数理解析研究所講究録
第409巻 1980年 135-152

On the automorphisms of hypersurfaces of $\mathbb{P}^n$

東大 理　石井 清

Vを$\mathbb{P}^{n+1}$内のn次元m次の非特異超曲面($n\geq 1, m\geq 3$), $\mathrm{Aut}(V)$でVの自己同型群, $\mathrm{Lin}(V)$で$\mathbb{P}^{n+1}$の射影変換であるVの自己同型のなす群を表わすとする。このとき次の結果が得られている。(松村-Monsky[4], 難波[5])

(1) $(n, m) \neq (1, 3), (2, 4)$のとき

$$\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{Lin}(V)$$

(2) $\mathrm{Lin}(V)$は有限群

また, $(n, m) = (1, 3)$のときには, Vは楕円曲線となり$\mathrm{Aut}(V)$が無限群であることが古くから知られており, $(n, m) = (2, 4)$のときには, $\mathrm{Aut}(V)$が無限群であるようなK3曲面Vの存在が知られている。(例えば塩田-猪瀬[1])

以下では, Vを$\mathbb{C}$上で考えて, $\mathrm{Lin}(V)$に関するいくつかの性質について述べる。主な結果は, $\mathrm{Lin}(V)$のmaximal orderの元に関する定理 §4 Th.2 及び, $\mathrm{Lin}(V)$の maximal diagonal subgroupに関する定理 §5 Th3 である。

§1. 対角化

補題1.
G: finite cyclic group
$\sigma_0 : G \longrightarrow PGL(n, \mathbb{C})$ 忠実な表現
$\pi : GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow PGL(n, \mathbb{C})$ canonical surjection.
このとき，Gの$GL(n, k)$への忠実な表現σであって，対角行列のみからなるもので，$\pi \circ \sigma$がσ_0と同値な表現になるものが存在する。

証明. gをGのgenerator dをGのorderとする。$\pi^{-1}(\sigma_0(g))$の元Aを考えると，$A^d = \alpha E$ $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ αのd乗根のひとつをとって$\alpha^{\frac{1}{d}}$と書く。AのJordan標準形Jは，Aの最小多項式が$x^d - \alpha$の約数であることより対角行列であり，$\sigma(g)$を$\alpha^{\frac{1}{d}} J$とすれば，σは条件をみたす。 □

補題2.
$\mathbb{P}^{n+1}$の同次座標を$(x_0 : x_1 : \cdots : x_{n+1})$, Vの定義方程式を$F=0$とする。このとき，Fには次のいずれかの項が含まれて

いる。

$$x_0^m, x_0^{m-1}x_1, \cdots\cdots, x_0^{m-1}x_i, \cdots\cdots, x_0^{m-1}x_{n+1}$$

証明。

Fに上の$(n+2)$項のどれもが含まれていなければ，Fは$(m-2)$次の同次式F_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n+1)$を用いて，次の様に書ける。

$$F = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n+1} x_i x_j F_{ij}$$

よって，$F=0$，$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$ $(0 \leq i \leq n+1)$はすべて$(1:0:\cdots:0)$を零点にもつ。これはVの非特異性に矛盾する。 □

以上の補題1，2により$\mathrm{Lin}(V)$の元gが与えられたとき$\mathbb{P}^{n+1}$の適当な座標変換によって，gを$PGL(n+2,\mathbb{C})$の対角行列と考えてよいことがわかる。また，そのときVの定義多項式には，任意の$0 \leq i \leq n+1$に対して少くともひとつは$x_i^{m-1}x_j$という形の項が0でない係数をもって含まれていることがわかる。

§2. S図形と$\mathfrak{A}(S,m)$

ここでは$\mathbb{P}^{n+1}$の座標を一組定めたときに，$PGL(n+1,\mathbb{C})$の対角行列からなる$\mathrm{Lin}(V)$の部分群を考察する。そのために，S図形及び$\mathfrak{A}(S,m)$を定義する。

