数理解析研究所講究録
第 409 巻 1980 年 103-127

アーベル曲面の上のベクトル束の分類について

名大 理学部　向井 茂

楕円曲線の上のベクトル束は Atiyah によって分類されているが、それをアーベル多様体の上のベクトル束に対して拡張することは非常に難しい問題のように思われる。しかし、アーベル曲面の場合には、いくつかの幸運な事情によってある程度分類ができそうに思われるので、それについて述べたい。

曲面 X 上のベクトル束 E に対して整数 $c_2(\underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X}(E))$ は E の最も重要な不変量である。X がアーベル曲面の場合、それは常に偶数なので $\lambda(E)=\frac{1}{2}c_2(\underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X}(E))$ とおく。任意の直線束 L に対して $\lambda(E\otimes L)=\lambda(E)$。また、E が simple ($\mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E)\cong k$) なら常に $\lambda(E)\geq 0$ である。アーベル曲面上のベクトル束で楕円曲線の時と平行した分類ができるのは丁度 $\lambda(E)=0$ の simple (あるいは semi-stable) なベクトル束に限られる。直線束 L を isogeny π によって順像をとっ

てできるベクトル束 $\pi_* L$ や semi-homogeneous ベクトル束がそれにあたる。これらのベクトル束は直線束と類似した性質をもつ。また、moduli は常に連結で X と isogeneous なアーベル曲面であることも容易にわかる。それでは $\lambda > 0$ が一般なベクトル束についてはどんなことが言えるだろうか？ここでは次の問題について考えたい。

(a) $\lambda > 0$ なる stable なベクトル束にはどんなものがあるか？

(b) それらの moduli はどんな多様体か？

(c) numerical な量を fix した時 moduli は連結か？

なお、対象をベクトル束（＝locally free sheaf）に限定するのは非常に不都合なので、我々は最も一般に $\mathcal{O}_X$-加群の連接層（以後簡単に sheaf と呼ぶ）の category の中で考える。

$\lambda > 0$ の例としては次のものがある。

<u>例 1.</u>（Picard sheaf） C は種数 2 の非特異曲線，$C^{(n)}$ は C の n 次対称積とする。Albanese 写像 $C^{(n)} \longrightarrow \mathrm{Alb}\, C^{(n)} \cong J(C)$ は $n \geq 3$ の時局所自明な $\mathbb{P}^{n-2}$-束 になる。([6])。よって $\mathbb{P}(E) \cong C^{(n)}$ となる rank $n-1$ のアーベル曲面 $J(C)$ 上のベクトル束 E が存在する。E のとり方には直線束と tensor する分だけ自由度があるが、$c_1(E) \approx [C]$ $\chi(E) = 0$ となるようにとれる。$n = 1, 2$ の時も $\mathbb{P}(E) \cong C^{(n)}$

となる $J(C)$ 上の sheaf が存在する。実際 $C \longrightarrow J(C)$ は immersion, $C^{(2)} \longrightarrow J(C)$ は canonical point $\kappa \in J(C)$ での blowing up だから各々 $E=$"C 上の degree 1 の直線束", $E = \mathcal{O}_X(C) \otimes \mathfrak{m}_\kappa$ とすればよい。但し, degree 1 とか $\mathcal{O}_X(C)$ を tensor したりしているのは $n \geq 3$ と合わせるため。また $\mathfrak{m}_\kappa$ は点 κ の極大イデアル。E は stable ([7]) で $\lambda(E)=1$ である。(ベクトル束でない sheaf E に対しては $\lambda(E) = \frac{1}{2}c_1(E)^2 - r(E)\chi(E)$ とする。但し, $r(E)$ は E の X での generic point における rank。)

<u>例 2.</u> C は X の effective divisor で $(C^2)=2$ とする。非零準同型 $f: \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(C)$ を1つ固定する。($h^0(X, \mathcal{O}_X(C)) = 1$ だから f のとり方は定数倍を除いて unique。) f を $x \in X$ で平行移動したものを $f_x : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(C_x)$ とする。$x_0, x_1, \cdots, x_n$ を互いに相異なる $n+1$ 個の点とした時, $E_{x_0,\cdots,x_n}$ は準同型写像 $(f_{x_0}, \cdots, f_{x_n}) : \mathcal{O}_X \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_X(C_{x_i})$ の余核とする。$C_{x_0} \cap \cdots \cap C_{x_n}$ が空集合なら $E = E_{x_0,\cdots,x_n}$ は locally free, 有限集合なら E は torsion free である。明らかに

$$r(E) = n \qquad c_1(E) \approx (n+1)[C] \qquad \chi(E) = n+1$$

よって $\lambda(E) = n+1$ である。E に直線束 $\mathcal{O}_X(-C)$ を tensor した sheaf $E' = E(-C)$ の方が考えやすい場合がある。この場合は $r(E') = n \qquad c_1(E') \approx [C] \qquad \chi(E') = -1$ をえる。

点 $x_0, \cdots, x_n$ が一般の位置にあるならば E は stable。([8])

C が既約なら E は常に stable である。

上の2つの例に関しては (b) (c) 共にほぼ完全な解答を与えることができる。

定理 1. F は $X = J(C)$ 上の stable な sheaf で $r(F) = n-1$, $c_1(F) \approx [C]$, $\chi(F) = 0$ とする。この時、F は $T_x{}^* E \otimes P$ と同型である。但し、E は例 1 の Picard sheaf, $x \in X$, P は $\mathrm{Pic}^0 X$ に属する直線束。また、$T_x{}^* E \otimes P \cong T_{x'}{}^* E \otimes P'$ となるのは $x = x'$, $P \cong P'$ の時に限る。

よって moduli は連結で、それは $X \times \mathrm{Pic}^0 X$ と同型である。例2に関しては [8] によって

(イ) $E_{x_0, \cdots, x_n}$ の small deformation は $E_{y_0, \cdots, y_n} \otimes P$ ($P \in \mathrm{Pic}^0 X$) と同型。

