数理解析研究所講究録
第 413 巻 1981 年 30-38

Minimal Flow の Homological Mixing Property

慶応大・工・石井一平

§1. minimal flow の弱混合性と固有函数

M は閉多様体とし、φ_t は M 上の minimal flow とする。ここに、minimal flow とは、すべての軌道が相空間上稠密であるような flow のことである。$C(M)$ によって、M 上の S^1-値連続函数の集合を表わす。($S^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$)

$f\in C(M)$ に対し、$\lambda\in\mathbb{R}$ が存在し、$f(\varphi_t(m))=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,t)\cdot f(m)$ が任意の $m\in M$, $t\in\mathbb{R}$ についてなりたつとき、f は φ_t の固有函数であるという。

また、φ_t が次の性質 (※) をもつとき、φ_t は (位相的に) 弱混合的であるといわれる。

(※) 任意の三つの開集合 U_0, U_1, U_2 に対し、ある $t\in\mathbb{R}$ が存在し、$\varphi_t(U_0)\cap U_1\neq\phi$, $\varphi_t(U_0)\cap U_2\neq\phi$ となる。

[注] 弱混合性は flow の minimality とは独立な性質である。

minimal flow の弱混合性と固有函数とを関係づける次の結果が知られている。

<u>Theorem</u>（[1]）．φ_t が minimal flow であるとき、次の二つの条件は同値である。

(i) φ_t の固有函数は定数に限る。

(ii) φ_t は弱混合的である。

f を φ_t の定数でない固有函数とすると、$K=\{f=\text{const.}\}$ は φ_t の cross-section になることは容易にわかる。従って、minimal flow については上の定理により、

"cross-section をもたないならば弱混合的"

ということが成りたつ。しかし、その逆は成立しない。それは、弱混合性は flow の time-change によって変わりうる性質であるのに対し、cross-section の存在は time-change によっては変わらない性質であることによる。以上のような考察から "cross-section の非存在" ということからは、弱混合性とは異なり、しかも time-change にはよらないある種の混合性が導かれることが予想される。それがここに言う Homological Mixing であり、それを次節に述べる。

§2. homological mixing

[2]に従って次のような記号，言葉を用いる。

(a). $R(M)$ は、$C(M)$ の元 $f(x)$ で．実数値連続函数 $h(x)$ によって $f(x)=\exp(\sqrt{-1}\,h(x))$ と表わされるものたちの集合とする。

(b) $f\in C(M)$ に対し．$[f]$ で f の代表する $C(M)/R(M)$ の class を表わす。

(c) $f\in C(M)$ に対し．$\Delta_{(m,mt)}\arg f$ は $m\in M$ から $mt=\varphi_t(m)$ に至る軌道に沿う $\arg f$ の変化を表わす。

(d). $A_m(f)\equiv\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{2\pi t}\Delta_{(m,mt)}\arg f$

(e) $K(\subset M)$ が $[f]\in C(M)/R(M)$ に属する cross-section であるとは．K がある $g\in[f]$ に~~よって~~ $K=\{g=\mathrm{const.}\}$ と表わせる cross-section であることをいう。

[2]では cross-section の存在に関して次の定理が示されている。

Theorem A. ([2]) $f\in C(M)$ とするとき次の二つは同値．

(i) $[f]$ に属する cross-section が存在する．

(ii) $\int_M A_m(f)\,d\mu>0$ (or <0) がすべての有限不変測度 μ に対して成り立つ。

(この定理では．flow は minimal であるとは仮定しない。)

ここで次の定義を与える。即ち、$f \in C(M)$ とするとき、

$$\begin{cases} N(f) = \{ m \in M \mid A_{(m,mt)} \arg f \text{ は } t \to \infty \text{ のとき下に有界} \} \\ P(f) = \{ m \in M \mid A_{(m,mt)} \arg f \text{ は } t \to \infty \text{ のとき上に有界} \} \end{cases}$$

と定義する。このとき、次の結果が得られる。

<u>Theorem B</u>. φ_t が minimal flow で、$f \in C(M)$, $[f] \neq 0$ とするとき、次の四条件は同値である。

(1) φ_t は $[f]$ に属する cross-section をもたない。

(2) $A_m(f) = 0$ for a.e. m w.r.t. any finite invariant measure.