【S図形の定義】

S図形は次の3つの要素からなる

(1) black vertex ● (2) white vertex ○

(3) arrow $\longrightarrow$

これらは次の条件を満たす。

(1) arrow は2つの vertices を結ぶ（starting vertex と ending vertex とをもつ。）

(2) ending vertex は white vertex に限る。

(3) 全ての white vertex はある arrow の ending vertex になっている。また2本以上の arrows の ending vertex になることはない。

このときS図形 S に対して length を

$$\mathrm{length}(S) = \#\,\mathrm{vertices}$$

と定めておく。

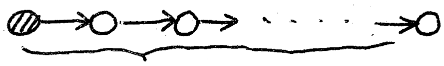
2つのS図形 S, T を並べたものもやはりS図形であり，これを $S \amalg T$ と書くことにする。

また，arrows によって連結している vertices は，それらを結ぶ arrows と共にもとのS図形の component と呼ばれる。

次にS図形の例を並べる。

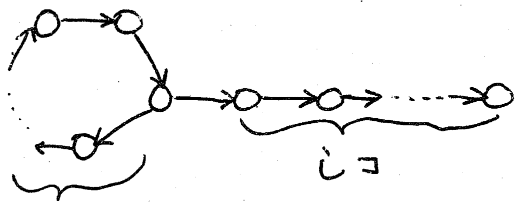
【S図形の例】

A ; 

B^n ; 

$(n+2)$ケ

$n \geqq 0$

$C^{n-i,i}$; 

iコ

$(n-i+2)$コ

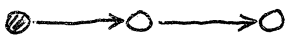
$n \geqq i \geqq 0$

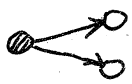
【length(S)=3 のS図形】

length=3 のS図形は以下の7種類である。

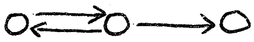
(1) 

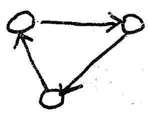
(2) 

(3) 

(4) 

(5) 

(6) 

(7) 

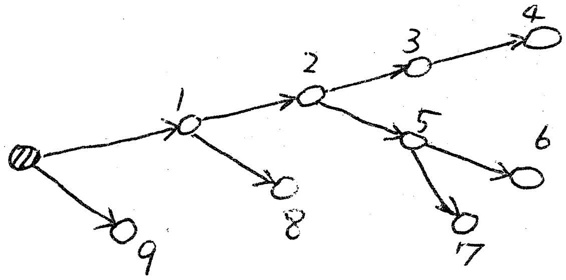
【branch 及び cycle】

S図形において white vertices が arrows によって円状に連結されている部分のことを cycle と呼ぶ。例えば，$C^{n-i,i}$ の $(n-i+2)$コの white vertices の部分がそれである。また，length=3 のS図形の(5),(6),(7)には cycle が含まれている。

次に，直線状に white vertices がつながっている部分を

S図形のbranchという。black vertexまたはcycleから出ているbranchで長さが極大のものをmain branchと呼ぶ。main branchの取り方は一通りではない。

例えば下のS図形において，1−2−3−4または，1−2−5−6がいずれもmain branchになりうる。このような場合にはどちらかを指定しておくこととする。このS図形には，main branches 1−2−3−4，8 及びその他のbranches 5−6，7，8 の5本のbranchesがある。



〖S図形とVの対応〗

$\mathbb{P}^{n+1}$の座標を一組定めたとき，その座標を$(x_0; x_1; \cdots; x_{n+1})$とすると，Vの定義多項式Fには，§1 補題2によって，任意の$0 \leq i \leq n+1$に対して，適当な$0 \leq j \leq n+1$であって，$x_i^{m-1} x_j$がFに含まれるようなものがあった。そこで，各iに対してそのようなjをそれぞれひとつだけ選んでおく。それをj_iと書こう。すると，このようなj_iの選び方によって，S図形が次のように定まる。

各iに対してvertex iを置く。$j_i = i$のときには，その

vertex を black vertex とする。また，$i \neq j_i$ のときには vertex j_i を starting vertex に，vertex i を ending vertex にする arrow をひく。すなわちこの場合には vertex i は，white vertex である。

