数理解析研究所講究録
第 413 巻 1981 年 54-66

リャプノフ数と双曲性 ―― Katok の結果から ――

東大 理 笹野一洋

A. Katok, LYAPUNOV EXPONENTS, ENTROPY AND PERIODIC ORBITS FOR DIFFEOMORPHISMS, Publ. Math. I.H.E.S., 51 (1980), 137–173.
を紹介する。上の文献は、8月頃 Publish され、日本にも着いているので、ここでは、outline を述べるに留める。

M を compact な s-次元多様体とし、滑らかな Riemannian metric が入っているものとする。$f: M \to M$ を C^1-diffeo. とする。

<u>def.</u> $x \in M$ における接ベクトル $v \in T_xM$ に対して、

$$\chi^+(v, f) \equiv \limsup_n \frac{1}{n} \log \|df^n v\|$$

を、v の <u>upper Lyapunov exponent</u> という。

この時、次の事実がよく知られている。

<u>Th.</u> 各 $x \in M$ について、$r(x) \in \{1, 2, \cdots, s\}$, $\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{r(x)}(x)$ なる実数達、$\phi = L_0(x) \subsetneqq L_1(x) \subsetneqq \cdots \subsetneqq L_{r(x)}(x) =$

$T_x M$ ($T_x M$ の subspaces $L_i(x)$ による filtration) が存在して,

$\forall v \in L_i(x) \setminus L_{i-1}(x)$; $\chi^+(v, f) = \chi_i(x)$.

をみたす。

このとき, $k_i(x) \equiv \dim L_i(x) - \dim L_{i-1}(x)$ を, i^{th} exponent $\chi_i(x)$ の multiplicity という。

Th. (Oseledec's Multiplicative Ergodic Theorem) [O]

(i) $\exists A \subset M$: s.t. (a) $\forall \mu$ = f-invariant Borel probability measure on M について, $\mu(A) = 1$, (b). $\forall x \in A$, $\forall v \in T_x M$ について.

$\exists \lim \frac{1}{n} \log \|df^n v\|$ (これを Lyapunov exponent という).

(ii) $r(x)$, $\chi_i(x)$, $k_i(x)$ は. μ に関して可測な f-invariant function である。

(iii) とくに μ が ergodic のとき, $r(x)$, $k_i(x)$, $\chi_i(x)$ は全て. μ-a.e. で定数になる。このとき, これらを各々, r^μ, k_i^μ, χ_i^μ と書くことにする. (μ-a.e. で定数故, χ_i^μ のことを. リヤプノフ数 と呼ぶことがある.)

def. μ-a.e. x について. $\chi_i(x) \neq 0$ ($\forall i$) のとき, μ を. non-zero Lyapunov exponents をもつ測度という。

I. 主結果.

M を同上とし, $f: M \to M$ を $C^{1+\alpha}$-diffeo. ($\alpha > 0$) とする. (但. f が C^r ($r \geq 2$) のときは, $\alpha = 1$ と考える). 即ち,

f は $C^{1+\alpha}$-diffeo. で，その微分 df が α を指数とする Hölder 連続になるとする。 $\mathrm{Per}(f)$ で f の周期点全体を；$P_n(f)$ で f^n の固定点の個数を；$h(f)$ で，f の位相的エントロピーを；$h_\mu(f)$ で，f の，μ に関する測度論的エントロピー（Kolmogorov-Sinai Invariant）を表わすとする。

<u>Th. A.</u>　μ が non-zero Lyapunov exponent をもつ f-不変測度ならば，

$$\mathrm{supp}\,\mu\ (= \mu \text{ の support}) \subset \overline{\mathrm{Per}(f)}\,。$$

<u>Th. B.</u>　Th. A の仮定のもとで，さらに，μ が ergodic で，その support が 1つの周期軌道とならないとき，ある topological Markov shift と同型な f-不変双曲型閉集合が存在する。とくに，$h(f)>0$。