(3) $A_m(f) = 0$ for some m

(4) $N(f) \neq \phi$ かつ $P(f) \neq \phi$ でしかも、$N(f)$, $P(f)$ は共に第1類集合 (i.e. 可算個の nowhere dense compact sets の和) である。

証明は後で与えることにして、先ず(4)の条件が一種の混合性を表わすことを説明する。

U を可縮な連結閉集合とする。$\arg f(\varphi_t(m))$ は (ある (t, m) で値を指定して) $R \times U$ の連続函数である。今、

$$V(f, U; t) = \{ \arg f(\varphi_t(m)) \mid m \in U \}$$

とおくと、条件(4)のの仮定のもとに、任意の閉集合 U に対し、

$$(**) \quad \bigcap_{T>0} \Big(\bigcup_{t>T} V(f, U; t) \Big) = R$$

であることが容易に示される。これは、φ_t によって U が

fの表わすhomologicalな方向に $t\to\infty$ のとき限りなく引き延ばされることを示している。

[注意]

1. $[f]$に属するcross-sectionが存在すれば

$$\bigcap_{T>0}\left(\bigcup_{t>T} V(f,U;t)\right)=\phi$$

である。

2. $[f]$の中に、固有函数が存在しなければ

(***) $$\left[\sup V(f,U;t)-\inf V(f,U;t)\right]\to\infty \quad (t\to\infty)$$

が成り立つ。しかし、性質(***)は、必ずしもtime-changeによって不変ではない。(**)と(***)の違いは、被覆面で考えればよくわかる。

以下にTheorem Bの証明の概略を述べる。

$\Sigma(\subset M)$をflowに接しない$(n-1)$-次元開球とする。($n=\dim M$)

このとき、次の性質をもつminimal flow $(\tilde{M},\varsigma_t)$が構成される。([3])：

(i) 相空間 $\tilde{M}$ はcompact metric space.

(ii) 連続写像 $p:\tilde{M}\to M$ が存在して $p\circ\varsigma_t=\xi_t\circ p$.

(iii) $\overline{p^{-1}(\Sigma)}$ は ς_t のcross-section

(iv) $\dim\overline{p^{-1}(\Sigma)}=0$

(v) 任意の ξ_t のfinite invariant measureに関し、ほとんどいたるところの m に対し、$p^{-1}(m)$ はsingleton.

以下 $(\tilde{M},\zeta_t)$ を上のように構成された minimal flow とする。さて、$f\in C(M)$ は与えられたものとし、Σ を上の $(\tilde{M},\zeta_t)$ の構成に表われる $(n-1)$-次元の flow に接しない球体とする。$x\in\Sigma$ に対し、$T(x)=\inf\{t>0 \mid \zeta_t(x)\in\Sigma\}$ とおく。そして、$\gamma_x'=\{\zeta_t(x) \mid 0\leqq t\leqq T(x)\}$，$\gamma_x''$ は $\zeta_{T(x)}(x)$ と x とを Σ の中で結ぶ道とし、閉曲線 γ_x を $\gamma_x=\gamma_x'+\gamma_x''$ と定める。さらに、D_j は集合 $\{x\in\Sigma \mid \frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_x}\arg f = j\}$ の Σ における内点のなす集合とする。但しここで $\Delta_{\gamma_x}\arg f$ は $\arg f$ の γ_x に沿う変化である。

このとき、$\tilde{D}_j=\overline{p^{-1}(D_j)}$ は $(\tilde{M},\zeta_t)$ の cross-section となる。さらに、$\tilde{D}_j^*$，$\tilde{\Sigma}_0^1$，$\tilde{\Sigma}_0^2$ を

$$\tilde{D}_0^*=\phi\ ,\quad \tilde{D}_j^*=\bigcup_{k=0}^{|j|-1}\zeta_{k\delta}(\tilde{D}_j)\quad (j=\pm1,\pm2,\cdots,\ \delta\text{は十分小なる正数})$$

$$\tilde{\Sigma}_0^1=\bigcup_{j>0}\tilde{D}_j^*\ ,\quad \tilde{\Sigma}_0^2=\bigcup_{j<0}\tilde{D}_j^*$$

と定義する。$\tilde{\Sigma}_0^1$，$\tilde{\Sigma}_0^2$ は ζ_t の cross-section であり、$\tilde{\Sigma}_0^1\cap\tilde{\Sigma}_0^2=\phi$ としてよい。ここで $\tilde{f}_j:\tilde{M}\to S^1$ $(j=1,2)$ を、

$$\tilde{f}_j(x)=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,t_j(x)/T_j(x)\right)$$

$$\begin{cases} t_j(x)=-\sup\{t\leqq 0 \mid \zeta_t(x)\in\tilde{\Sigma}_0^j\} \\ T_j(x)=\inf\{t>0 \mid \zeta_t(\zeta_{-t_j(x)}(x))\in\tilde{\Sigma}_0^j\} \end{cases}$$

と定めると、$\tilde{f}_j$ は連続函数で $\tilde{f}_1\times\tilde{f}_2\equiv f\circ p \pmod{R(\tilde{M})}$ となる。しかも、$[f]\neq 0$ ならば $[f\circ p]\neq 0$ である（[B]を参照）。