このように定めた S 図形は，V 及び $\mathbb{P}^{n+1}$ の座標のとり方に一意によっているわけではないことに注意すべきである。

さて，このとき，$\mathfrak{a}(S, m)$ を次のように定義する。

$$\mathfrak{a}(S, m) = \{ g \in GL(n+2, \mathbb{C}) \mid g \text{ は対角行列で } x_i^{m-1} x_{j_i} \text{ を不変にする } (\forall i) \}$$

$\mathfrak{a}(S, m)$ は，S 及び m によって定まる有限 abel 群である。

§3. $\mathfrak{a}(S, m)$ の基本性質

S 図形 S 及び自然数 m を与えたとき，$(m \geqq 3, \text{length}(S) \geqq 3)$ $\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面 $V(S)$ が逆に同型をのぞいて定まる。すなわち S の各 vertex に 0 から $n+1$ までの番号を適当に振って，black vertex i には x_i^m，white vertex i には，i を ending vertex とする arrow の starting vertex j に対して $x_i^{m-1} x_j$ として作った monomials の和を定義多項式とする超曲面を $V(S)$ とする。このとき，$V(S)$ は必ずしも非特異とは限らない。

以下に$\mathfrak{O}(S, m)$の基本性質及び基本定理を述べる。

(1) $\mathfrak{O}(S, m)$は 位数mの標準的なcyclic groupを含む。
すなわち，1の原始m乗根をζとしたとき，$\zeta\cdot 1 \in GL(n+2, \mathbb{C})$によって生成されるcyclic groupである。このcyclic groupによる$\mathfrak{O}(S, m)$のfactor groupを$\mathfrak{O}_0(S, m)$と書く。

(2) 2つのS図形S，Tに対して$\mathfrak{O}(S \amalg T) \cong \mathfrak{O}(S) \oplus \mathfrak{O}(T)$

(3) $\mathfrak{O}(\underbrace{A \amalg A \amalg \cdots \amalg A}_{(n+2)コ}) \cong \underbrace{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \cdots\cdots \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}_{(n+2)コ}$

(4) $\mathfrak{O}(B^n) \cong \mathbb{Z}/m(m-1)^{n+1}\mathbb{Z}$

(5) $\mathfrak{O}(C^{n,0}) \cong \mathbb{Z}/\{(m-1)^{n+2}-(-1)^{n+2}\}\mathbb{Z}$

証明。(1)，(2)は明らか。(3)～(5)は簡単な計算である。例えば(5)を示そう。$x_0^{m-1}x_1$, $x_1^{m-1}x_2$, $\cdots\cdots$, $x_n^{m-1}x_{n+1}$, $x_{n+1}^{m-1}x_0$を不変にする$GL(n+2, \mathbb{C})$の対角行列を$g=[\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{n+1}]$とすると，$\mathfrak{O}(S, m)$の定義より，$\zeta_0^{m-1}\zeta_1=\zeta_1^{m-1}\zeta_2=\cdots=\zeta_{n+1}^{m-1}\zeta_0=1$である。$\zeta_{n+1}$を$\zeta$と書けば，$\zeta_0=\zeta^{1-m}$ $\zeta_1=\zeta^{(1-m)^2}$, $\cdots\cdots$ $\zeta_i=\zeta^{(1-m)^{i+1}}$, $\cdots$ $\zeta_{n+1}=\zeta^{(1-m)^{n+2}}$。よって，$\zeta^{(1-m)^{n+2}}=\zeta$より$\zeta$は1の$\{(m-1)^{n+2}-(-1)^{n+2}\}$乗根。逆にそのような$\zeta$を与えれば$g$は定まる。 □

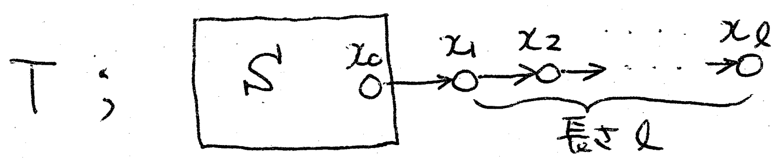
次に，branchの位置が$\mathfrak{O}(S, m)$によらないことを示す。