(ロ) $E_{x_0, \cdots, x_n} \otimes P \cong E_{y_0, \cdots, y_n} \otimes Q$ となるのは $\{x_0, \cdots, x_n\} = \{y_0, \cdots, y_n\}$ かつ $P \cong Q$ の時に限る。

が示されているが、更に次のことがわかる。

定理 2. $r(E) = n$, $c_1(E) \approx (n+1)[C]$, $\chi(E) = n+1$ となる"一般な" stable sheaf E は $E_{x_0, \cdots, x_n} \otimes P$ ($P \in \mathrm{Pic}^0 X$) と同型である。

よって moduli は連結で、それは $S^{n+1}X \times \mathrm{Pic}^0 X$ と双有

理同値になる。C が既約な時は実は moduli は $\mathrm{Hilb}^{n+1}X \times \mathrm{Pic}^0 X$ と同型であることが示される。但し、$\mathrm{Hilb}^{n+1}X = \{ \mathcal{J} \mid \mathcal{J}$ は colength $n+1$ の $\mathcal{O}_X$ の ideal$\}$/同型。

以下では、これらの事実を一般化した結果と予想について述べる。

アーベル曲面 X は主偏極をもつ、すなわち、$(C^2)=2$ となる effective な因子があるとする。辞書式順序で $(r, n, \chi) \geq (0, 0, 0)$ となる3つの整数の組 (r, n, χ) に対して

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Spl}(r, n, \chi) & = & \left\{ \begin{array}{l} X \text{ 上の simple な sheaf で } r(E)=r \\ c_1(E) \approx n[C],\ \chi(E)=\chi \text{ となるもの} \end{array} \right\} \Big/ \text{同型} \\ \bigcup_{\text{open}} & & \\ M(r, n, \chi) & = & \left\{ \begin{array}{l} X \text{ 上の stable な sheaf で } r(E)=r \\ c_1(E) \approx n[C],\ \chi(E)=\chi \text{ となるもの} \end{array} \right\} \Big/ \text{同型} \end{array}$$

とおく。（一般の sheaf に対する stable の定義は §3 をみよ。）

$\mathrm{Spl}(r, n, \chi)$ には自然な algebraic space の構造が、また $r \geq 1$ の時は $M(r, n, \chi)$ には自然な代数多様体の構造が入る。我々の場合 $\mathrm{Spl}(r, n, \chi)$ は常に nonsingular でどの成分も次元は $2\lambda+2$ （$\lambda \overset{\text{def.}}{=} n^2 - r\chi$）である。我々の主結果は

<u>定理 3.</u> $NS(X) \cong \mathbb{Z}$　$\lambda = n^2 - r\chi = 0, 1, 2, 3$ ならば　$M(r, n, \chi)$ は $X \times \mathrm{Hilb}^{\lambda} X$ と同型である。

例2で $M(n, n+1, n+1)$ が $X \times S^{n+1}X$ と双有理同値

になったり、定理2で $\lambda=2,3$ の時の $M(r,n,\chi)$ がわかるのは、整係数2次型式 $Q(x,y)=rx^2+2nxy+\chi y^2$ が各々の場合 1 あるいは -1 を表わすという事実による。よって次の事が言えるのではないか？

<u>予想1.</u> Q が 1 あるいは -1 を表わすなら $M_Q \doteq M(r,n,\chi)$ は $X\times S^{\lambda}X$ と双有理同値である。

どういう map が moduli と $X\times S^{\lambda}X$ の双有理同値を与える、或は、与えると予想されるかは後で説明する。また、定理1、予想1を含む次の予想が考えられる。

<u>予想2.</u> 多様体 M_Q の双有理類は2次型式 Q の同値類のみによる。但し、ここで Q と Q' が同値なのはある $\gamma\in GL(2,\mathbb{Z})$ でもって $\gamma Q{}^t\gamma=\pm Q'$ となる時とする。

Q が 1 あるいは -1 を表わすのは Q が2次型式 $x^2-\lambda y^2$ と同値だということである。$M(1,0,-\lambda)$ の元は全て $P\otimes J$ ($P\in \mathrm{Pic}^0X$, J は colength λ の ideal) と一意的に表わされるから $M(1,0,-\lambda)$ は $\mathrm{Pic}^0X\times \mathrm{Hilb}^{\lambda}X$ と同型である。よって予想2は予想1を含む。次に Picard sheaf を含む moduli 空間 $M(n-1,1,0)$ について予想が主張していることを見よう。$Q(x,y)=(n-1)x^2+2xy$ とおく。

n が奇数の時。$Q(x,y)=2\left(\frac{n-1}{2}x+y\right)x$。よって Q は $2xy$ と同値。よって $M(n-1,1,0)$ は $M(0,1,0)$ と双

有理同値。C 上の degree 1 の直線束（を X 上の sheaf とみなしたもの）を ξ とする。C が既約な時は $M(0,1,0)$ の元は一意的に $T_x^*\xi\otimes P$ と表わされる。よって $M(0,1,0)\cong X\times X$。C が可約の時は $M(0,1,0)=\phi$。

n が偶数の時。 $Q(x,y)=(\frac{n}{2}x+y)^2-\{(\frac{n}{2}-1)x+y\}^2$

よって Q は x^2-y^2 と同値。$M(n-1,1,0)$ は $M(1,0,-1)\cong X\times X$ と双有理同値。

実際には定理1が示すように C が既約なら $M(n-1,1,0)\cong X\times X$。$C$ が可約の時も $M(n-1,1,0)\cong X\times X$ (n 偶数) $=\phi$ (n：奇数) が証明される。

<u>問題</u>　Q が ± 1 を表わさない（特に 0 も表わさない 例えば $Q(x,y)=2(x^2+xy-y^2)$）時 M_Q はどういう多様体か？例えば常に $\mathrm{Alb}\, M_Q\cong X\times X$ が成立するか？

