

格子状結合された発振器群における多重モード振動  
— 平均ポテンシャルを用いた解析 —

京都大学工学部 倉光正己 高瀬冬人

1. まえがき

多自由度発振器の研究は van der Pol<sup>[1]</sup> 以来数多く行なわれ、様々な興味深い現象が知られているが、それらの結果の一部を昨年紹介した<sup>[2]</sup>。前報で考察したシステムは、その対象の違いから次の2種類に大別できる。一方は電子回路における多自由度発振器であり、他方は能動的な単位素子として van der Pol の方程式(発振器)を考え、これらの集合体を用いて生体内の現象を模擬しようとする数式的モデルである。これらのシステムを記述する微分方程式は、いずれも van der Pol の方程式を多自由度に拡張したものであるから、この系を弱非線形(almost linear)、少損失(almost lossless)の系と考えることにより、平均化法あるいはこれと等価な近似解法を用いて解析することが、原理的には可能となる。しかし、系の自由度が大きくなると、これらの計算は急速に煩雑となり、実用上平均化法の適用限界が存在する。このような事情

もあって、多自由度発振器について未だ十分解明されていない現象も多く、解析方法(方針)にも検討の余地があることを前報で指摘した。<sup>[2]</sup>

さて、上述のような、対象のモデルから微分方程式を導きこれを解く、という一連の手続きについて検討してみると、次の事実に気づく。すなわち、対象としている電気回路と生体系では、それらを支配する法則はまったく異なっている。前者のシステムでは「キルヒホフの法則」を満たさねばならず、この条件(制約)を用いて微分方程式が得られる。一方、後者のシステムでは、電気回路のような厳密な法則は知られておらず、そこでは仮説的な(あるいは勝手な)結合形態およびパラメータ等が導入され、その結果、電気回路より制約の緩い(あるいは一般的な)ある微分方程式系が得られる。これらの微分方程式は極めて異なる条件の下で得られたものではあるが、形式的には類似の拡張された van der Pol 方程式系となり、まったく同一の手法(例えば平均化法)によって解析することが出来る。(従来は、このように異種のモデルから類似の式が得られることがあるという点が、むしろ強調されて来た。) 換言すれば、電気回路を記述する方程式であること(キルヒホフの法則を満たすべきこと)という制約条件は、微分方程式の誘導の際に用いられただけで、式の

解析の段階ではまったく考慮されていないことになる。

以上の考察より，対象を電気回路における van der Pol 型システムに限定し，キルヒホフの法則を満たさねばならないという制約条件を考慮に入れるならば，この回路によりふさわしい解析の手法が得られるのではないかという考之が生じる。

本報告では，このような考之方に基づいて筆者等の得た多自由度発振器の新しい解法と，この解法を格子状結合された発振器群に適用して得られた結果について述べる。

## 2. Brayton-Moser の理論<sup>[3]</sup>

Brayton と Moser は， $n$ 端子素子（ $K$ 個のコイル， $J$ 個の容量，いくつかの抵抗）から成る RLC 回路を記述する微分方程式が，混合ポテンシャル（Mixed Potential）と名づけられたスカラ関数  $P(\mathbf{i}, \mathbf{v})$  を後述のように構成すれば， $P$  を用いて形式的に次式のように与えられることを示した。

$$\begin{aligned} L_k(i_k) \frac{di_k}{dt} &= \frac{\partial P(\mathbf{i}, \mathbf{v})}{\partial i_k} \quad (k=1, \dots, K) \\ C_j(v_j) \frac{dv_j}{dt} &= - \frac{\partial P(\mathbf{i}, \mathbf{v})}{\partial v_j} \quad (j=1, \dots, J) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k), \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_j)$$

ここに， $i_k$ ， $v_j$  はそれぞれコイル  $L_k$  を流れる電流，容量  $C_j$  の端子電圧であり，回路は「完全」とする。「完全」

でない回路は適当な素子を付け加えることにより完全にできる。さて、混合ポテンシャル $R$ は次式で与えられる。

$$R(i, v) = F(i) - G(v) + H(i, v) \quad (2)$$

ここに、 $F(i)$ ,  $G(v)$ ,  $H(i, v)$  は、それぞれ回路の電流ポテンシャル、電圧ポテンシャルおよびループポテンシャルと呼ばれる。

$v$  と  $i$  の抵抗素子の電流ポテンシャル、電圧ポテンシャルは、特性曲線に沿った次の積分で定義する。

$$\begin{aligned} F(i) &= \int v(i) di \\ G(v) &= \int i(v) dv \end{aligned} \quad (3)$$

