数理解析研究所講究録
第 409 巻 1980 年 39-45

Regular threefolds with trivial canonical bundle

東大 理 堀川穎二

§1. Vは$\mathbb{C}$上定義された3次元代数多様体で，非特異，射影的とする．さらに

i) canonical bundle K_V は自明.

ii) $q = \dim H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$

と仮定する．（$q>0$の場合については 上野[3] 参照）

V上の ample line bundle H を一つとって

$$h^0(H) = \dim H^0(V, \mathcal{O}(H))$$

とする． H^3 で交点数を表わす．

定理 1. V, H が上の条件をみたすとき，次のいずれかが成り立つ．

A) Vは elliptic threefold $\tilde{V} \to W$ で global な切断をもつものに双有理同値.

B) $H^3 \geqq 2h^0(H) - 6$.

H^3 の上限については次の定理が成り立つことが井上政久氏によって注意された。

<u>定理2</u>　$H^3 \leqq 6h^0(H)$ が成り立つ。等号が成り立つための必要十分条件は V が abelian variety を有限不分岐被覆に持つことである。

（定理1，2は $q>0$ でも成り立つ）

<u>注意</u>　1．定理1の証明は minimal な一般型曲面 S に対する不等式

(*)　　$$K_S^2 \geqq 2p_g(S)-4$$

の証明（e.g. [1] Lemma 2）を真似ればよい。$|H|$ が非特異 member S を含むとき K_S は H の制限であるから (*) から B) が従う。

2．A) は $|H|$ に associate した rational map Φ_H の像が2次元の場合に起こる。

3．定理2の証明は Yau による Calabi conjecture の結果 [4] を用いる。$|H|$ が非特異 member S を含むとき，定理2の不等式は $c_1^2(S) \leqq c_2(S)$ と同値である。

§2．定理1の A) の場合は以後除外して考えることにする。一般型の曲面の場合と同様に H^3 が下限 $2h^0(H)-6$ に近い場合には V の構造を決定できるこ

とが期待される.

定理3. $H^3 = 2h^0(H) - 6$ で V は定理1の A) をみたさないとする. このとき

i) $|H|$ に associate した rational map Φ_H は正則.

ii) $W = \Phi_H(V)$ は $\mathbb{P}^n$, $n = h^0(H) - 1$ 内の $(n-2)$ 次, 3次元 variety で Φ_H は degree 2 の finite map $V \to W$ を induce する.

よく知られている様に W は次の中のいずれかである.

1) $W = \mathbb{P}^3$ $(n=3)$

2) W は $\mathbb{P}^4$ の非特異な2次超曲面 $(n=4)$

3) $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}(\alpha) \oplus \mathcal{O}(\beta) \oplus \mathcal{O}(\gamma))$ は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$-bundle で W は tautological line bundle で $\mathbb{P}^n$ に埋め込まれたもの $(n = \alpha + \beta + \gamma + 2 \geqq 5)$

4) W は $\mathbb{P}^{n-1}$ 内の $(n-2)$ 次非特異曲面 W_0 上の cone

4a) W_0 は $\mathbb{P}^2$ の Veronese embedding $(n=6)$.

4b) W_0 は Hirzebruch surface $(n \geqq 4)$.

5) W は $\mathbb{P}^{n-2}$ 内の $(n-2)$ 次有理曲線上の cone.

H が ample であることから 4b) 5) は Φ_H の像にはならないことがわかる. 1) − 4a) に対応する V は全て次

の様に構成できる.

1) V は $\mathbb{P}^3$ の(分岐)2重被覆で branch locus B は 8次の非特異超曲面.

2) V は $\mathbb{P}^4$ 内の非特異2次超曲面 W の2重被覆で branch locus B は W と 6次超曲面の非特異な完全交叉.

3) V は $W=\mathbb{P}(\mathcal{O}(\alpha)\oplus\mathcal{O}(\beta)\oplus\mathcal{O}(\gamma))$ の2重被覆で branch locus B は $|-2K_W|$ に属する非特異因子. これは

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(k,k,k),(k,k,k+1),(k,k+1,k+1)$$
$$(k,k,k+2),(k,k+1,k+2)\quad(k\geq 1)$$

のときに起こる. (勿論 V は k によらないが H は k によって変わる)

4a) $\mathbb{P}^2$ の Veronese embedding W_0 上の cone の非特異モデルは $\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^1$-bundle $\widetilde{W}=\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(2))$ である. $\widetilde{W}\to\mathbb{P}^2$ の切断で normal bundle が $\mathcal{O}(-2)$ のものを W_0 で表わす. $\mathbb{P}^2$ 上の直線の逆像を Γ として $B_0\in|5W_0+10\Gamma|$ で非特異なものを選ぶ. $B=W_0+B_0$ を branch locus とする $\widetilde{W}$ の2重被覆を $\widetilde{V}$ とすると $\widetilde{V}$ は W_0 上に exceptional divisor $E\cong\mathbb{P}^2$ を含む. E を一点に contract したものが V である.