Th.1 (branch 接続定理)

長さℓの branch をもつ S図形Tからその branch をのぞいた S図形をSとすると

$$\mathfrak{A}(T,m)\cong \mathfrak{A}(S,m)\oplus \mathbb{Z}/(m-1)^{\ell}\mathbb{Z}$$

証明。標準的に $\mathfrak{A}(T,m)\supset\mathfrak{A}(S,m)$ とみなせる。また，canonical surjection $p\,;\,\mathfrak{A}(T,m)\to\mathfrak{A}(S,m)$ が，$\mathfrak{A}(T,m)$ の元gに対して，gのSの各 vertex への作用をとることによって定まっていることが明らかにわかる。そこで，pとともに$\mathfrak{A}(T,m)$の直和分解を与えるような，surjection $q\,;\,\mathfrak{A}(T,m)\longrightarrow \mathbb{Z}/(m-1)^{\ell}\mathbb{Z}$ を構成すればよい。簡単のために，$\mathbb{Z}/(m-1)^{\ell}\mathbb{Z}$ を1の$(m-1)^{\ell}$乗根全体のなす乗法群$\mu=\mu_{(m-1)^{\ell}}$と適当な方法で同一視し，qを$\mathfrak{A}(T,m)$からμへの homomorphism として構成する。



上図のように，長さℓの branch の各 vertex に$x_1\sim x_\ell$の文字を対応させ，branch がSと接続されている vertex にx_0の文字を対応させておく。

以下の三通りに分けて証明する。

(1) branchがmain branch，かつvertex x_0がblack vertexのとき

$\mathfrak{A}(T,m)$の元gがx_i $(0\leqq i\leqq l)$上に $g: x_i \longrightarrow \zeta_i x_i$ と作用しているとき

$$\zeta_0^m = \zeta_0\zeta_1^{m-1} = \zeta_1\zeta_2^{m-1} = \cdots\cdots = \zeta_{l-1}\zeta_l^m = 1$$

となる。$\zeta_l = \zeta$ と書けば，$\zeta_i = \zeta^{(1-m)^{l-i}}$ $(0\leqq i\leqq l)$ゆえ，ζは1の $m(m-1)^l$乗根 である。そこで $q: \mathfrak{A}(T,m) \to \mu$ を，$q(g) = \zeta_0^{-1}\zeta_l = \zeta^{1-(1-m)^l}$と定めておく。

このとき，$\ker p \cap \ker q = \{1\}$である。実際，$\mathfrak{A}(T)\ni g$がSの各vertex（に対応する文字）の上へtrivialに作用していれば，$\zeta_0 = 1$であり，従って，$q(g) = \zeta_l = 1$ならば$\zeta_i = 1$ $(1\leqq i\leqq l)$だから $g = 1$となってしまう。

そこで $p\times q: \mathfrak{A}(T,m) \longrightarrow \mathfrak{A}(S,m)\times\mu$ は単射。逆に，$\mathfrak{A}(S)$の元hとμの元εを与えると，$h: x_0 \mapsto \zeta_0 x_0$のとき，$\mathfrak{A}(T)$の元$g$を，$g|S = h$，$g: x_i \mapsto \zeta_i x_i$
$\zeta_i = \zeta_l^{(1-m)^{l-i}}$，$\zeta_l = \zeta_0\varepsilon$ $(1\leqq i\leqq l)$として構成できる。

よって $p\times q: \mathfrak{A}(T) \to \mathfrak{A}(S)\times\mu$ はisomorphismでありこの場合にはTh.1の証明ができた。

