数理解析研究所講究録
第 411 巻 1981 年 10-18

p進L関数入門 II
(p進L関数と円分体の類数公式)

名大 教養　　工藤 愛知

Kを有理数体Q上の$2m$次虚abel体，FをKの最大実部分体，h，d，RをそれぞれFの類数，判別式，単数規準とする．Kの類数は，hとある自然数h'の積としてhh'と表わされる．$L(s, \chi)$をχに対するDirichletのL関数，WをKに含まれる1の根全体の群，QをKの単数群における部分群WEの群指数，wをWの位数，χ^0を単位指標とする．そして，以下$\prod_\chi^+$，$\prod_\chi^-$では つねにKに対応するprimitive Dirichlet指標のうち 偶指標全体にわたる積，奇指標全体にわたる積を それぞれ表わすことにする． このとき，代数体の解析的類数公式より

$$(1) \qquad \frac{2^{m-1}hR}{\sqrt{d}} = \prod_{\chi \neq \chi^0}^{+} L(1, \chi),$$

$$(2) \qquad h' = Qw \prod_{\chi}^{-} \frac{1}{2} L(0, \chi)$$

が得られる．

自然数nに対して $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$, f_χ を χ の導手とおくと (1) はさらに

(3) $$Rh = \Pi_\infty,$$

$$\Pi_\infty = \prod_{\chi \neq \chi^0}^{+} \sum_{\pm a \bmod f_\chi} (-\bar{\chi}(a) \log |1 - \zeta_{f_\chi}^{a}|)$$

と表わされる. ここで, $\bar{\ }$ は複素共役, $\pm a \bmod f_\chi$ は mod f_χ の2つの剰余類 $a \bmod f_\chi$, $-a \bmod f_\chi$ から一方の代表元だけを選ぶことを意味する.

さて F の Galois群を $G = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$, 単数群を $E = \pm\langle \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-1} \rangle$ とすると,

$$R = |\det(\log|\sigma_i(\varepsilon_j)|)|_{1 \leq i, j \leq m-1} \neq 0$$

であるから, E の部分群 $H = \pm\langle \eta_1, \cdots, \eta_{m-1} \rangle$ について $(E : H) < \infty$ であることと,

$$R(H) = |\det(\log|\sigma_i(\eta_j)|)|_{1 \leq i, j \leq m-1} \neq 0$$

であることが同値であり, このとき,

(4) $$(E : H) R = R(H)$$

と表わせる. そこでまず, Π_∞ が適当な H をとると, 明確な因数を除いて $R(H)$ で表わされることを, 1つの場合について見てみよう (高木[9]).

$F = Q(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$, $p > 2$ とする. $\zeta = \zeta_p$ とおき, mod p

の１つの原始根rを奇数にとっておく．　そのとき，$\eta=\zeta^{-\frac{r-1}{2}}(1-\zeta^r)/(1-\zeta)$　はFの単数で，± 1とηの共役で生成される群Cの元はFの円単数と呼ばれる．

いま，σを$\zeta\to\zeta^r$から生じるGalois群Gの元とし，

$$\eta_i=\sigma^i(\eta),\qquad \lambda_i=\sigma^i((1-\zeta)(1-\zeta^{-1}))$$

とおくと，

$$\eta_i^2=\eta_i\overline{\eta_i}=\frac{1-\zeta^{r^{i+1}}}{1-\zeta^{r^i}}\cdot\frac{1-\zeta^{-r^{i+1}}}{1-\zeta^{-r^i}}=\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}$$

だから，

$$\det\begin{pmatrix}\log|\lambda_0| & \log|\lambda_1| & \cdots & \log|\lambda_{m-1}|\\ \log|\lambda_1| & \log|\lambda_2| & \cdots & \log|\lambda_0|\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \log|\lambda_{m-1}| & \log|\lambda_0| & \cdots & \log|\lambda_{m-2}|\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}\log|\lambda_0| & \log|\eta_0|^2 & \cdots & \log|\eta_{m-2}|^2\\ \log|\lambda_1| & \log|\eta_1|^2 & \cdots & \log|\eta_{m-1}|^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \log|\lambda_{m-1}| & \log|\eta_{m-1}|^2 & \cdots & \log|\eta_{m-3}|^2\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\log|\lambda_k|\cdot 2^{m-1}\cdot\det\left(\log|\sigma^{i+j-1}(\eta)|\right)_{1\leqq i,j\leqq m-1}$$

