes で，generic fiber での morphism i_K は injective であると仮定できる。X が tamely ramified ならば，i は immersion で，$\mathcal{P}$ は algebraic space B/A によって represent される。しかし，X が wildly ramified であるときは，i は immersion ではなく，また monomorphism でさえない。実際，i の closed fiber の kernel は，正の次元を持つ。しかし，E_K の Néron model がみたす普遍性によって，morphism の拡張 $v: B^0 \longrightarrow E^0$ があり，$v \circ i$ は A 上零写像となる。従って，v は，

(2.3) $$u: \mathcal{P}^0 \longrightarrow E^0$$

を引きおこす。

注意．$\mathcal{P}$，E は Néron の性質をみたす。すなわち，generic fiber 上のいかなる有理点も integral point として拡張できる。このことと Hensel の補題を使えば，u は closed fiber で surjective になる。従って，上記 v は flat epimorphism になる。この性質から，$E^0(s)$ が elliptic curve (resp. multiplicative group G_m) ならば，$\mathcal{P}^0(s)$ も elliptic curve (resp. G_m) を含む。これは，最初にのべた例 a), b) の一つの証明である。

(*) から，次のような short exact sequence をうる。

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Lie}\, A \longrightarrow \mathrm{Lie}\, B \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ H^1(X, \mathcal{O}_X)}}{\mathrm{Lie}\, \beta} \longrightarrow 0$$

あとは，定理2の後半の主張を示せばよい。

一般に，$a : G \longrightarrow H$ を smooth group schemes の，fiber が連結であるような R-morphism とする。$N = \mathrm{Ker}\, a$ とおき，a の generic fiber a_K が smooth であるとする。a の smoothness からの欠損をはかる invariants を導入する。

i) $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を a に付随した Lie algebra 上の写像とする。a_K は smooth だから α_K は surjective である。故に $\mathrm{Coker}\, \alpha$ は長さ有限であり，a が smooth であることと，$\mathrm{Coker}\, \alpha$ が零であることは同値である。

ii) a が smooth でなければ，N は smooth ではなく，また flat でさえない。しかし，smooth な group scheme $\tilde{N}$ と morphism $b : \tilde{N} \longrightarrow N$ で，任意の smooth group scheme M と任意の morphism $c : M \longrightarrow N$ に対して，morphism $d : M \longrightarrow \tilde{N}$ で $b \circ d = c$ となるものがあるようなものが存在する。Generic には，$\tilde{N}_K \cong N_K$ が成立する。$\tilde{\eta}$，$\eta = \mathrm{Ker}\, \alpha$ をそれぞれ $\tilde{N}$，N の Lie algebra とすれば，$\eta / \tilde{\eta}$ は長さ有限である。

iii) もし，a が smooth ならば，$G(R) \longrightarrow H(R)$ は surjective である。a が smooth でないならば次のように

して，$G(R) \longrightarrow H(R)$ の surjectivity からの欠損をはかることができる。任意の n に対して $R_n = k[[t]]/(t^n)$ とおく。R_n から k への Weil restriction を使って，k-algebraic group scheme $G(n)$, $H(n)$ で

(2.4) $$G(n)(k) \simeq G(R_n) \quad , \quad H(n)(k) \simeq H(R_n)$$

となるものと，morphism $a(n) : G(n) \longrightarrow H(n)$ が存在する。a_K は smooth だから，inverse system $H(n)/\mathrm{Im}\, G(n)$ は，十分大きな n に対して stationary である。そこで，

(2.5) $$\dim H(R)/a\,G(R) = \lim_{n \to \infty} \dim H(n)/a(n)\,G(n)$$

と定義する。

定理3．上記の記号を用いて，

(2.6) $$\mathrm{length}\,(\mathrm{Coker}\,\alpha) = \mathrm{length}\,(\eta/\tilde{\eta}) + \dim H(R)/a\,G(R)$$

証明．N が flat である場合のみを示す。このとき，exact sequence

(2.7) $$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{a} H \longrightarrow 0$$

の reduction mod t^n を考えて

(2.8) $$0 \longrightarrow N_n \longrightarrow G_n \longrightarrow H_n \longrightarrow 0$$

を得る。Mazur & Roberts [1] prop. 3.5 を使って

(2.9) $$N(R_{2n}) \longrightarrow N(R_n) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha/t^n\alpha) \longrightarrow 0$$