以下では、定理3の証明と予想1における M_Q と $X\times S^\lambda X$ の対応について説明したい。§1 ではそれらに不可欠な $\lambda=0$ の sheaf の分類について §3 では定理3の証明で重要な役割を果す $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E)$ に関するいくつかの不等式について説明したい。

§1 Simple sheaf with $\lambda=0$

一般に X がアーベル曲面の時 sheaf E に対して次の3

つの条件は同値である。

a) $\dim \operatorname{Ext}^1_{O_X}(E, E) = 2$。

b) E は simple（或は stable），$\lambda(E)=0$。

c) $\Phi(E)=\{(x, P)\in X\times \operatorname{Pic}^0 X \mid T_x^* E \cong E\otimes P\}$ は 2 次元。E は simple。

c) の前半の条件をみたす sheaf を semi-homogeneous sheaf と呼ぶ。E がベクトル束の時に限ると更に

c′) $\forall x\in X \ \exists P\in \operatorname{Pic}^0 X \quad T_x^* E \cong E\otimes P$。

d) $\exists \pi : Y \longrightarrow X$ isogeny $\exists L$ Y 上の直線束 E は $\pi_* L$ と同型。

を同値条件として付け加えることができる。また，ベクトル束でない simple semi-homogeneous sheaf は次のいずれかである。

(イ) Supp E は楕円曲線で E はその上の simple なベクトル束。

(ロ) Supp E は 1 点。E は 1 次元 skyscraper sheaf $k(x)$ に同型。

semi-homogeneous ベクトル束は次の様に分類される。

定理 4．ベクトル束 E に対して $\delta(E)=\dfrac{c_1(E)}{r(E)}\in NS(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ とおく。

(1) 任意の $\delta\in NS(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ に対して $\delta(E)=\delta$ となる simple semi-homogeneous ベクトル束 E が存在する。

(2) E, E' が共に simple semi-homogeneous ベクトル束で $\delta(E)=\delta(E')$ ならば ある $P\in \mathrm{Pic}^0 X$ があって $E'\cong E\otimes P$ となる。

(3) 任意の semi-homogeneous ベクトル束 F は各 $E_i=F_i/F_{i-1}$ が simple semi-homogeneous で $\delta(E_i)=\delta(F)$ となる filtration

$$0=F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_{n-1}\subset F_n=F$$

をもつ。また，逆も正しい。

（この定理は任意のアーベル多様体に対して成立する。[2] を参照せよ。）

(X, C) が主偏極アーベル曲面の時に $\delta(E)=\frac{q}{p}[C]$ となる simple semi-homogeneous ベクトル束がどのようにしてえられるかをみよう。$p>0$ と q は互いに素としておく。C が主偏極であることより $K(\mathcal{O}_X(pC))\overset{\mathrm{def}}{=}\{x\in X\mid T_x^*\mathcal{O}_X(pC)\cong \mathcal{O}_X(pC)\}$ は $X_p=\mathrm{Ker}[p倍: X\longrightarrow X]$ に等しい。X_p の位数は p^4 だから位数 p^2 の X_p の部分群（スキーム）G と X/G 上の直線束 M があって $\mathcal{O}_X(pC)\cong \pi^*M$ となる。但し，$\pi: X\longrightarrow X/G$ は自然な準同型。（証明は [4] §23 をみよ。）$\chi(\mathcal{O}_X(pC))=(\deg\pi)\cdot\chi(M)$ だから $\chi(M)=1$ をえる。$G\subset X_p$ だから $\tau\circ\pi=p倍$ となる準同型 $\tau: X/G\longrightarrow X$ がある。$\deg\tau\cdot\deg\pi=p^4$ だから $\deg\tau=p^2$。$E=\tau_*M^{\otimes q}$ とおく。$r(E)=\deg\tau=p^2$, $c_1(E)$

$\approx pq[C]$, $\chi(E) = \chi(M^{\otimes q}) = q^2$ となることがわかる。主な性質をあげておく。

① $\frac{q}{p} > 0$ の時 $h^0(E) = q^2$ $h^1(E) = h^2(E) = 0$

$\frac{q}{p} < 0$ の時 $h^0(E) = h^1(E) = 0$ $h^2(E) = q^2$

($h^i(E) = h^i(M^{\otimes q})$ から直ちにえられる。)

② $E \otimes P \cong E \otimes Q \Leftrightarrow P^{\otimes p} \cong Q^{\otimes p}$ よって

$M(p^2, pq, q^2) \cong \mathrm{Pic}^0 X /$ "$\mathrm{Pic}^0 X$ の p-torsion 全体" $\cong X$

③ E' も simple semi-homogeneous で $\delta(E') = \frac{q'}{p'}[C]$, p' と p は互いに素とする。この時 $E \otimes E'$ は simple semi-homogeneous で $\delta(E \otimes E') = (\frac{q}{p} + \frac{q'}{p'})[C]$ である。

特に $NE(X) \cong \mathbb{Z}$ の場合, $\lambda(E) = 0$ の simple sheaf (或は $\dim \mathrm{Ext}^1(E, E) = 2$ の sheaf) は

ベクトル束の場合。 $\delta(E) = \frac{q}{p}[C]$ となる E が $\otimes \mathrm{Pic}^0 X$ を除いて一意的に存在する。

ベクトル束でない場合。 $E \cong k(x)$ ($\delta(E) = \infty [C]$ と便宜的に解釈する。)