これは第1図で斜線部の面積にあたり、電力の次元をもつ。

例えば、通常の線形抵抗に

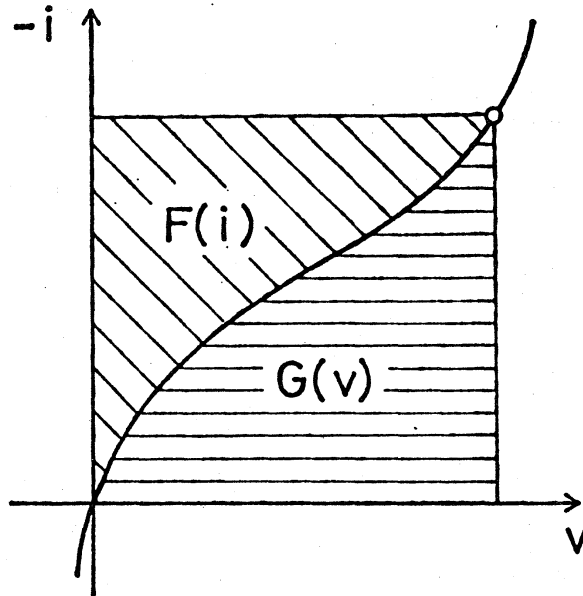
$$v = -Ri$$

(原論文に従って抵抗の電圧、電流を同方向にとる)

であるから

$$\begin{aligned} F(i) &= \int v di = \int (-Ri) di \\ &= -\frac{1}{2} Ri^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(v) &= \int i dv = \int \left(-\frac{1}{R}v\right) dv \\ &= -\frac{1}{2R} v^2 \end{aligned} \quad (4)$$



第1図 電流ポテンシャル  $F(i)$  と電圧ポテンシャル  $G(v)$

となり消費電力の符号を変えたものになる。Lに直列なすべての抵抗 ( $B_i$ と呼ぶ) についてその電流ポテンシャルの和をとり, Cに並列なすべてのコンダクタンス ( $B_u$ と呼ぶ) について電圧ポテンシャルの和をとれば, 回路の電流ポテンシャル  $F(i)$ , 電圧ポテンシャル  $G(V)$  が, それぞれ得られる。

ループポテンシャル  $H(i, V)$  は, コイルと容量の接続状態から, 一定の手順で計算することのできる値で, 次のような形となる。

$$H(i, V) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \Gamma_{kj} v_j i_k \quad (5)$$

ここに  $\Gamma_{kj}$  は 0, +1, -1 の中のいずれかの値をとる。

以上のように, 唯一の関数  $H(i, V)$  が計算できれば, これを用いて系を記述する微分方程式が得られるというのがこの理論の特徴であり, この理論は究極的には, キルヒホフの法則を満たさねばならないという条件, すなわち電気回路であるという事実 に 依拠している。

### 3. 平均ポテンシャルと平均化方程式

我々の当面の対象は負性抵抗発振器であるから, 電気回路を一般的に記述する Brayton-Moser の式 (1) に対して, 次のような条件をつけ加えた場合を考える。① L, C は線形である。② L に直列な抵抗 ( $B_i$ ), C に並列なコンダクタンス ( $B_u$ )

はすべて小さい, すなわち,  $F(i), G(v)$  は小さい。これらの条件の下では, 系は弱非線形 (almost linear) 少損失 (almost lossless) と考えることができ, (1) 式に平均化法を適用することができる。

平均化法の手順に従えば, まず (1) 式において  $F(i) = G(v) = 0$  とおいた generating system を考える。

$$\begin{aligned} L_k \frac{di_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial i_k} = \sum_{j=1}^J \Gamma_{kj} v_j \quad (k=1, \dots, K) \\ C_j \frac{dv_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial v_j} = -\sum_{k=1}^K \Gamma_{kj} i_k \quad (j=1, \dots, J) \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式は無損失線形 LC 回路の方程式であり, 解は次式となる。

$$\begin{aligned} i_k(t) &= \sum_{m=1}^M d_{mk} r_m \cos(\omega_m t + \theta_m) \\ v_j(t) &= \sum_{m=1}^M d'_{mj} r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \end{aligned} \quad (7)$$

ここに  $r_m, \theta_m$  は任意定数,  $\omega_m$  は系の固有周波数 (モード周波数),  $M$  はモードの総数である。  $d_{mk}, d'_{mj}$  は次式を満たす。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K L_k d_{mk} d_{ek} &= \sum_{j=1}^J C_j d'_{mj} d'_{ej} = \delta_{ml} I_m \\ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \Gamma_{kj} d_{mk} d'_{ej} &= \delta_{ml} \omega_m I_m \end{aligned} \quad (8)$$