なる exact sequence を得る。さらに，inverse system $N(R_n)$ は，N_K が smooth であることから，uniform Mittag Leffler condition をみたす (Bourbaki, Algèbre commutative, chap. III, Hensel の補題 参照)。 $\mathrm{Im}\{\mathcal{N}(R_{m+n'}) \longrightarrow \mathcal{N}(R_n)\}$ は $n' \geqq n$ に対して一定である。(2.9) に於て, $n > m$ にとって,

(2.10) $$\mathrm{Im}\{\mathcal{N}(R_{2n}) \longrightarrow \mathcal{N}(R_n)\} = \mathrm{Im}\{\mathcal{N}(R) \longrightarrow \mathcal{N}(R_n)\}$$
$$= \mathrm{Im}\{\tilde{\mathcal{N}}(R) \longrightarrow \mathcal{N}(R_n)\} = \mathrm{Im}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_n) \longrightarrow \mathcal{N}(R_n)\}$$

を得る。従って, exact sequence

(2.11) $$\tilde{\mathcal{N}}(R_n) \longrightarrow \mathcal{N}(R_n) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha/t^n\alpha) \longrightarrow 0$$ を得る。

$F_n = \mathrm{Ker}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_n) \longrightarrow \mathcal{N}(R_n)\}$ とおく。exact sequence

(2.12) $$0 \longrightarrow \mathcal{N}(R_n) \longrightarrow G(R_n) \xrightarrow{a(n)} H(R_n)$$

を使って

(2.13) $$\dim G(R_n) = \dim H(R_n) + \dim \mathcal{N}(R_n) - \dim \mathrm{Coker}\, a(n)。$$

(2.11) から,

(2.14) $$\dim \mathcal{N}(R_n) - \dim \tilde{\mathcal{N}}(R_n) = \dim \mathrm{coker}(\alpha/t^n\alpha) - \dim F_n。$$

また, $\dim G(R_n) = \dim H(R_n) + \dim \tilde{\mathcal{N}}(R_n)$ だから, (2.13)(2.14)より

(2.15) $$\dim \mathrm{Coker}\,(\alpha/t^n\alpha) = \dim F_n + \dim \mathrm{Coker}\, a(n)$$

を得る。n を $2n$ におきかえれば,

(2.16) $$\dim \mathrm{Coker}\,(\alpha/t^{2n}\alpha) = \dim F_{2n} + \dim \mathrm{Coker}\, a(2n)$$

となる。 しかし, 十分大きな n に対して,

(2.17) $$F_{2n} = \mathrm{Ker}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_{2n}) \longrightarrow \mathcal{N}(R_{2n})\} = \mathrm{Ker}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_{2n}) \longrightarrow G(R_{2n})\}$$

は, $\mathrm{Ker}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_{2n}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}(R_n)\}$ に含まれる。

後者は $\tilde{\eta}/t^n\tilde{\eta}$ だから, $F_{2n} = \mathrm{Ker}(\tilde{\eta}/t^n\tilde{\eta} \longrightarrow \mathfrak{g}/t^n\mathfrak{g})$

となる。故に, 十分大きな n に対して,

$$(2.18) \qquad \dim F_{2n} = \text{length Coker}\{\tilde{\eta} \longrightarrow \eta\}$$

となる。故に，十分大きなnを考えて，(2.16) から (2.6) をうる。　q.e.d.

定理2の証明つづき．　次のダイアグラムを考える。

$$(2.19) \qquad \begin{tikzcd} B^0 \arrow[rr, "u\circ j"] \arrow[dr, "j"'] & & E^0 \\ & P^0 \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

これに，定理3を応用する。$N = \mathrm{Ker}\,(u\circ j)$ とおくと，これはR上 flat である。また，

$$(2.20) \qquad \mathrm{Lie}\, N = \mathrm{Ker}\{\mathrm{Lie}\, B^0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{Lie}\, u} \mathrm{Lie}\, E^0\}$$

である。$\tilde{N}$は (*)の群 A であるから $\mathrm{Lie}\,N/\mathrm{Lie}\,A$ は，$H^1(X,\mathcal{O}_X)$ の torsion である。また，$\mathrm{Coker}\{\mathrm{Lie}\, B \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E\}$ は，$\mathrm{Coker}\{H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E\}$ に等しく，$B^0(R) \longrightarrow E^0(R)$ が surjective であることはすでに示したから，定理3によって，

$$(2.21) \qquad \text{length } \mathrm{Lie}\,N/\mathrm{Lie}\,A = \text{length Coker}\{H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E\}$$

を得る。　q.e.d.