のどちらかに限られる。

sheaf F が $r(F) = r$, $c_1(F) \approx n[C]$, $\chi(F) = \chi$ で $\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})$ が $\delta(E) = \frac{q}{p}[C]$ となる $\lambda(E) = 0$ の simple sheaf ならば R-R-定理より

$$\chi(F \otimes \mathcal{O}_X(\tfrac{q}{p})) = rq^2 + 2npq + \chi p^2 \quad (p, q) = 1$$

$$= Q_F(q, p)$$

となる。(r, n, χ) を単に3つの数の組でなく，$Q_F(x, y) = rx^2 + 2nxy + \chi y^2$ という2次型式にして考える1つの意味は上の等式にある。この Q_F を sheaf F に付随した2次型式と呼ぶ。不変量 $\lambda(F)$ は丁度 Q_F の判別式に等しい。$F = \mathcal{O}_X(\frac{q}{p})$ の時は $Q_F = p^2x^2 + 2pqxy + q^2y^2 = (px+qy)^2$ となる。

§2. M_Q と $X \times S^\lambda X$ との関係について

Q が1あるいは-1を表わす時どのように $X \times S^\lambda X$ から M_Q へ map ができるかについてみよう。$Q(-q, p) = \pm 1$ となる整数 p と q が存在する。$u = np - rq$　$v = \chi p - nq$ とおけば

$$Q(x, y) = \pm\{(ux+vy)^2 - \lambda(px+qy)^2\}$$

$$pv - qu = \pm 1, \quad Q(-v, u) = \mp\lambda$$

となることがわかる。4通りの場合が考えられるが，どれでも同じなので $Q(-q, p) = 1$　$\frac{q}{p} > \frac{v}{u}$ の場合を考える。$\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(1)}$, $\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(2)}, \cdots, \mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(\lambda)}$ は互いに相異なる $\delta = \frac{q}{p}[\ell]$ の simple semi-homogeneous sheaf，$\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})$ は $\delta = \frac{v}{u}[\ell]$ の simple semi-homogeneous sheaf とする。任意の i に対して

$$\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\tfrac{v}{u}), \mathcal{O}_X(\tfrac{q}{p})^{(i)}) = 1$$

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(\tfrac{v}{u}), \mathcal{O}_X(\tfrac{q}{p})^{(i)}) = 0, \quad \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\tfrac{q}{p})^{(i)}, \mathcal{O}_X(\tfrac{v}{u})) = 0$$

が成立する。何故なら p, u が共に非零な場合には，$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}$

$(\mathcal{O}_X(\frac{v}{u}), \mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(i)})$ は §1にあげた性質と $pv-qu=1$ より $\delta = \frac{1}{pu}[C]$ の simple semi-homogeneous ベクトル束となる。よって
$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(\tfrac{v}{u}), \mathcal{O}_X(\tfrac{q}{p})^{(i)}) = H^i(X, \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(\tfrac{v}{u}), \mathcal{O}_X(\tfrac{q}{p})^{(i)}))$$
より上の結果をえる。p, u のどちらかが零の時も容易に確められる。

各 i に対して零でない準同型写像 $f_i : \mathcal{O}_X(\frac{v}{u}) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(i)}$ をとり、それらを並べてできる準同型
$$f = (f_1, \cdots, f_\lambda) : \mathcal{O}_X(\tfrac{v}{u}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathcal{O}_X(\tfrac{q}{p})^{(i)}$$
を考える。$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}(\frac{v}{u}), \mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(i)}) = 1$ であるから別の非零準同型 f_i' をとってきて f' を作っても
$$\begin{tikzcd}
f : \mathcal{O}_X(\frac{v}{u}) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{可換}"] & \bigoplus \mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(i)} \\
f' : \mathcal{O}_X(\frac{v}{u}) \arrow[r] & \bigoplus \mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(i)} \arrow[u, "\wr"', "\oplus(a_i\text{倍})"]
\end{tikzcd}$$
となる非零定数 a_i があるので、$\mathrm{Ker}\, f$ や $\mathrm{Coke}\, f$ は f_i のとり方によらず一意的に定まる。

問. f は単射か？

何故こう問うかと言うと、もし f が単射なら $E = \mathrm{Coke}\, f$ に対して次の事が成立するからである。

1) $Q_E = Q$ （作り方より明らか）

2) E は simple

3) E の small deformation E' はやはり E と同じ格好をしている。すなわち、$\delta = \frac{v}{u}[C]$, $\frac{q}{p}[C]$ となる simple

semi-homogeneous sheaf $\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})'$ と $\mathcal{O}_X(\frac{g}{p})^{(i)'}$ $(i=1,\cdots,\lambda)$ そして準同型 $f': \mathcal{O}_X(\frac{v}{u})' \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathcal{O}_X(\frac{g}{p})^{(i)'}$ があって E' は $\mathrm{Coke}\, f'$ と同型である。

2) 3) は前に示した $\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})$ と $\mathcal{O}_X(\frac{g}{p})^{(i)}$ の Ext^1 の消滅と次の命題から導かれる。

<u>命題 1.</u> $0 \longrightarrow G \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ をアーベル曲面上の sheaf の完全列とする。α, β を次のようにおく。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(F,G) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{End}(F) \oplus \mathrm{End}(G) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}(G,F) \\ p & \longmapsto & (f\circ p\ ,\ p\circ f) & & \\ & & (r\ ,\ s) & \longmapsto & r\circ f - f\circ s \end{array}$$

(1) $\mathrm{Ext}^1(G,F)=0$ ならば

(a) $\mathrm{End}(E) = \mathrm{Ker}\,\alpha / \mathrm{Im}\,\beta$

(b) $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{f'} F' \xrightarrow{g'} E' \longrightarrow 0$ を上の完全列の small deformation とする時，$E \cong E' \Leftrightarrow F=F',\ G=G',\ f=f'$

(2) α が全射ならば E の small deformation E' は E と同じ格好をしている。

<u>証明</u> E, F, G が全てベクトル束の時を考える。$S = \{ h \in \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X}(F) \mid h(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f \}$ とおく。自然な2つの完全列 (B) が存在する。