ただし,  $\delta_{ml}$  はクロネッカーの記号である。

$F(i) \neq 0, G(v) \neq 0$  のとき, (1) 式の解を次の形に仮定する。

$$\begin{aligned} i_k(t) &= \sum_{m=1}^M d_{mk} r_m(t) \cos \varphi_m(t) \quad (k=1, \dots, K) \\ v_j(t) &= \sum_{m=1}^M d'_{mj} r_m(t) \sin \varphi_m(t) \quad (j=1, \dots, J) \end{aligned} \quad (9)$$

モード周波数  $\omega_m$  の間に, 共振の生じるような特殊な関係が

存在しない場合, すなわち非共振の場合を考える。このとき,  
(9)式の周波数は次のように仮定できる。

$$\varphi_m(t) = \omega_m t + \theta_m(t) \quad (10)$$

(9), (10)式より,  $i_k, v_k$  の時間微分は次式となる。

$$\dot{i}_k = \sum_{m=1}^M d m_k (\dot{r}_m \cos \varphi_m - r_m \dot{\varphi}_m \sin \varphi_m) \quad (11)$$

$$\dot{v}_j = \sum_{m=1}^M d m_j (\dot{r}_m \sin \varphi_m + r_m \dot{\varphi}_m \cos \varphi_m) \quad (\cdot = d/dt)$$

(2), (8), (9), (10), (11) 式を(1)式に代入し,  $\dot{r}_m, \dot{\theta}_m$  について整理すると次式を得る。[式の誘導は文献(4)参照]

$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= \frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial r_l} [F(r, \theta, t) + G(r, \theta, t)] \\ r_l^2 \dot{\theta}_l &= \frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial \theta_l} [F(r, \theta, t) + G(r, \theta, t)] \end{aligned} \quad (l=1, \dots, M) \quad (12)$$

ここに(12)式右辺の  $F(r, \theta, t), G(r, \theta, t)$  は, (2)式の  $F(\ddot{q}), G(\dot{q})$  に(9), (10)式を代入したものである。  $F, G$  は仮定により微小項であるから, (12)式に平均化法を適用し, 近似式として平均化方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial r_l} (F+G) \right] dt \equiv f_l(r, \theta) \\ r_l^2 \dot{\theta}_l &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial \theta_l} (F+G) \right] dt \equiv g_l(r, \theta) \end{aligned} \quad (l=1, \dots, M) \quad (13)$$

ここで, 「平均ポテンシャル」と名づける次のスカラー関数  $U$  を導入する。

$$\begin{aligned} U(r, \theta) &= U(r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M) \\ &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [F(r, \theta, t) + G(r, \theta, t)] dt \\ &= -[F+G] \end{aligned} \quad (14)$$

これは、抵抗による系全体の損失分の時間平均を表わす。非共振の場合には、平均化の結果、 $\theta_m$  を含む項はすべて消えるから、 $\bar{U}$  は  $r$  のみの関数となる。(13)式において微分と積分の順序を交換し、(14)式を用いれば、平均化方程式(13)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial \bar{U}(r)}{\partial r_l} \equiv f_l(r) \\ r_l^2 \dot{\theta}_l &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial \bar{U}(r)}{\partial \theta_l} \equiv 0 \end{aligned} \quad (l=1, \dots, M) \quad (15)$$

(15)式の  $r_l$  に関する式は力学系において勾配系と呼ばれる特殊な系であって、次のように、平均ポテンシャル  $\bar{U}$  が解に沿って単調に減少することがわかる。

$$\frac{d\bar{U}(r)}{dt} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \bar{U}}{\partial r_m} \frac{dr_m}{dt} = -\sum_{m=1}^M I_m (\dot{r}_m)^2 \leq 0 \quad (16)$$

すなわち、次の結果が成り立つ。

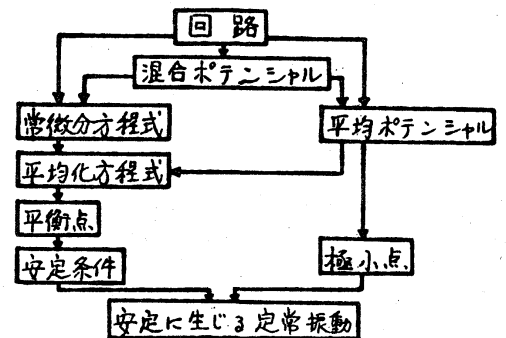
平均ポテンシャル  $\bar{U}$  の孤立特異点は、系の漸近安定な平衡点であり、また、逆も成立する。

解の仮定(9)式を考慮すると、系に生じる安定な振動を求めるといふ問題は、平均ポテンシャルを構成し、その極小点を求めるといふ問題に帰着する。まえがきに述べたように、従来はキルヒホフの法則を用いて得られた(1)式を具体的な形に書き下し(多くの場合、2階の方程式に整理して)、その方程式に平均化法を適用し、(15)式に相当する平均化方程式を求めていた。しかし、その右辺が(15)式のように、ひとつの関数