$$=\pm\sum_{k=0}^{m-1}\log|\lambda_k|\cdot 2^{m-1}R(C)$$

である．　一方，はじめの行列式は巡回行列式だから

$$\pm\sum_{k=0}^{m-1}\log|\lambda_k|\prod_{\chi\neq\chi^0}{}^{+}\sum_{i=0}^{m-1}\overline{\chi}(r^i)\log|\lambda_i|$$

$$= \pm \sum_{k=0}^{m-1} \log|\lambda_k| \cdot 2^{m-1} \cdot \Pi_\infty$$

に等しく，$\sum_{k=0}^{m-1} \log|\lambda_k| \neq 0$ だから

$$\Pi_\infty = R(C).$$

したがって，(3) と (4) により

$$h = (E : C)$$

が得られる．

一般にも，$F = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$，$n > 2$，$n \not\equiv 2 \bmod 4$ に対して $C = E \cap (1-\zeta_n)^{\mathbb{Z}[G]}$ が円単数の群と呼ばれる．

n が素数巾 p^α ならば，r を $\bmod p^\alpha$ の奇の原始根（$p=2$ のときは $r=5$）とすると，$n=p$ の場合と同様に C は ± 1 と $\eta = \zeta_n^{-\frac{r-1}{2}}(1-\zeta_n^r)/(1-\zeta_n)$ の共役で生成され $h = (E : C)$ が得られる．

また，n が素数巾でなければ，n の素因数の個数を $g (>1)$ とするとき $2^{2^{g-2}+1-g} h = (E : C)$ となることが最近知られている（Sinnott [8]）．

さて，実 abel 体の p 進類数公式を説明するために，Leopoldt によるもう1つの結果を紹介しよう．

実 abel 体 F に対応する primitive な Dirichlet 指標 $\chi \neq \chi^0$ に対して

$$\Theta_\chi = \prod_{\substack{\pm a \bmod f_\chi \\ \chi(a)=1}} (\zeta_{2f_\chi}^{a} - \zeta_{2f_\chi}^{-a}),$$

$$D_\chi = \frac{1}{(U_\chi : 1)} \sum_{\sigma \in U_\chi} \sigma \prod_{\substack{l \mid m_\chi \\ 素数}} (1 - \tau_\chi^{m_\chi / l})$$

とおく． ここに，U_χ は $\langle \chi \rangle$ に対応する巡回体 K_χ の G における不変部分群，τ_χ は $\tau_\chi \bmod U_\chi$ が $G(K_\chi/\mathbb{Q}) = G/U_\chi$ を生成するような G の元，m_χ は χ の位数である．

このとき，$\eta_\chi = \Theta_\chi^{D_\chi}$ は K_χ の単数で，H を ± 1 とすべての $\chi \neq \chi^0$ に対する η_χ の共役で生成される群とすると，abel 群 G の構造のみに依存する自然数 Q_G があって，

$$Q_G \prod_\infty = R(H).$$

したがって (3), (4) によって

$$Q_G h = (E : H)$$

が得られる（Leopoldt [4]）．

Leopoldt の p 進類数公式は，これによって 次のように導かれる．

$\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ から 有理 p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への 1 つの埋め込みを ϕ とし，

$$\log_p : \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$$

を $\log_p p = 0$ で，$|x-1|_p < 1$ では $\log_p x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ で与えられる $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ の homomorphism とする [3].

このとき，$E = \pm \langle \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-1} \rangle$ と $H = \pm \langle \eta_1, \cdots, \eta_{m-1} \rangle$

に対し　±1 なる因数を除いて定義される

$$R_p = \det(\log_p(\phi(\sigma_i(\varepsilon_j))))_{1\leqq i, j\leqq m-1},$$

$$R_p(H) = \det(\log_p(\phi(\sigma_i(\eta_j))))_{1\leqq i, j\leqq m-1}$$

をそれぞれ F, H の p 進単数規準と呼ぶ.

そして，指標 χ の値も ϕ によって $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元と考えることにより，

$$\Pi_p = \prod_{\chi\neq\chi^0}{}^{+} \sum_{\pm a \bmod f_\chi} (-\bar{\chi}(a)\log_p(1-\zeta_{f_\chi}^{a}))$$

とおけば，上に述べた $Q_G\Pi_\infty = R(H)$ の証明と平行に

$$Q_G\Pi_p = R_p(H)$$

が導かれる.　これと，$Q_G h = (E:H)$ をかきなおした

$$Q_G h R_p = R_p(H)$$

により，

$$(3)_p \qquad h R_p = \Pi_p$$

が得られる（Leopoldt [5]）.