(A) $\quad 0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(F,G) \longrightarrow S \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X}(E) \longrightarrow 0$

(B) $\quad 0 \longrightarrow S \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(F) \oplus \underline{\mathrm{End}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(G,F) \longrightarrow 0$

仮定より $H^1(X, \underline{Hom}(G, F)) = 0$。$X$ の canonical line bundle は trivial だから Serre duality より $H^1(X, \underline{Hom}(F, G)) = 0$。よって (A) より

$$0 \to Hom_{\mathcal{O}_X}(F, G) \to H^0(X, S) \to End_{\mathcal{O}_X}(E) \to 0$$

$$H^1(X, S) \hookrightarrow H^1(X, \underline{End}_{\mathcal{O}_X}(E))$$

また (B) より

$$0 \to H^0(X, S) \to End_{\mathcal{O}_X}(F) \oplus End_{\mathcal{O}_X}(G) \xrightarrow{\alpha}$$

$Hom_{\mathcal{O}_X}(G, F)$

をえる。1, a) は直ちにわかる。1. b) は $H^1(X, S)$ が $f : G \longrightarrow F$ の deformation の tangent space と $H^1(X, \underline{End}_{\mathcal{O}_X}(E))$ が E の deformation の tangent space とそれぞれ同型なことから納得していただけると思う。(2) も $H^1(X, S) \longrightarrow H^1(X, \underline{End}(E))$ が全射であることだけを示す。先づ (A) より

$$H^1(S) \to H^1(\underline{End}(E)) \to H^2(\underline{Hom}(F, G)) \to H^2(S)$$

をえるから，右端の写像が単射であることを言えばよい。duality でひっくり返して $H^0(X, S^*) \longrightarrow Hom(G, F)$ が全射であることを言えばよいが，それは $(B)^*$ から決まる写像 $End(F) \oplus End(G) \longrightarrow H^0(X, S^*)$ を合成すると α になることから明らかである。　　証明終.

我々の場合，$\mathcal{O}_X(\frac{\nu}{u})$ の moduli は X，$\bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathcal{O}_X(\frac{g}{p})^{(i)}$ の moduli は対称積 $S^\lambda X$ と双有理同値。よって E の moduli は

$X\times S^{\lambda}X$ と双有理同値になる。すなわち，向が正しければ Spl_Q は $X\times S^{\lambda}X$ と双有理同値な多様体を含むことがわかるわけである。ここで予想1を正確な形で述べることができる。

<u>予想1′</u> a) (p,q) が $Q(-q,p)=1$（あるいは -1）の整数解の中で $|p|$ が最小のものとする。この時 $\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})$, $\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(i)}$ が"一般"ならば $f:\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{\lambda}\mathcal{O}(\frac{q}{p})^{(i)}$ あるいは $f:\bigoplus_{i=1}^{\lambda}\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(i)}\longrightarrow\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})$ は常に単射あるいは全射である。

b) $\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})$, $\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})^{(i)}$ が"一般"ならば $E=\mathrm{Coke}\,f$ あるいは $\mathrm{Ker}\,f$ は常に stable である。

c) M_Q の一般な点に対応する stable sheaf は $\mathrm{Coke}\,f$ あるいは $\mathrm{Ker}\,f$ の形をしている。

a) b) c) より予想1の従うことはみやすいであろう。

§3 $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E)$ に関する不等式

基本的なのは次のものである。

<u>命題2.</u> X は Gorenstein surface で canonical line bundle ω_X は trivial とする。(*) $0\longrightarrow E_0\xrightarrow{\alpha}E\xrightarrow{\beta}E_1\longrightarrow 0$ が完全列で $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(E_0,E_1)=0$ の時，次の不等式が成立する。

$$\sum_{i=0,1}\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(E_i,E_i)\leq \dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(E,E)$$

<u>証明</u> duality により $\mathrm{Ext}^2(E_1, E_0) = 0$ に注意する。

$\mathrm{Hom}(E_1, (*))$ より

$$\mathrm{Ext}^1(E_1, E) \xrightarrow{u} \mathrm{Ext}^1(E_1, E_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(E_1, E_0) = 0$$

$\mathrm{Hom}(E_0, (*))$ より

$$0 = \mathrm{Hom}(E_0, E_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_0, E_0) \xrightarrow{v} \mathrm{Ext}^1(E_0, E)$$

$\mathrm{Hom}((*), E)$ より

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(E_0,E) \arrow[r, "p"] & \mathrm{Ext}^1(E_1,E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Ext}^1(E,E) \arrow[r, "r"] & \mathrm{Ext}^1(E_0,E) \arrow[r, "s"] & \mathrm{Ext}^2(E_1,E) \\
& \mathrm{Ext}^1(E_1,E_1) & & \mathrm{Ext}^1(E_0,E_0) \arrow[u, "v"] &
\end{tikzcd}$$

p, s は $(*)$ の決める extension class $e \in \mathrm{Ext}^1(E_1, E_0)$ と cup 積する写像。よって $f \in \mathrm{Hom}(E_0, E)$ に対して

$$(u \circ p)(f) = u(e \circ f) = (e \circ f) \circ \beta = e \circ (f \circ \beta) = 0$$

何故なら $f \circ \beta \in \mathrm{Hom}(E_0, E_1) = 0$ 。よって $u \circ p = 0$ 。よって $\dim \mathrm{Ext}^1(E_1, E_1) \leq \dim \mathrm{Im}\, q$ 。duality でひっくり返すことによって $s \circ v = 0$ がわかるから，同様にして $\dim \mathrm{Ext}^1(E_0, E_0) \leq \dim \mathrm{Im}\, r$. 2つの不等式を足し合せることによって $\sum_{i=0}^{1} \dim \mathrm{Ext}^1(E_i, E_i) \leq \dim \mathrm{Im}\, q + \dim \mathrm{Im}\, r = \dim \mathrm{Ext}^1(E, E)$ をえる。　証明終

命題2は deformation theoretic な意味づけもできるがここでは省略する。

命題2を Harder Narasimhan Flag (HN-flag) に応用することについて考える。

stable の定義であるが、torsion free sheaf E が1つ fix した ample な直線束 H に関して stable というのは任意の零でない proper な subsheaf F に対して

$$\frac{\chi(F(tH))}{r(F)} < \frac{\chi(E(tH))}{r(E)} \qquad {}^\forall t \gg 0$$

が成立することを言う。torsion sheaf に対しても stable という概念を定義することができる。

定義 1. cycle $E = \sum_Z (\operatorname{rank} E_z) Z$　Z は $\dim Z = \dim E$ ($\overset{\mathrm{def}}{=} \dim \operatorname{Supp} E$) となる既約部分多様体を動く。z は Z の generic point.