□を用いて表現できるという事実に気づかなかつたため、この平均化方程式を求めると操作およびその式の解析は、自由度  $M$  の増加と共に、急速に見通しの悪い煩雑なものになるのが実情であった。\*2図に従来の平均化法を用いる解析法(左側)と平均ポテンシャルを用いる方法(右側)の流れを示し比較した。平均ポテンシャルを用いる方法の利点は次のようにまとめられる。

- (1) 「系に生じる振動は、系全体の損失分の時間平均が小さくなる方向に変化する」という物理的な意味が明らかになり、系の状態の全体像が直観的に理解しやすくなる。
- (2) 安定平衡点を求める計算法として、平均ポテンシャルの極小点を求める方が従来の方法より簡単である。
- (3) 平均化方程式の誘導法としても平均ポテンシャルから導びく方が簡単である。
- (4) 関数の極小点の性質を用いて次節で述べるような一般的性質が導ける。



\*2図 2つの解析手順の関係

#### 4. 3次特性の抵抗をもつ発振器の基本的性質

前節までの結果は,  $B_i, B_v$  に属する非線形抵抗素子の特性にかかわらず一般的な結果である。以下では, van der Pol 方程式のように, 負性抵抗特性が対称な3次多項式で表わされる場合について考察する。

##### 4.1 2次形式の極値問題

$B_i, B_v$  に属する抵抗の特性が次式で表わされるものとする。

$$-v_\mu = f_\mu(i_\mu) = \alpha_\mu i_\mu + \beta_\mu i_\mu^3 \quad (\mu = 1, \dots, N_i) \quad (17)$$

$$-i_\mu = g_\mu(v_\mu) = \alpha_\mu v_\mu + \beta_\mu v_\mu^3 \quad (\mu = N_i+1, \dots, N_i+N_v=N)$$

各素子の電流あるいは電圧ポテンシャルは次式で与えられる。

$$F(i_\mu) = \int v_\mu di_\mu = -\frac{1}{2} \alpha_\mu i_\mu^2 - \frac{1}{4} \beta_\mu i_\mu^4 \quad (\mu = 1, \dots, N_i) \quad (18)$$

$$G(v_\mu) = \int i_\mu dv_\mu = -\frac{1}{2} \alpha_\mu v_\mu^2 - \frac{1}{4} \beta_\mu v_\mu^4 \quad (\mu = N_i+1, \dots, N)$$

各素子に加わる電流  $i_\mu$  および電圧  $v_\mu$  は, (9) 式の状態変数  $i_k, v_j$  の一次結合として表わされるから, 次式のように書ける。

$$i_\mu = \sum_{m=1}^M P_{m\mu} r_m(t) \cos[n_m t + \theta_m(t)] \quad (\mu = 1, \dots, N_i) \quad (19)$$

$$v_\mu = \sum_{m=1}^M P_{m\mu} r_m(t) \sin[n_m t + \theta_m(t)] \quad (\mu = N_i+1, \dots, N)$$

こゝに  $P_{m\mu}$  は  $d_m k$ ,  $d_m k$  の一次結合である。よって  $B_i$  の素子一個の平均電流ポテンシャル  $\overline{U}_\mu$  は, 次式のように  $R_m (= r_m^2 \geq 0)$  に関する2次形式となる。

$$\begin{aligned} \overline{U}_\mu &= -\overline{F(i_\mu)} = \frac{1}{2} \alpha_\mu \overline{i_\mu^2} + \frac{1}{4} \beta_\mu \overline{i_\mu^4} \\ &= \frac{1}{4} \alpha_\mu \sum_{m=1}^M P_{m\mu}^2 R_m + \frac{3}{32} \beta_\mu \left\{ \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M (2 - \delta_{mk}) P_{m\mu}^2 P_{k\mu}^2 R_m R_k \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

ただし  $\delta_{ml}$  はクロネッカーの記号である。  $B_\nu$  に属する素子の平均電圧ポテンシャルも (20) 式と同様の形となるから、系全体の平均ポテンシャル  $U$  は次のようになる。

$$U = \sum_{\mu=1}^N U_\mu = \sum_{m=1}^M b_m R_m + \sum_{m=1}^M \sum_{\ell=1}^M a_{m\ell} R_m R_\ell$$

ただし  $b_m = \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{4} \alpha_\mu P_{m\mu}^2 \quad (m=1, \dots, M)$  (21)

$$a_{m\ell} = \sum_{\mu=1}^N \frac{3}{32} \beta_\mu (2 - \delta_{m\ell}) P_{m\mu}^2 P_{\ell\mu}^2 \quad (m, \ell=1, \dots, M)$$