次に $\tilde{\Sigma}_k^j$ $(j=1,2,\ k=1,2,3\cdots)$ を次のように定める。先ず $\tilde{\Sigma}_0=\tilde{\Sigma}_0^1\cup\tilde{\Sigma}_0^2$ とし，$P_0:\tilde{\Sigma}_0\cup\tilde{\Sigma}_0$ を Poincaré-map とする。そして，

$$\begin{cases} \tilde{\Sigma}_1^1=\{x\in\tilde{\Sigma}_0^1 \mid P_0^{-1}(x)\in\tilde{\Sigma}_0^1\} \\ \tilde{\Sigma}_1^2=\{x\in\tilde{\Sigma}_0^2 \mid P_0(x)\in\tilde{\Sigma}_0^2\} \end{cases}$$

とおき，$\tilde{\Sigma}_1=\tilde{\Sigma}_1^1\cup\tilde{\Sigma}_1^2$ とすると，$\tilde{\Sigma}_1^j$，$\tilde{\Sigma}_1$ はやはり cross-section となる。以下同様に，

$$\begin{cases} \tilde{\Sigma}_k^1=\{x\in\tilde{\Sigma}_{k-1}^1 \mid P_{k-1}^{-1}(x)\in\tilde{\Sigma}_{k-1}^1\} \\ \tilde{\Sigma}_k^2=\{x\in\tilde{\Sigma}_{k-1}^2 \mid P_{k-1}(x)\in\tilde{\Sigma}_{k-1}^2\} \\ \tilde{\Sigma}_k=\tilde{\Sigma}_k^1\cup\tilde{\Sigma}_k^2 \\ P_k:\tilde{\Sigma}_k\longrightarrow\tilde{\Sigma}_k \ \text{は Poincaré-map} \end{cases}$$

と定義する。$\tilde{\Sigma}_k^j$ は cross-section であり，$\tilde{\Sigma}_0^j$ の compact かつ open な部分集合となる。こう定義すると次の補題が成立する。

LEMMA 1. $\tilde{f}_1\circ\tilde{f}_2=1 \pmod{R(\tilde{M})}$ となるのは，ある自然数 n に対し，$\tilde{\Sigma}_n^1=\tilde{\Sigma}_n^2=\phi$ となるときであり，かつそのときに限る。

この補題を用いると，さらに次のことが言える。

LEMMA 2. $[f]\neq 0$ かつ $A_{\tilde{m}}(\tilde{f}_1\circ\tilde{f}_2)=0$ がある $\tilde{m}\in\tilde{M}$

について成り立てば、任意の n に対し、$\tilde{\Sigma}^1_n \neq \phi$, $\tilde{\Sigma}^2_n \neq \phi$ である。しかもこのとき、$\bigcap_{k\geq 0} \tilde{\Sigma}^j_n$ は $\tilde{\Sigma}^j_0$ の nowhere-dense compact subset である。

この補題により、Theorem B の (2), (3), (4) の同値性が得られる。また (1) と (2) の同値性は、Theorem A と $(\tilde{M}, \xi_t)$ の性質 (V) とから導かれる。

§3. Example.

horocycle flow などが $A_m(f)=0$ なる flow の例であるが、ここでは、$\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ 上の flow を例に挙げる。

ξ_t を、$\mathbb{T}^3$ 上の flow で $\frac{\partial}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial y} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial z}$ なる vector-field で生成されるものとする。($g(x+1,y)=g(x,y+1)=g(x,y)$)。
($\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)

この flow に関して、次のことが知られている。

<u>Proposition</u>. $g(x,y)=\sum a_{m,n}\exp(2\pi\sqrt{-1}(mx+ny))$ で、

$$(*) \quad \sum_{(m,n)\neq(0,0)} |a_{m,n}| \Big/ |1-\exp(2\pi\sqrt{-1}(m+n\gamma))|$$

が発散するとき、ξ_t は minimal flow である。

以下では (*) が発散する場合を考える。f_1, f_2, f_3 を、$C(\mathbb{T}^3)$ の元で $C(\mathbb{T}^3)/R(\mathbb{T}^3)$ の base になるものとする。このとき、(必要ならば $g(x,y)$ のかわりに、$c+g(x,y)$ $(c\in\mathbb{R})$ を考え

て). $A_m(f_j)$ $(j=1.2.3)$ は $\mathbb{Q}$ 上独立でないような minimal flow ξ_t が存在することがわかる。従ってこのような ξ_t については ある $f \in C(\mathbb{T}^3)$ に対し、$[f] \neq 0$ でかつ $A_m(f)=0$ となる。Theorem B によれば、このとき、ξ_t は、f の表わす方向への "homological mixing property" をもつことがわかる。

REFERENCES

[1] H.B. Keynes, The structure of weekly mixing minimal transformation groups, Illinois J. Math. vol 15 (1971) 475–489.

[2] S. Schwartzman, Asymtotic cycles, Ann. Math. vol 66 (1957) 270–284.

[3] I. Ishii, On the first cohomology group of a minimal flow, Tokyo J. Math, vol 1 (1978) 41–56.