定義 2. E が（H に関して）stable $\Leftrightarrow$ 任意の零でない proper な subsheaf F に対して $\dim F = \dim E$ かつ

$$\frac{\chi(F(tH))}{(H^d . \operatorname{cycle} F)} < \frac{\chi(E(tH))}{(H^d . \operatorname{cycle} E)} \qquad {}^\forall t \gg 0$$

が成立する。但し、$d = \dim X - \dim E$。

HN-filtration　任意の sheaf E は下の (1) (2) をみたす filtration　$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$ をもつ。

(1) 各 $F_i = E_i / E_{i-1}$ は semi-stable（上の定義で等号を許したもの）

(2) 各 i に対して $\dim F_i < \dim F_{i+1}$ か $\dim F_i = \dim F_{i+1}$ で $\dfrac{\chi(F_i(tH))}{(H^d . \operatorname{cycle} F_i)} > \dfrac{\chi(F_{i+1}(tH))}{(H^d . \operatorname{cycle} F_{i+1})}$ が成立する。
$(t \gg 0)$

(1) (2) より $i<j$ ならば $\mathrm{Hom}(F_i, F_j)=0$ がわかる。よって命題 2 より、次を得る。

命題 3. X は Gorenstein 曲面で canonical line bundle は自明とする。E_* を E の HN-filtration とするとき

$$\sum_{i=1}^{n} \dim \mathrm{Ext}^1(F_i, F_i) \leq \dim \mathrm{Ext}^1(E, E)$$

が成立する。

JHS-filtration 任意の semi-stable sheaf E は下の (*) をみたす filtration $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = E$ をもつ。

(*) 各 $F_i = E_i/E_{i-1}$ は stable, 各 i に対して

$$\dim F_i = \dim E, \quad \frac{\chi(F_i(tH))}{(H^d.\ \mathrm{cycle}\ F_i)} = \frac{\chi(E(tH))}{(H^d.\ \mathrm{cycle}\ E)} \quad \forall t$$

が成立する。

命題 4. E はアーベル曲面上の semi-stable torsion free sheaf とする。E_* を JHS-filtration とするとき

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\chi(F_i)}{r(F_i)} \leq \frac{\chi(E)}{r(E)}$$

が成立する。等号が成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{c_1(F_i)}{r(F_i)} \approx \dfrac{c_1(E)}{r(E)} \quad \forall i$ 。

(証明は Hodge index theorem による。)

最後の不等式は Fourier 変換に関するものである。X をアーベル曲面，$\hat{X}$ をその双対アーベル曲面 (集合としては $\mathrm{Pic}^0 X$), $\mathcal{P}$ を $X \times \hat{X}$ 上の Poincaré 直線束とする。$\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}|_{X\times 0}$, $\mathcal{P}|_{0\times\hat{X}}$ が共に自明となるように正規化しておく。$\hat{S}$, S という left exact な関手を

$$\hat{S}(E) = \pi_{\hat{X},*}(\mathcal{P} \otimes \pi_X^* E) \qquad E は X 上の sheaf$$

$$S(F) = \pi_{X,*}(\mathcal{P} \otimes \pi_{\hat{X}}^* F) \qquad F は \hat{X} 上の sheaf$$

でもって定義する。但し、π_X, $\pi_{\hat{X}}$ は $X \times \hat{X}$ の projection。$R^i\hat{S}: (\mathcal{O}_X\text{-module}) \longrightarrow (\mathcal{O}_{\hat{X}}\text{-module})$, $R^iS: (\mathcal{O}_{\hat{X}}\text{-module}) \longrightarrow (\mathcal{O}_X\text{-module})$ を各々 $\hat{S}$, S の導関手とする。このとき、

$$R^iS(R^j\hat{S}(E)) \Rightarrow \begin{cases} (-1_X)^*E & i+j=2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる Spectral sequence が存在する。([3])

<u>命題 5</u> E を X 上の sheaf とするとき、

$$\sum_{i=0}^{2} \dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(R^i\hat{S}(E), R^i\hat{S}(E)) \leq \dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(E, E)$$

が成立する。

<u>証明</u> $\hat{X}$ の derived category の中では $H^i(\underline{\underline{R}}\hat{S}(E)) = R^i\hat{S}(E)$ となる自然な complex $\underline{\underline{R}}\hat{S}(E)$ が定義できる。上の Spectral sequence は2つの derived category $D(X)$ と $D(\hat{X})$ が同値だということだから、derived category の中で定義される $\mathrm{Ext}^1_{D(\hat{X})}(\underline{\underline{R}}\hat{S}(E), \underline{\underline{R}}\hat{S}(E))$ は $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(E, E)$ と同型であることがわかる。$H^i(\underline{\underline{R}}\hat{S}(E)) = R^i\hat{S}(E)$ ということは、complex $\underline{\underline{R}}\hat{S}(E)$ が successive quotient が $R^i\hat{S}(E)[-i]$ となるような filtration をもつということである。自明な理由でもって $\mathrm{Hom}_{D(X)}(R^i\hat{S}(E)[-i], R^j\hat{S}(E)[-j]) = 0$ $(i<j)$ であるから命題2を $D(\hat{X})$ の中でまねをすることにより求める不等式