あるいは、ベクトルを用いて次のように書ける。

$$U = {}^t b R + {}^t R A R$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_M \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{pmatrix} : \text{対称行列}$$

(22)

結局、安定な非同期多重モード振動を求める問題は、次の問題に帰着する。

[2次形式の極値問題]

$R_1 \geq 0, \dots, R_M \geq 0$  の制約の下で、2次形式 (22) 式を極小とする  $R$  を求めよ。

この問題に関しては次の結果が成立する。

(22) 式は、一般に  $2^M$  個の平衡点をもつ。必要ならば、変数の入れ換えをして、 $m$  重モード振動に対応する平衡点  $R^*$

$$R_1^* > 0, R_2^* > 0, \dots, R_m^* > 0, R_{m+1}^* = 0, \dots, R_M^* = 0 \quad (23)$$

が問題の極小解とする。このとき、次の3条件が成立する。

$$(i) \quad \left. \frac{\partial U}{\partial R_j} \right|_{R=R^*} = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (24)$$

$$(ii) \left. \frac{\partial U}{\partial R_j} \right|_{R=R^*} \geq 0 \quad (j = m+1, \dots, M) \quad (25)$$

(iii) A から  $R_1, \dots, R_m$  に対応する行と列を取り出した  $m \times m$  小行列  $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$  は半正定値である。

逆に、次の条件が成立すれば  $R^*$  は極小解である。

$$(i)' \left. \frac{\partial U}{\partial R_j} \right|_{R=R^*} = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (26)$$

$$(ii)' \left. \frac{\partial U}{\partial R_j} \right|_{R=R^*} > 0 \quad (j = m+1, \dots, M) \quad (27)$$

(iii)'  $A^*$  が正定値である。

以下では、(i)' ~ (iii)' を満たすような極小解のみを考える。

## 4.2 基本的性質

「2次形式の極値問題」の解の性質を用いて、非同期多重モード振動の発生の方に関する3性質を示す。<sup>[4]</sup> (証明略)

ある  $m$  重モード振動を構成する  $m$  個の周波数成分の中に含まれる、 $m'$  個の周波数 ( $m' < m$ ) から成る  $m'$  重モード振動を、もとの  $m$  重モード振動の部分モード振動と呼ぶことにする。

### [I] 部分モード振動の禁止則

ある多重モード振動と、その部分モード振動が、共に安定となることはない。

したがって、 $M$  自由度系において、 $M$  個の単一モード振動がすべて安定ならば、いかなる多重 (2重以上) モード振動

もすべて不安定である。また、すべての周波数成分を含む  $M$  重モード振動が安定ならば、安定な振動はこれひとつだけである。

### [II] 多重モード振動の上限則

(22) 式の対称行列  $A$  の正固有値の個数を  $N_1$ 、正の飽和要素、すなわち、(17) 式において  $\beta\mu > 0$  を満たす素子の個数を  $N_2$  とする。 $m$  重モード振動が安定に生じるならば、次式が成り立つ。

$$m \leq N_1 \leq N_2 \quad (28)$$

この法則は、2つの線形共振回路とひとつの負性抵抗（3乗特性）で構成した2自由度発振器に、2重モード振動が生じないといふ van der Pol の結果<sup>[1]</sup> また、この回路で共振回路に非線形抵抗（受動素子）をつけ加えると多重モード振動生じるといふ結果<sup>[6]</sup> を一般化したものとなっている。

### [III] 2つのモードの共存条件

2つのモード  $l$  および  $l'$  が、安定な  $m$  重モード振動 ( $M \geq m \geq 2$ ) の周波数成分として含まれるためには、(22) 式の対称行列  $A$  の  $l$ 、 $l'$  に対する小行列が正定値でなければならぬ。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{ll} & a_{ll'} \\ a_{ll'} & a_{l'l} \end{vmatrix} = a_{ll} a_{l'l} - (a_{ll'})^2 > 0 \quad (29)$$

この条件は、2つのモードの「非線形抵抗による飽和の程度」があまり整合しないことを要求している。

前節(i)~(iii)'の極小条件および上記の3性質等を用いて、(22)式のすべての極小値を求めるアルゴリズムを構成できる。このアルゴリズムを用いて、計算機による極小値の数値計算が能率的に実行できることを確かめた。これは従来の平均化法を用いる解析手順に比べ非常に簡単であり、有用である。