(2) branch が main branch で vertex x_0 が cycle に含まれているとき

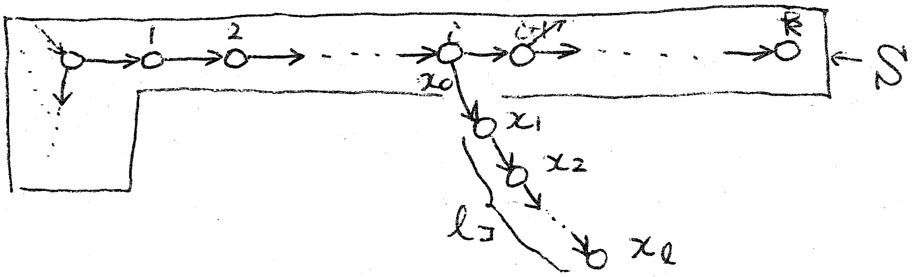
このときには，cycleの長さを k とすると，($k\geq 2$) Th の前に述べた基本性質(5) によって，$g\in \mathfrak{A}(T)$，$g: x_i \mapsto \zeta_i x_i$ ならば，ζ_0は1の$\{(m-1)^k-(-1)^k\}$乗根であることがわかる。$\varphi: \mathfrak{A}(T)\to\mu$ を (1)と同様に $\varphi(g)=\zeta_0^{i-1}\zeta_l$ と定めれば同じ議論が成り立つ。

(3) branch が main branchで無い場合

このときには，x_0は長さkのbranchの根元から数えてi番目のvertex でありさらに，branchの定め方から

$$k > k-i \geq l$$

であるとしてよい。(下図参照)

T；

$\mathfrak{A}(T)$の元gが $g: x_i \mapsto \zeta_i x_i$ ($0\leq i\leq l$)
また vertex k に対して ξ-倍の作用をもつとするとき，

$$\zeta_0\zeta_1^{m-1}=\zeta_1\zeta_2^{m-1}=\cdots\cdots=\zeta_{l-1}\zeta_l^{m-1}=1$$
$$\zeta_0=\xi^{(1-m)^{k-i}}$$

であるから，$\varphi: \mathfrak{A}(T)\to\mu$ を $\varphi(g)=\xi^{-(1-m)^{k-i-l}}\zeta_l$

と定める。このとき(1)と同様にして isomorphism $p\times q$ によって $\mathfrak{U}(T)\cong\mathfrak{U}(S)\times\mu$ がわかる。

以上によって Th.1 は証明された。 □

§4. Lin(V) の maximal order の元

次の定理が成り立つ。

Th.2.

V; $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の n 次元 m 次非特異超曲面 ($n\geq 1$, $m\geq 3$)

$g\in \mathrm{Lin}(V)$, d によって g の位数を表わす。

このとき,

$$d\leq m(m-1)^n$$

であり，等号は次の場合に射影変換を除いて一致する。

$$V;\ x_0^m+x_1^m+x_1x_2^{m-1}+x_2x_3^{m-1}+\cdots+x_nx_{n+1}^{m-1}=0$$

$$g=[1,\zeta^{(1-m)^n},\zeta^{(1-m)^{n-1}},\cdots\cdots,\zeta^{1-m},\zeta]$$

但し，ζ は 1 の原始 $m(m-1)^n$ 乗根を表わすものとする。

(なお，この定理は塩田先生の予想されたものです。)

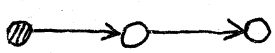
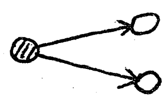
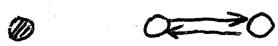
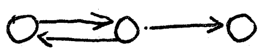
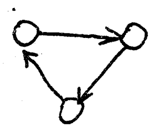
証明。n に関する induction で証明する。

最初に，$^\forall g\in \mathrm{Lin}(V)$ ($^\forall V$) は，§1 補題 1 によって対角化され，補題 2 によって，適当な length $=n+2$ の S 図形

に対して $\mathfrak{A}_0(S, m)$ の元とみなせることを注意しておく。

従って，$d \leq m(m-1)^n$ を示すには，length $= n+2$ の任意のS図形Sに対して，$\mathfrak{A}_0(S, m)$ の maximal order の元の位数が $m(m-1)^n$ を超えないことを言えばよい。