をえる。　　　　　　　　　　　　　　　　証明終

<u>Fourier 変換の一般化.</u>　Fourier 変換と命題 5 を一般化しておく。idea は Poincaré 直線束を simple semi-homogeneous sheaf の universal family でおきかえるだけである。

<u>定理 5</u>.　E, F は semi-homogeneous sheaf で

$$\chi(E,F) \overset{\text{def}}{=} \sum (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(E,F) = \pm 1$$

をみたすものとする。E の moduli を Y とする。このとき、E を $k(o)$ $(o \in Y)$ に F を $\mathcal{O}_Y$ に写す関手 $\varphi = (\varphi^i) : D(X) \longrightarrow D(Y)$ とその逆関手 $\psi : D(Y) \longrightarrow D(X)$ が存在する。

詳しく述べると、

(1)　$\varphi^0(\,?\,) = \pi_{Y,*}(\mathcal{E}^* \otimes \pi_X^* \,?\,)$　　? は $\mathcal{O}_X$-module

　　$\psi^0(\,?\,) = \pi_{X,*}(\mathcal{E} \otimes \pi_Y^* \,?\,)$　　? は $\mathcal{O}_Y$-module

ここで、$\mathcal{E}$ は E の deformation の universal family。π_X, π_Y は $X \times Y$ の projection. φ^i, ψ^i は各々 φ^0, ψ^0 の導関手。

(2)　$\varphi^0(E) = \varphi^1(E) = 0$　　$\varphi^2(E) \cong k(0)$

　　$\varphi^j(F) = 0 \quad \forall j \neq j_0$　　$\varphi^{j_0}(F) \cong \mathcal{O}_Y$

ここで、j_0 は $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(E,F) = 0 \ \forall i \neq j_0$ をみたす整数。

(3)　次の Spectral sequence が存在する。

$$\psi^i \varphi^j(G) \Longrightarrow \begin{cases} G & i+j=2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad G \text{ は } \mathcal{O}_X\text{-module}$$

<u>命題 6</u>　定理5の φ^i ψ^i に関して次の不等式が成立する。

$$\sum_{i=0}^{2} \dim \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(\varphi^i(G), \varphi^i(G)) \leq \dim \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(G, G)$$

$$\sum_{i=0}^{2} \dim \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\psi^i(H), \psi^i(H)) \leq \dim \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(H, H)$$

ある i_0 があって $\varphi^i(G)=0$ $\forall i \neq i_0$ の時は等号が成立する。

§4. 定理3の証明 ($\lambda=1$ の場合)

(X, C) は主偏極アーベル曲面，$NS(X) \cong \mathbb{Z}$ とする。

$\lambda = n^2 - r\chi = 1$ の時 $Q = rx^2 + 2nxy + \chi y^2$ は次の2つの場合がある。

Case A　Q は ±1 を表わす。$Q(x, y) = \pm\{(ux+vy)^2 - (px+qy)^2\}$　$pv - qu = \pm 1$　$\frac{q}{p} > \frac{v}{u}$ と書くことができる。

Case B　Q は ±1 を表わさない。$Q(x, y) = 2(px+qy)(ux+vy)$　$pv - qu = \pm 1$ と書くことができる。

$\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})$ の moduli は X と同型だから、定理5より $\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})$ を $k(0)$ に $\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})$ を $\mathcal{O}_X$ に写す関手 $\varphi : D(X) \longrightarrow D(X)$ とその逆関手 ψ がある。

<u>Case A</u>　予想1′に沿って証明していく。

a)　非零準同型 $f : \mathcal{O}_X(\frac{v}{u}) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\frac{q}{p})$ は常に単射か全射である。

<u>証明</u>　$\mathfrak{m}$ を点0での maximal ideal とする。$\psi^0(k(0)) \cong$

$\mathcal{O}_X(\frac{q}{p})$, $\psi^0(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X(\frac{v}{u})$ だから，完全列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow k(0) \longrightarrow 0$$

より．　$0 \rightarrow \psi^0(\mathfrak{m}) \rightarrow \mathcal{O}_X(\frac{v}{u}) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X(\frac{q}{p}) \rightarrow \psi^1(\mathfrak{m}) \rightarrow 0$

をえる。また $\psi^2(\mathfrak{m}) = 0$ 。よって命題 6 より

$$\sum_{i=0}^{1} \dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\psi^i(\mathfrak{m}), \psi^i(\mathfrak{m})) \leq \dim \mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) = 4.$$

$\psi^0(\mathfrak{m})$, $\psi^1(\mathfrak{m})$ が共に零でないとすると $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\psi^i(\mathfrak{m}), \psi^i(\mathfrak{m})) \geq 2$ 。よって上の不等式より $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\psi^i(\mathfrak{m}), \psi^i(\mathfrak{m})) = 2$ 。よって §1 の分類より $\psi^0(\mathfrak{m}) \cong \mathcal{O}_X(\frac{v'}{u'})$ $\psi^1(\mathfrak{m}) \cong \mathcal{O}_X(\frac{q'}{p'})$ となる既約分数 $\frac{v'}{u'}$, $\frac{q'}{p'}$ がある。

$$(px+qy)^2-(ux+vy)^2 = Q(x,y) = (p'x+q'y)^2-(u'x+v'y)^2$$

より $\frac{q'}{p'} = \frac{q}{p}$ $\frac{v'}{u'} = \frac{v}{u}$ をえる。よって $f=0$ 。これは仮定に反する。