#### 5. 格子状結合された発振器群における多重モード振動<sup>[5]</sup>

大規模に配列された発振器群に生じる振動モードに関しては、いくつかの研究がある。例えば遠藤氏等は中3図のような、等しい van der Pol 発振器をコイルで格子状結合した回路を、平均化法を用いて解析した(ただし  $L_x = L_y$  の場合)。その結果、単一モードおよび2重モード振動が安定に発生していることを示したが、それ以上の多重モード振動については計算の複雑さのため一般的な結果を得ていない。本節では、多自由度系の例として中3図の回路(一般に  $L_x \neq L_y$ )を取り上げ、前節までに述べた平均ポテンシアルを用いた解析結果を示す。発振器はすべて等しく、中3図に示す能動素子(非線形抵抗)の特性は、次の3次式で表わされるものとする。

$$I_{ij} = -g_1 V_{ij} + g_3 V_{ij}^3 \quad g_1, g_3 > 0 \quad (30)$$

図の記号を用いれば、系を記述する方程式として次式を得る。

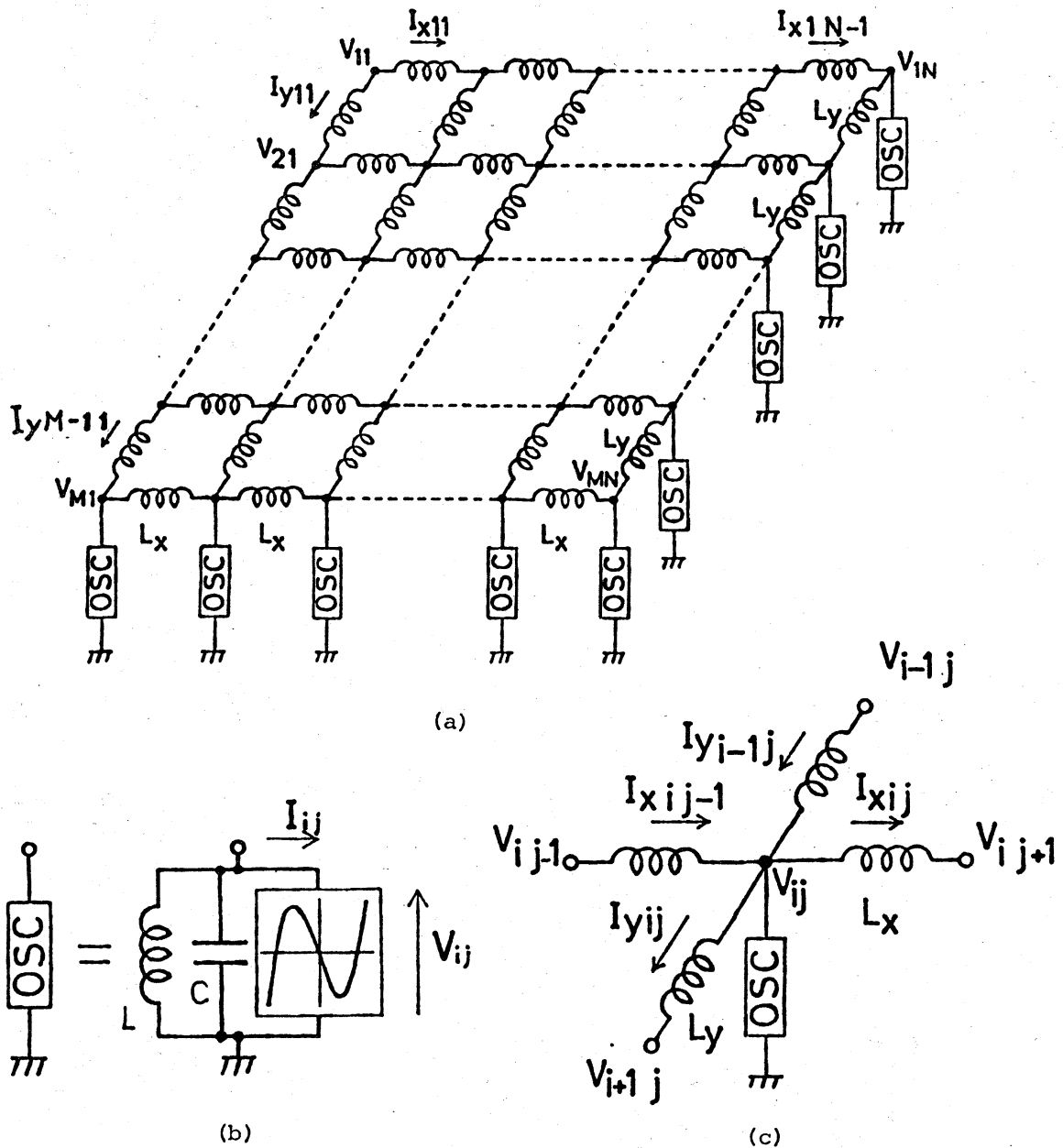
$$L_x \frac{dI_{xij}}{dt} = V_{ij} - V_{ij+1}$$

$$L_y \frac{dI_{yij}}{dt} = V_{ij} - V_{i+1j} \quad (31)$$

$$C \frac{dV_{ij}}{dt} + \frac{1}{L} \int V_{ij} dt + I_{ij} = I_{xij-1} - I_{xij} + I_{yi-j} - I_{yij}$$