$n=1$ の場合。length $= 3$ のS図形7通りについてしらみつぶしに $\mathfrak{A}_0(S, m)$ を調べる。

S	$\mathfrak{A}(S, m)$の単因子	$\mathfrak{A}_0(S, m)$の単因子
	$m,\ m,\ m$	$m,\ m$
	$m,\ m(m-1)$	$m(m-1)$
	$m(m-1)^2$	$(m-1)^2$
	$m-1,\ m(m-1)$	$m-1,\ m-1$
	$m\{(m-1)^2-1\}$	$m(m-2)$
	$\{(m-1)^2-1\}(m-1)$	$(m-1)(m-2)$
	$(m-1)^3+1$	m^2-3m+3

ゆえに，$n=1$ の場合には $m(m-1)$ が上限であることが確かめられる。

次に一般のnについて考える。そこで，$\mathfrak{O}_0(S, m)$の最大位数が$m(m-1)^n$にとどかないようなS図形を除外してゆく。以下の3つの性質を持つものは除外される。

(1) componentsの数が3つ以上のもの

(2) 2本以上のbranchをもつもの

(3) cycleを含むもの

なぜならば，3つ以上のcomponentsをもつS図形Sは，適当な3つのS図形S_1, S_2, S_3によって$S = S_1 \amalg S_2 \amalg S_3$と書ける。$\mathfrak{O}(S) = \mathfrak{O}(S_1) \oplus \mathfrak{O}(S_2) \oplus \mathfrak{O}(S_3)$ゆえ，$\mathfrak{O}_0(S)$の最大位数の元の位数は，各$\mathfrak{O}(S_i)$ $(1 \leq i \leq 3)$がm位のcyclic groupを含むことにより，高々$m^3(m-1)^{n-4}$を超えない。$m \geq 3$のとき，これは$m(m-1)^n$より小さい。

また2本以上のbranchesをもつS図形Sについては，branchの接続定理によって，適当なS図形Tによって，

$$\mathfrak{O}(S, m) = \mathfrak{O}(T, m) \oplus \mathbb{Z}/(m-1)^l\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(m-1)^k\mathbb{Z}$$

($l \geq k$としておく)となるから，やはり最大位数が，$m(m-1)^{n-k}$を超えないことがわかる。

最後に，cycleを含むS図形Sについては，それが長さkのcycleであれば，S図形の基本性質(5)によって，branch接続定理を使ってcycleのbranchを他に移すことにより

$$\mathfrak{O}(S, m) = \mathfrak{O}(T, m) \oplus \mathbb{Z}/\{(m-1)^k-(-1)^k\}\mathbb{Z}$$

または，S の component が cycle を含む１つだけのときは，

$$\mathfrak{a}(S,m) = \mathbb{Z}/\{(m-1)^k-(-1)^k\}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(m-1)^l\mathbb{Z} \oplus \cdots$$

を得る。第一の場合には，最大位数は $(m-1)^{n-k}\{(m-1)^k-(-1)^k\}$ を，第二の場合には，$\frac{1}{m}(m-1)^{n+2-k}\{(m-1)^k-(-1)^k\}$ を超えない。いずれも $m(m-1)^n$ より小さい。

従って，(1)〜(3)によって除外されない S 図形を考えればよいがそれは次の２つである。

$$B^n\ ;\quad \bullet \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \circ$$

$$A \sqcup B^{n-1}\ ;\quad \bullet \qquad \bullet \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \cdots \longrightarrow \circ$$

ところが，$\mathfrak{a}_0(B^n)$ 及び $\mathfrak{a}_0(A \sqcup B^{n-1})$ の最大位数の元の位数は，それぞれ $(m-1)^{n+1}$ 及び $m(m-1)^n$ である。

ゆえに，$d \leq m(m-1)^n$ でありTh の前半を示すことができた。

次に，V，g が定理の後半の仮定を満たすとすると，今までの考察により，$\mathbb{P}^{n+1}$ の適当な座標変換によって V の定義多項式は

$$F = x_0^m + x_1^m + x_1 x_2^{m-1} + \cdots + x_m x_{m+1}^{m-1} + (\text{other terms})$$