ここで，$\Pi_p \neq 0$, $R_p(H) \neq 0$, $R_p \neq 0$ は互いに同値な条件で，F に対する Leopoldt 予想と呼ばれるものであるが，Brumer によって，この場合正しいことが知られている [2].

いま，$\tau(\chi) = \sum_{x \bmod f_\chi} \chi(x)\zeta_{f_\chi}^{x}$ とすれば，$(3)_p$ からただちに

$$\frac{2^{m-1} h R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\chi\neq\chi^0}{}^{+} 2\,\frac{\tau(\chi)}{f_\chi} \sum_{\pm a \bmod f_\chi} (-\bar{\chi}(a)\log_p(1-\zeta_{f_\chi}^{a}))$$

が得られる. この式の右辺の $\prod^{+}_{\chi\neq\chi^0}$ の中味 $\mathcal{L}_p(\chi)$ は

$$L(1,\chi)=2\frac{\tau(\chi)}{f_\chi}\sum_{\pm a \bmod f_\chi}(-\bar{\chi}(a)\log|1-\zeta_{f_\chi}^{a}|)$$

の p 進的類似と考えられるが, これが p 進 L 関数 $L_p(s,\chi)$ を用いて 実際

$$\mathcal{L}_p(\chi)=(1-\frac{\chi(p)}{p})^{-1}L_p(1,\chi)$$

と表わされることが, Γ-transform による p 進 L 関数の構成法にしたがって証明される [6], [3], [7], [10] etc..

以上を総合して, p 進類数公式は,

$$(1)_p \qquad \frac{2^{m-1}h R_p}{\sqrt{d}}=\prod^{+}_{\chi\neq\chi^0}(1-\frac{\chi(p)}{p})^{-1}L_p(1,\chi)$$

とかかれる. また, p 進 L 関数の性質からただちに,

$$(2)_p \qquad \prod^{-}_{\chi}(1-\chi(p))\cdot h' = Qw\prod^{-}_{\chi}\frac{1}{2}L_p(0,\chi\omega)$$

が得られる. ここに, ω は p と素な整数 x に対し $p>2$ ならば $\omega(x)=\lim_{\rho\to\infty}x^{p^\rho}$, $p=2$ ならば $\omega(x)=(-1)^{\frac{x-1}{2}}$ で定まる Dirichlet 指標である.

こうして得られた p 進類数公式は, cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大の類数公式などに広く応用されている.

また，2次体に対する Ankeny-Artin-Chowla の合同式にも，合理的な説明を与える．

すなわち，$h(d)$を実2次体$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$（dは判別式$\neq 8, 12$）の類数，$h(-3d)$を虚2次体$\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$の類数，εを$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$の基本単数>1，χを$\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$に対応する2次の指標とすると，

$$\frac{2h(d)\log_3 \varepsilon}{\sqrt{d}} = \left(1 - \frac{\chi\omega(3)}{3}\right)^{-1} L_3(1, \chi\omega),$$

$$(1-\chi(3))h(-3d) = L_3(0, \chi\omega)$$

が得られ，これからただちに Ankeny-Artin-Chowla 型の合同式

$$\frac{1-\chi(3)}{2} h(-3d) \equiv \left(1 - \frac{\chi\omega(3)}{3}\right) \frac{h(d)\log_3 \varepsilon}{\sqrt{d}} \pmod 3$$

が導かれる．

参考文献

[1] N.C. Ankeny - E. Artin and S. Chowla, The class-number of real quadratic number fields, Annals of Math. 56 (1952) 479-493.

[2] A. Brumer, On the units of algebraic number fields, Mathematika, 14 (1967), 121-124.

[3] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions, Princeton, 1972.

[4] H.-W. Leopoldt, Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, Abh. Dt. Akad. Wiss., Math. Nat. Kl., Jahrg. 1953 No. 2.

[5] ———, Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, J. reine angew. Math., 209 (1962) 54-71.

[6] ———, Eine p-adische Theorie der Zetawerte. II, Die p-adische Γ-Transformation, J. reine angew. Math., 274/275 (1975) 224-239.

[7] K. Shiratani, On certain values of p-adic L-functions, Mem. Fac. Science Kyushu Univ. 28 (1974) 59-82.

[8] W. Sinnott, On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field, Annals of Math. 108 (1978) 107-134.

[9] 高木貞治, 代数的整数論, 岩波 (1948).

[10] L. C. Washington, The calculation of $L_p(1, \chi)$, J. Number Theory 9 (1977) 175-178.