$$(i=1, \dots, M, j=1, \dots, N)$$

非線形抵抗, すなわち  $g_1, g_3$  が小さい場合を考える。



第3図 格子状に結合された発振器群

まず、非線形抵抗をとりはざした系、すなわち、(31)式で  $I_{ij}=0$  とおいた generating system を考える。この式より  $I_{xij}, I_{yij}$  を消去して次式を得る。

$$C\ddot{V}_{ij} + \left(\frac{1}{L} + \frac{2}{L_x} + \frac{2}{L_y}\right) V_{ij} = \frac{1}{L_x} (V_{ij-1} + V_{ij+1}) + \frac{1}{L_y} (V_{i-1j} + V_{i+1j})$$

ここに  $V_{0j} = V_{ij}, V_{M+1j} = V_{Mj}$  (32)

$$V_{i0} = V_{i1}, V_{iN+1} = V_{iN}, \quad \cdot = \frac{d}{dt}$$

(32)式の解として、次式を得る。

$$V_{ij}(t) = \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N v_{lk} \cdot mP_{il} \cdot nP_{jk} \sin[\omega_{lk}t + \theta_{lk}] \quad (33)$$

ただし、 $v_{lk}, \theta_{lk}$  は任意定数であり、次式が成り立つ。

$$mP_{i1} = 1, \quad mP_{il} = \sqrt{2} \cos \frac{(2i-1)(l-1)}{2M} \pi, \quad (l=2, \dots, M)$$

$$nP_{j1} = 1, \quad nP_{jk} = \sqrt{2} \cos \frac{(2j-1)(k-1)}{2M} \pi, \quad (k=2, \dots, M) \quad (34)$$

$$\omega_{lk}^2 = \frac{1}{LC} + \frac{2}{L_x C} \left(1 - \cos \frac{l-1}{N} \pi\right) + \frac{2}{L_y C} \left(1 - \cos \frac{l-1}{M} \pi\right)$$

$L_x, L_y$  を適当に選んで、周波数  $\omega_{lk}$  がすべて異なる場合を考える。複数の周波数が一致する縮退の場合には、同期現象の生ずる可能性があるが、ここでは触れない。<sup>[5]</sup> さて、(31)式の解は、次のように仮定できる。

$$V_{ij}(t) = \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N v_{lk}(t) \cdot mP_{il} \cdot nP_{jk} \sin[\omega_{lk}t + \theta_{lk}(t)] \quad (35)$$

(35)式の形で与えられる  $M \times N$  個のモードのどのような組み合わせが多重モード振動として安定となるかが問題である。(35)式を用いて各能動素子の電圧ポテンシャルを求め、それらの



和から系全体の平均ポテンシャルを求めると次式となる。

$$U = \frac{g_1^2}{12g_3} MN \left\{ -\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N R_{lk} + \sum_{l \neq p}^M \sum_{k \neq q}^N \frac{2 - \delta_{lp} \delta_{kq}}{8} I_{lp}^M I_{kq}^N R_{lk} R_{pq} \right\}$$

ただし  $R_{lk} = \frac{3g_3}{g_1} r_{lk}^2$  (36)

$$I_{lp}^M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{il}^2 \cdot P_{ip}^2, \quad I_{kq}^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_{jk}^2 \cdot P_{jq}^2$$

$I_{lp}^M$  の値は添字  $l, p$  が定めれば計算できて、簡単な値となる。

4.2 節で述べた「2つのモードの共存条件」等の性質を用いて検討すると、系に安定に発生しうる振動をすべて解析的に求めることができる。結果のみ示すと次のようになる。ただし、 $(p, q)$  で周波数  $\omega_{pq}$  の振動モードを表わし、 $(, )$  &  $(, )$  で2重モード振動を示す。また、次の記号を用いる。

$$\begin{aligned} i, i' &\in \left\{ 1, 1 + \frac{M}{2} \right\}, & j, j' &\in \left\{ 1, 1 + \frac{N}{2} \right\} \\ l, l' &\notin \left\{ 1, 1 + \frac{M}{2} \right\} \quad (l \neq l'), & k, k' &\notin \left\{ 1, 1 + \frac{N}{2} \right\} \quad (k \neq k') \\ \tilde{l} &= M + 2 - l, & \tilde{k} &= N + 2 - k \end{aligned} \quad (37)$$

(1) 単一モード振動  $(i, j)$

(2) 2重モード振動  $\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad (i, k) \& (i, \tilde{k}), \quad (l, j) \& (\tilde{l}, j') \\ (ii) \quad (l, k) \& (\tilde{l}, \tilde{k}) \end{array} \right.$  (38)