§3. Relative dualizing complex について．

$\omega_{X/C} = \omega_X \otimes f^*(\omega_C^{-1})$ を X の relative dualizing complex とする。$\omega_{\bar{E}/C}$ を $\bar{E}$ の relative dualizing complex とする。J を $g: \bar{E} \longrightarrow C$ の unit section を定義する invertible ideal, $\omega = J/J^2$ を C 上の invertible sheaf とすれば，canonical isomorphism $\omega_{\bar{E}/C} \simeq g^*(\omega)$ が存在する。我々は，$\omega_{X/C}$

と $f^*(\omega)$ を比べる。$\mathfrak{d}$ を X の ramification をはかる一種の Differente とし,

(3.1) $$\omega_{X/C} = f^*(\omega) \otimes \mathfrak{d}$$

とおく。$\mathfrak{d}$ を place s で local に調べる。d_s を $X(s)$ の components の最大公約数とし, $\mathfrak{J}$ を "reduced" fiber $(1/d_s)X(s)$ を定義する $\mathcal{O}_X$ の invertible ideal とする。t を place s での parameter とすれば

(3.2) $$\mathfrak{J}^{d_s} \simeq t\,\mathcal{O}_X$$

である。$\omega_{X/C}$ は generic fiber 上 trivial で, X が相対的極小なことから. $X(s)$ の各々の component 上 degree 零である。従って, ある整数 m があって,

(3.3) $$\omega_{X/C} \simeq \mathfrak{J}^m$$

となる。従って, 一意的に定まる整数 l があって

(3.4) $$\mathfrak{d} = \mathfrak{J}^{-l}\ ,\ \omega_{X/C} = f^*\omega \otimes \mathfrak{J}^{-l}$$

とかける。故に,

(3.5) $$f_*(\omega_{X/C}) = \omega \otimes \mathcal{O}_C(s)^{[l/d_s]}\ ,$$

を得る。ただし, $[l/d_s]$ は, l/d_s の整数部分である。写像

(3.6) $$\mathrm{Lie}\ u\ :\ R^1f_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow R^1g_*(\bar{E}) = \omega^\vee$$

の dual map

(3.7) $$\omega \longrightarrow R^1f_*(\mathcal{O}_X)^\vee$$

を考える。Grothendieck の duality theorem によって,

(3.8) $$R^1 f_*(\mathcal{O}_X)^* = f_*(\omega_{X/C}) = \omega \otimes \mathcal{O}_C(s)^{[l/d_s]}$$

であるから,

(3.9) $$\mathrm{length}(\mathrm{Coker}\ \mathrm{Lie}\ u) = [l/d_s]$$

となる。定理2を使って次の系を得る。

系4. $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ の place s での torsion の長さは, $[l/d_s]$ に等しい。とくに, X が place s で wildly ramified であることと $l \geq d_s$ であることは同値である。

注意.1) もし, X の $H^1(\mathrm{Gal}/k_s, \mathcal{O}_{X_s})$ における位数 d_s が p と互いに素であれば, X は s で tamely ramified である。ただし, d_s が p で割れる場合でも X が tamely ramified になることがある。

2) 定理2, 定理3 は, R が unequal characteristic な complete discrete valuation ring であっても成立する。その場合, 定理3 の証明に於て, Weil restriction を Greenberg functor におきかえる必要がある。

3) 以上の研究は, 標数 2, 3 の場合, quasi-elliptic surface に対しても有効である。

References

[1] B. Mazur & L. Roberts, Local Euler characteristic, Invent. Math., 9 (1970).

[2] M. Raynaud, Spécialisation du foncteur de Picard, Publ.

I. H. E. S. 38 (1970).

[3] M. Raynaud, Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abeliennes, Séminaire Bourbaki 1964/65, no. 286.

[4] M. Raynaud, Passage au quotient par une relation d'équivalence plate, Proc. of a Conference on Local Fields (Nuffic Summer School), Springer-Verlag, 1967.

[5] M. Raynaud, Surfaces elliptiques et quasi-elliptiques, (Preprint).