証明終

b) $E = \mathrm{Coker}\, f$ あるいは $\mathrm{Ker}\, f$ は常に stable

証明　$G.C.D.(r, n, \chi) = 1$ だから semi-stable であることを言えばよい。semi-stable でないとする。E_* を HN-filtration とする時，命題 3 より $n=2$ $\dim \mathrm{Ext}^1(F_i, F_i) = 2$ $(i=1,2)$ をえる。よって $F_1 = \mathcal{O}_X(\frac{q'}{p'})$, $F_2 = \mathcal{O}_X(\frac{v'}{u'})$ となる $\frac{q'}{p'}$, $\frac{v'}{u'}$ が存在する，完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(\frac{q'}{p'}) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X(\frac{v'}{u'}) \longrightarrow 0$$

をえるが，$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(\frac{v'}{u'}), \mathcal{O}_X(\frac{q'}{p'})) = 0$ だからこれは常に分解する．矛盾。

証明終

c) 勝手な stable sheaf $\in M_Q$ は $\mathrm{Coke}\, f$ あるいは $\mathrm{Ker}\, f$ の形をしている。

<u>証明</u>　$u=0$ の時。$Q(x,y)=(x+gy)^2-y^2$ よって $M_Q=M(1,g,g^2-1)$ の元は全て $\mathcal{O}_X(g)\otimes \mathfrak{m}_x$ の形をしているからよい。実際 $0\to E\cong \mathcal{O}_X(g)\otimes\mathfrak{m}_x\to \mathcal{O}_X(g)\xrightarrow{f} k(x)\to 0$ 。

$u\neq 0$ の時。E の変換 $\varphi^0(E), \varphi^1(E), \varphi^2(E)$ を考える。命題6より，2つの場合が考えられる。

イ) $\varphi^i(E)$ は1つを除いて零

ロ) $\varphi^{i_0}(E)=0$　　$\dim \mathrm{Ext}^1(\varphi^i(E),\varphi^i(E))=2$　$i\neq i_0$

イ)の場合，例えば $\varphi^2(E)$ だけが非零とする。Grotendieck-Riemann-Roch 定理より $r(\varphi^2(E))=1$，$c_1(\varphi^2(E))\approx 0$，$\chi(\varphi^2(E))=-1$ がわかる。$\varphi^2(E)$ が simple であることより，$\varphi^2(E)\cong P\otimes \mathfrak{m}_x$ $(P\in \mathrm{Pic}^0 X, x\in X)$。$P$ は $\mathcal{O}_X$ の deformation だから $\psi^0(P)$ は $\psi^0(\mathcal{O}_X)\cong \mathcal{O}_X(\frac{v}{u})$ の deformation $\mathcal{O}_X(\frac{v}{u})'$ に，同様に $k(x)$ は $\mathcal{O}_X(\frac{s}{p})'$ に写る。よって完全列

$$0\to \varphi^2(E)\to P\to k(x)\to 0$$

と $\psi^0\varphi^2(E)\cong E$（定理5）より，

$$0\to E\to \mathcal{O}_X(\tfrac{v}{u})'\xrightarrow{f}\mathcal{O}_X(\tfrac{s}{p})'\to 0$$

をえる。

ロ)の場合，例えば $\varphi^0(E)=0$　$\varphi^1(E),\varphi^2(E)$ は simple semi-homogeneous とする。定理5の Spectral sequence より完全列

$$\begin{array}{ccc} \psi^0\varphi^2(E) & \psi^1\varphi^2(E) & \psi^2\varphi^2(E) \\ \psi^0\varphi^1(E) & \psi^1\varphi^1(E) & \psi^2\varphi^1(E) \end{array} \qquad 0 \to \psi^1\varphi^1(E) \to E \to \psi^0\varphi^2(E) \to \psi^2\varphi^1(E) \to 0$$

をえるが、$\varphi^1(E)$, $\varphi^2(E)$ が simple semi-homogeneous なので $\psi^1\varphi^1(E)=0$ で $\psi^0\varphi^2(E)$, $\psi^2\varphi^1(E)$ はやはり simple semi-homogeneous。数値を見比べることにより、$\psi^0\varphi^2(E) \cong \mathcal{O}_X(\frac{\nu}{u})$ $\psi^2\varphi^1(E) \cong \mathcal{O}_X(\frac{\delta}{p})$ をえる。

証明終。

Case B. claim E: simple sheaf in Spl_Q, $\varphi=(\varphi^i)$ は定理5で存在が示されている関手とする。この時常に $\varphi^i(E)$ は1つを除いて全て零である。

証明は Case A, c) と同じ。

claim より $Q'=r'x^2+2n'xy+\chi'y^2$ $\lambda'=n'^2-r'\chi'$ Q'は±1を表わさないとする時 Spl_Q と $Spl_{Q'}$ は常に同型である。$\lambda=1$だから Case A. b) のように simple と stable は同じである。一方 $Q(x,y)=2xy$ の時 $Spl_Q = Spl\,(0,1,0) \cong X\times X$ であるから、任意の Q に対して $Spl_Q = M_Q \cong X\times X$。

証明終。

参考文献

[1] M.F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc., 7 (1957) 414−452

[2] S. Mukai, Semi-homogeneous vector bundles on an abelian

variety Journal of Math. Kyoto Univ., vol 18 (1978) 239 – 272

[3] S. Mukai, Duality between D(X) and D($\hat{X}$) with its application to Picard sheaves, to appear in Nagoya Math. J.

[4] D. Mumford, Abelian Varieties, Oxford University Press, 1974.

[5] T. Oda, Vector bundles on abelian surfaces, Invent. Math., 13 (1971), 247 – 260.

[6] R. L. E. Schwarzenberger, Jacobians and symmetric products, Illinois J. Math., 7 (1963)

[7] H. Umemura, On a property of symmetric products of a curve of genus 2, Proc. Intl. Symp. on Algebraic Geometry Kyoto 1977, Kinokuniya, Tokyo

[8] H. Umemura, Moduli spaces of the stable vector bundles over abelian surfaces, Nagoya Math. J., vol 77 (1980), 47 – 60