(3) 3重モード振動  $(i, k) \& (l, \tilde{k}) \& (\tilde{l}, \tilde{k}), \quad (l, j) \& (\tilde{l}, k) \& (\tilde{l}, \tilde{k})$

(4) 4重モード振動  $\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \left\{ \begin{array}{l} (l, k) \& (l, \tilde{k}) \& (\tilde{l}, k') \& (\tilde{l}, \tilde{k}') \\ (l, k) \& (\tilde{l}, k) \& (l', \tilde{k}) \& (\tilde{l}', \tilde{k}) \end{array} \right. \\ (ii) \quad (l, k) \& (\tilde{l}, k') \& (l', \tilde{k}) \& (\tilde{l}', \tilde{k}') \end{array} \right.$

各振動の振幅値も定まることが省略した。また、5重モード以上の多重モード振動はすべて不安定である。解(35)式を形から、上述の結果は次のように直観的に理解できる。モード $(i, j)$ に対しては、次式が成り立つ。

$$|MP_{\phi i} \cdot NP_{\phi j}| = 1, \quad r_{ij} = 2 \quad (39)$$

すなわち、周波数 $\omega_{ij}$ をもつモードに対して、各発振器は、その位置する場所【 $\phi, \delta$ 】にかかわらず、すべて結合前と同じ、同一の振幅 $2$ で振動する。このような振動に対しては、各発振素子の平均ポテンシャルが極小値となり、その結果系全体の平均ポテンシャルも極小値となるから、安定な振動となる。(周波数は $i=j=1$ の場合を除き、結合前とは異なる。)

一方、2重モード振動、例えば、 $(1, k)$ と $(1, \hat{k})$ を考えると、2つのモードは共に、発振器の位置【 $\phi, \delta$ 】によって振幅は異なるが、次の関係が成り立つ。

$$(MP_{\phi 1} \cdot NP_{\phi k})^2 + (MP_{\phi 1} \cdot NP_{\phi \hat{k}})^2 = 1 \quad (40)$$

すなわち、任意の発振器の位置において、一つのモードの振幅が大きければ他方は小さい。このように、すべての発振器で互に振幅の大きさを補ない合うような特別の組合わせの2つのモードが、平均ポテンシャルを極小とし、安定な2重モード振動として現われる。同様にして、3つあるいは4つのモードが互に補いあって、すべての負性抵抗に平均的にほぼ均等

の電圧がかかると、これらのモードが3重あるいは4重モード振動として安定に生じることになる。

このような原理は、能動素子の特性が互に異なる場合（一部含まれない場合）、発振器の結合形態が異なる場合等についても適用できるから、具体的計算に先立って、安定な振動のおおよその見当をつけることができる。<sup>[7]</sup>

## 6. まとめ

系の損失分の時間平均である平均ポテンシャルの極小値として、系の安定な非同期多重モード振動を求める方法を示した。この方法を用いて格子状結合された発振器群の解析を行ない、この系に4重モードまでの多重モード振動が生じうることを示した。

この方法は、解析方法として計算が簡単であると同時に、ある振動が安定となることに対する物理的説明、直観的理解が容易であることに特徴がある。

非線形微分方程式の解析は、弱非線形系に限っても一般的に有効な方法は十分には確立されていない現在、対象を限定する（例えば電気回路に）ことによって、その系を記述する方程式の特徴を見出し、それに合った解析法を考えるという方向を、今後検討する必要があると考える。

最後に、本研究に対し発表の機会を手こ頂いた京大上田  
 暁亮助教授，御討論頂いた西川稔一教授，御協力頂いた元本  
 学学生田所邦彦氏に深く感謝する。

## 文 献

- [1] Pol, B. van der: On Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with Two Degrees of Freedom, *Phil. Mag.*, 43: 700-719 (1922).
- [2] 倉光: 多自由度発振器における多重モード振動と相互同期現象, 京都大学数理解析研講究録 370 (1979.12).
- [3] Brayton, R. K. and Moser, J. K. : A theory of nonlinear networks, I, II, *Quart. Appl. Math.*, 22: 1-33, 81-104 (1964).
- [4] 倉光, 高瀬: 平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析法, 電子通信学会研究会資料 NLP79-38 (1980).
- [5] 倉光, 高瀬, 田所: 平均ポテンシャルを用いた格子状結合された発振器群の解析, 電子通信学会研究会資料 NLP80-2 (1980).
- [6] 倉光, 笠原: 非線形共振回路をもつ発振器における多重モード振動, 電子通信学会研究会資料 NLP78-8 (1978).
- [7] 倉光, 高瀬: 能動素子を部分的に入れたはしこ状発振器の平均ポテンシャルによる解析, 電子通信学会研究会資料, NLP80-20 (1980).