Vのpicard数をρとすると この場合

$$\rho = \dim H^1(V, \Omega^1) = \dim H^2(V, \Theta)$$

(Ω^1はV上の正則1次形式の層，Θはそのdualである)

上に述べた 1) 2) 4a) の場合 $\rho = 1$, 3) の場合 $\rho = 2$ である．従って 1) 2) 4a) のV上の ample line bundle は整数倍を除いて unique である．4a) の場合 $H = 2H_0$ となっている (次節 1))．3) の場合にはVは次数2のK3曲面の pencil の構造を持っているのでそれに従って多くの ample line bundle を持つ．

§3. <u>定理4.</u> $H^3 = 2h^0(H) - 5$ でVは定理1のA)をみたさないとする．このとき $|H|$ は高々1つの base point を持ち，それは1回の blowing up で除去できる．また $|H|$ の general member は非特異既約である．

この場合Vの構造は次の様になる．

1) $h^0(H) = 3$, $H^3 = 1$: Vは§2の4a)と同じもの．

2) $h^0(H) = 5$. $H^3 = 5$: Vは $\mathbb{P}^4$ 内の非特異5次超曲面．

3) $h^0(H) = 4$, $H^3 = 3$: Vは $\mathbb{P}^3$ の3重被覆で wの weight を2として方程式

$$w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3 = 0$$

(各 a_i は $\mathbb{P}^3$ の同次座標の $2i$ 次同次式) で与えられる．

3') $h^0(H)=4$, $H^3=3$: $|H|$ は base point b をもち, V の b における blowing up を $\tilde{V}$ とすれば $\tilde{V}$ は $\mathbb{P}^3$ の2重被覆で branch locus は平面 L_0 と9次曲面 B_0 の和で, B_0 は L_0 上の3次曲線に沿って3重曲線をもつ. (3) 3') は [2], II, §2, Theorem (2.3) で与えられた曲面を含むものである).

4) $h^0(H)=6$, $H^3=7$: V は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$-bundle $W=\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(2))$ の2重被覆と双有理同値. branch locus は W の各 fibre 上 8次の因子を induce する. (これは [2], II, §1, Theorem (1.3) の B_1) の曲面を $|H|$ の member として含む threefold である).

5) V は $W=\mathbb{P}(\mathcal{O}(\alpha)\oplus\mathcal{O}(\beta)\oplus\mathcal{O}(\gamma))$ の2重被覆と双有理同値. branch locus は ある fibre Γ と $B_0\in|-2K_W+\Gamma|$ からなり, B_0 は Γ 上の2次曲線に沿って3重曲線をもつ. これは $(\alpha,\beta,\gamma)=(k,k,k)$, $(k,k,k+1)$, $(k,k+1,k+1)$ $(k\geqq 1)$ のとき起こる. ([2], II, Theorem (1.3) の A) に対応する)

1) 2) 3) 3') については $\rho=1$, 4) 5) については $\rho\geqq 2$ である.

§4. 変形についての注意

Serre's duality によれば $\dim H^2(V, \Theta_V) = q = 0$ であるから $\{V_t\}$ を $V = V_0$ の small deformation の族とすれば H は各 V_t 上の ample line bundle H_t に extend される. 従って deformation で構造が移ることは殆んど期待できない. §2 の V については 3) で (α, β, γ) について

$$(k+1, k+1, k+1) \to (k, k+1, k+2)$$

$$(k, k+1, k+1) \to (k, k, k+2)$$

が可能な specialization の全てである. §3 の V については 3') が 3) の specialization である.

[1] Horikawa, E., On deformations of quintic surfaces, Invent. Math., 31 (1975), 43-85.

[2] ---, Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, I, Ann. of Math. 104 (1976), 357-387. II, Invent. Math., 37 (1976), 121-155.

[3] Ueno, K., On algebraic threefolds of parabolic type, Proc. Japan Acad. 52 (1976), 541-543.

[4] Yau, S. T., Calabi's conjecture and some new redults in algebraic geometry, PNAS, 74 (1977), 1798-1799.