の形であり，また簡単な計算によって，

$$g = [1,\ \zeta^{(1-m)^n},\ \zeta^{(1-m)^{n-1}}, \cdots\ \zeta^{1-m}, \zeta]$$

(ζ ; 1の原始 $m(m-1)^n$ 乗根）としてよいことがわかる。

そこで後は，gによって不変な monomial $\prod_{0\leq i\leq n+1} x_i^{k_i}$が $x_0^m, x_1^m, x_1x_2^{m-1}, \cdots, x_nx_{n+1}^{m-1}$ しかないことを示せばよい。すなわち，不定方程式

$$\begin{cases} k_1(1-m)^n + k_2(1-m)^{n-1} + \cdots + k_n(1-m) + k_{n+1} \equiv 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\bmod\ m(m-1)^n) \\ \displaystyle\sum_{1\leq i\leq n+1} k_i \leq m \end{cases}$$

を解けばよい。nに関する帰納法によって，上に挙げたものしかないことを示す。

$n=1$のとき，

$$\begin{cases} k_1(1-m) + k_2 \equiv 0 \quad (\bmod\ m(m-1)) \\ k_1 + k_2 \leq m \end{cases}$$

$k_2=0$ のとき $k_1=0$ または m。$k_2\neq 0$ のとき，$k_2=m-1$ $k_1=1$。よって正しい。

$n>1$ のとき，

$k_{n+1}\neq 0$ とすると，$k_{n+1}=m-1$。明らかに $k_n=1$。

$k_{n+1}=0$ のときには

$$k_1(1-m)^{n-1} + k_2(1-m)^{n-2} + \cdots + k_n \equiv 0 \quad (\bmod\ m(m-1)^{n-1})$$

帰納法の仮定により，$(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (0,0,\cdots,0)\ (m,0,\cdots,0)$ $(1,m-1,0,\cdots,0)\ (0,1,m-1,0,\cdots,0) \cdots\cdots (0,0,\cdots,0,1,m-1)$

□

§5. Lin(V)の diagonal subgroup

Lin(V)の同時対角化可能な subgroup について次の結果が成り立つ。

Th. 3.

V ; $\mathbb{P}^{n+1}$内の n 次元 m 次非特異超曲面 （n≧1, m≧3）

G ; Lin(V) の同時対角化可能な subgroup

このとき，

$$\# G \leq m^{n+1}$$

であり，等号は，次の場合に射影変換を除いて一致する。

V ; $x_0^m + x_1^m + \cdots + x_{n+1}^m = 0$

$G = \{ [1, \zeta^{i_1}, \zeta^{i_2}, \cdots, \zeta^{i_{n+1}}] \}$

ここで，ζ は 1 の原始 m 乗根，$i_1 \sim i_{n+1}$ は整数である。

証明は，Th.2 と同様なので省略する。

最後に，講演の時に話した PGL の有限 abel 群の GL への表現に関する補題は，明らかな誤まりであったことが判明いたしました。聴衆の方々に御迷惑をおかけしたことをお詫びいたします。

[1] T. Shioda - H. Inose ; "On singular K3 surfaces" Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami - Cambridge Univ. Press (1977)

[2] T. Shioda ; "The Hodge Conjecture for Fermat Varieties" Math. Ann. 245, 175~184 (1979)

[3] T. Shioda ; "On the Picard number of a complex projective variety" to appear

[4] H. Matsumura - P. Monsky ; "On the automorphisms of hypersurfaces" J. Math. Kyoto. Univ. 3-3 (1964)

[5] M. Namba ; "Families of Meromorphic Functions on Compact Riemann Surfaces" Springer Lecture Note 767

[6] K. Iwasawa - T. Tamagawa ; "On the group of automorphisms of a function fields" J. Math Soc. Japan Vol 3 No. 1 (1951) / Correction, Vol. 4 No. 1, 2 (1952)