数理解析研究所講究録
第 411 巻 1981 年 2-9

P 進 L 関数入門 I
(Kummer の合同式と Kubota-Leopoldt の仕事)

北大 理　森田康夫

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

なる式により Bernoulli 数 B_n を定める。この時 B_n は有理数で，具体的には

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = \frac{-1}{30},$$

$$B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = \frac{-1}{30},\ B_9 = 0,\ \cdots$$

等となる。B_n は特殊関数の展開等の係数として出てくる重要な数である。しかし B_n を具体的に計算するのは，n が大きくなると急激に大きくなり容易ではない。

さて B_n について次の結果が成り立つことが前世紀より知られていた。

B_n は，n が 1 より大なる奇数の時は 0 となる。よって

n を偶数とする。また p は奇素数であるとする。この時

定理 (von Staudt).
(i) $(p-1) \nmid n$ とする。この時 B_n は p-integral である。
(ii) $(p-1) \mid n$ なら pB_n が p-integral で $pB_n \equiv 1 \pmod p$ となる。

定理 (Kummer). $(p-1) \nmid n$ なら B_n/n も p-integral で

$$B_{n+p-1}/(n+p-1) \equiv B_n/n \pmod p$$

なる合同式が成り立つ。

Leopoldt は、これらの定理の意味を考えることから出発し、Kubota と協力して p 進L関数を得た。

$\zeta(s)$ を Riemann のゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ とする。この時

$$\zeta(1-n) = -B_n/n$$

が成り立つ。この点に注目して、Leopoldt は、上記の結果を次のように一般化した。

χ を modulo f で定義された Dirichlet 指標とし、

4

$$L(s;\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} \quad in \quad \mathbb{C}$$

で Dirichlet の L関数を定義する。$L(s;\chi)$は (i) $Re(s)>1$ なる範囲で収束し，Euler積をもつ，(ii) 全平面に有理型関数として拡張され，関数等式をもつ．等のことは良く知られている。これに対し Leopoldt は，

$$\sum_{a=1}^{f}\frac{\chi(a)t\,e^{at}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,\chi}\frac{t^n}{n!}$$

なる式により一般 Bernoulli 数 $B_{n,\chi}$ を定義し，それに対し von Staudt の定理や，Kummer の合同式に当るものを示し，

$$L(1-n;\chi)=-B_{n,\chi}/n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

なることを示した。

さて，pを任意の素数，$\mathbb{Q}_p$ を p進体とし，Lを$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大とする。この時 $\mathbb{Q}_p$ の p進付値$|\ |$は L の付値$|\ |$に一意的に拡張される。そこで Lの中で

$$exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad や \quad log(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

で定義される関数を考える。良く知られているように，$exp(z)$ は $|z|<|p^{1/(p-1)}|$ なる範囲で収束し，$log(z)$は $|z-1|<1$ なる範囲で収束し，関数等式

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

等が $\mathbb{C}$ の中での場合と同様に成り立つ。そこで「同様のことを $L(s;\chi)$ に対して行うと，Kummerの合同式が"p進L関数"を使って自然に説明できるのではないか？」とLeopoldtは考えた。この場合手がかりとして

$$B_n = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{p^a} \sum_{x=1}^{p^a} x^n \qquad \text{in } \mathbb{Q}_p$$

なるWittの公式があった。これを $B_{n,\chi}$ の場合に拡張すると，Lで $\mathbb{Q}_p$ の上に χ の値をつけ加えて出来る体とする時，

$$B_{n,\chi} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{fp^a} \sum_{x=1}^{fp^a} \chi(x)\, x^n \qquad \text{in } L$$

となる。ここで n を $\mathbb{Z}_p$ の元を動かしたいが

$$x^n = \exp\{n \log(x)\}$$

は，$q = p$ ($p \neq 2$ の時) $q = 4$ ($p = 2$ の時) とおくと

$$|x-1| \leqq |q| \text{ なら } |\log(x)| = |x-1| \leqq |q|$$

となりwell-definedだが，一般には $\log(x)$ や $\exp\{n \log(x)\}$ が定義できない。そこで次のように修正する。

整数 m に対し，$p \neq 2$ の時は，

$$\omega(m) = \lim_{a\to\infty} m^{p^a} \qquad \text{in } \mathbb{Q}_p$$

とおき，$p=2$ の時は，$\omega(m)$ は

$$\omega(m) = \begin{cases} 1 & m \equiv 1 \text{ modulo } 4 \text{ のとき} \\ -1 & m \equiv -1 \text{ modulo } 4 \text{ のとき} \\ 0 & m \equiv 0, 2 \text{ modulo } 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。この時 ω は $\mathbb{Z}_p$ に値を取る modulo q で定義された Dirichlet 指標となる。そこで $(m, p) = 1$ の時

$$\langle m \rangle = \omega(m)^{-1} m$$

とおくと，$\langle m \rangle$ は $|\langle m \rangle - 1| \leqq |q|$ を満す $\mathbb{Z}_p$ の元となる。

そこで Witt の公式において，x を $(x, p) = 1$ のみを動くようにし，しかも x を $\langle x \rangle$ でおき換えるため

$$\left(1 - \chi\omega^{-n}(p) p^n\right) B_{n, \chi\omega^{-n}} = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{f p^a} \sum_{\substack{1 \leqq x \leqq f p^a \\ (x, p) = 1}} \chi(x) \langle x \rangle^n$$

と変形する。但し $\chi\omega^{-n}$ は modulo fq で定義された Dirichlet 指標で，$(m, p) = 1$ の時

$$(\chi\omega^{-n})(m) = \chi(m)\, \omega(m)^{-n}$$

が成り立つものを一つ取る。そこで

$$L_p(s; \chi) = \frac{1}{s-1} \lim_{a \to \infty} \frac{1}{f p^a} \sum_{\substack{1 \leqq x \leqq f p^a \\ (x, p) = 1}} \chi(x) \exp\left\{(1-s) \log \langle x \rangle\right\}$$

とおく。この時

<u>定理</u>（Kubota-Leopoldt）．上の limit は $|s| < |q^{-1} p^{1/(p-1)}|$

なる時に収束し,

$$L_p(1-n;\chi)=(1-\chi\omega^{-n}(p)p^{1-n})L(1-n;\chi\omega^{-n})$$

が $n=1,2,3,\cdots$ に対して成り立つ。

この定理の後半は、すでに説明したところから明らかです。この定理(およびその精密化)を使って、Kummer の合同式およびその精密化は、p 進L関数 $L_p(s;\chi)$ の連続性として完全に説明されました。なお p 進L関数を Leopoldt が考え出した時には、上記の Kummer の合同式の他

N. C. Ankeny, E. Artin, S. Chowla, The class number of real quadratic number fields, Ann. Math., 56 (1952).

の中の類数を含む合同式も参考にしたそうです。

(注意). 以上は、Kubota-Leopoldt による original proof の紹介ですが、その他にも、p 進L関数を作るには、次のような方法があります。

(1) Leopoldt による Γ-transform の理論を使うもの.

(2)
$$L(s;\chi,X)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)X^n}{n^s} \quad \text{in } \mathbb{C}$$

は、$|X|<1$ の時 任意の複素数 s に対して収束し

$$L(s;\chi,X)\longrightarrow L(s;\chi) \quad (X\to 1 \text{ のとき})$$

がある意味で成り立つ。同様のことを

$$L_p(s;\chi,X) = \sum_{\substack{1 \leq n < \infty \\ (n,p)=1}} \frac{\chi(n)\, X^n}{\langle n \rangle^s} \qquad in\ L$$

に対して行うと $L_p(s;\chi)$ が得られる (Amice-Fresnel).

(3). L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, $b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots$ を L 中の点列とし

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} b_i$$

とおく。この時

<u>定理</u> (Mahler). $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow L$ なる連続関数で

$$f(n) = b_n$$

なるものが存在するための必要十分条件は. $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ なることである。さらにこの時

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}, \qquad \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

となる。

この定理を $b_n = (1-\chi\omega^{-n}(p)\,p^{1-n})\,L(1-n;\chi\omega^{-n})$ に適用する (Iwasawa)。

(4). 円分体の Stickelberger element を使う (Iwasawa)。

(5). k を 4 以上の偶数とし, Eisenstein 級数

$$E_k(z) = \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

を考える。この時 $E_k(z)$ は

$$E_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{t|n} t^{k-1}\Big)\exp(nz)$$

なる Fourier 展開をもつ。この定数項に

$$\zeta(k) = (-1)^{k/2-1}(2\pi)^k B_k / 2k!$$

が現れていることに注目し、p-adic modular forms の理論を使い k を $\mathbb{Z}_p^\times$ を動かすことにより p 進 L 関数を作る (Serre)。

(注意) F を総実な有限次代数体, M を F の総実な有限次アーベル拡大, χ を Gal(M/F) の character, $L(s;\chi)$ を対応する Artin L 関数とする。この様な L 関数に対し、p 進 L 関数が作れる (Serre, Coates, Deligne-Ribet, Cassou-Noguès)。

文献

1. T. Kubota, H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, I, J. reine angew. Math., 214/215 (1964), 328-339.
2. H. W. Leopoldt, Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen, Abh. Math. Sem. Hamburg, 22 (1958), 131-140.
3. K. Iwasawa, Lecture on p-adic L-functions, Ann. Math. Studies, 74 (1972).