<u>Th. C.</u>　M が2次元で，$h(f)>0$ ならば，(Lyapunov exp. に関係なく.) Th. B. の様な双曲型閉集合が存在する。

<u>Th. D.</u>　Th. A の仮定のもとに，

$$\limsup \frac{1}{n} \log P_n(f) \geq h_\mu(f)。$$

<u>Th. E.</u>　M が2次元のとき，(Lyapunov exp. に関係なく)

$$\limsup \frac{1}{n} \log P_n(f) \geq h(f)。$$

II. <u>Main Lemma.</u>

<u>df.</u>　$\chi>0$，$l \geq 1$ に対して，M の部分集合 $\Lambda_{\chi,l}$ を次の様に定める；

$$\Lambda_{\chi,\ell} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x\in M\ ;\quad \exists\ \text{decomposition}\quad T_xM = E^s_x \oplus E^u_x \quad \text{s.t.} \\ \text{for } \forall n \in \mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,\cdots\},\ \forall m\in\mathbb{Z}\ ; \\ \left\{ \begin{array}{l} ①\ \forall v \in df^m E^s_x \quad \|df^n_{f^m x} v\| \le \ell\cdot e^{-n\chi}\cdot e^{10^{-3}\chi\alpha(n+|m|)}\|v\| \\ \qquad\qquad\qquad\quad \|df^{-n}_{f^m x} v\| \ge \ell^{-1}\cdot e^{n\chi}\cdot e^{-10^{-3}\chi\alpha(n+|m|)}\|v\| \\ ②\ \forall v\in df^m E^u_x : \quad \|df^n_{f^m x}v\| \ge \ell^{-1}\cdot e^{n\chi}\cdot e^{-10^{-3}\chi\alpha(n+|m|)}\|v\| \\ \qquad\qquad\qquad\quad \|df^{-n}_{f^m x}v\| \le \ell\cdot e^{-n\chi}\cdot e^{10^{-3}\chi\alpha(n+|m|)}\|v\| \\ ③\ \gamma(f^m x) \ge \ell^{-1}\cdot e^{-10^{-3}\alpha\chi|m|} \end{array} \right. \\ \qquad \text{但. } \gamma(x) \text{ は. } E^s_x \text{ と } E^u_x \text{ とのなす角度。} \end{array} \right\}$$

(注; 10^{-3} には. "十分小さな正数" ぐらいの意味しかない)

def. $\Lambda^k_{\chi,\ell} \equiv \{x\in\Lambda_{\chi,\ell}\ ;\ \dim E^s_x = k\}$, (closed だが, f-inv. とは限らない)

$\Lambda^k_\chi \equiv \bigcup_{\ell\ge1}\Lambda^k_{\chi,\ell}$ (f-invariant になる)

$\Lambda \equiv \bigcup_{\chi,\ell,k}\Lambda^k_{\chi,\ell}$

次の事実が知られている;

◎ E^s_x, E^u_x は $x\in\Lambda^k_{\chi,\ell}$ に関して連続.

◎ $\forall\mu$; non-zero Lyapunov exponents をもつ測度について, $\mu(\Lambda)=1$

さらに, μ が ergodic ならば, $\mu(\Lambda^k_\chi)=1$。 但. ここで,

$\chi\equiv\min|\chi^\mu_i|$, $k\equiv\sum_{k^\mu_i<0} k^\mu_i$.

(以上については, [P] を参照されたい.)

Main Lemma compact s-dim. riem. mfd M. と, $C^{1+\alpha}$-diffeo. $f: M\to M$ ($\alpha>0$) について, 次が成立する;

$\forall k \in \{0,1,\cdots,s\}$, $\forall \chi, \delta > 0$, $\forall \ell \geqq 1$ について, $\Phi = \Phi(k,\chi,\ell,\delta)$ なる正数が存在して次をみたす;

$x \in \Lambda^k_{\chi,\ell}$ が $f^n x \in \Lambda^k_{\chi,\ell}$, $d(x, f^n x) < \Phi$ $(\exists n \in \mathbb{Z})$ をみたすならば, $z = z(x)$ なる点で次をみたすものが存在する;

$$\begin{cases} \text{(i)} & f^n z = z, \\ \text{(ii)} & d^f_n(x, z) \equiv \max\{d(f^i x, f^i z);\ 0 \leqq i < n\} < \delta, \\ \text{(iii)} & z \text{ は双曲型周期点で, その local stable 【unstable】 mfd.} \end{cases}$$

は, admissible $(s,1)$-【$(u,1)$-】 mfd. near x である。(定義は次節).

IV. 記号, 準備.

以後の節で使用する定義や性質を列挙する。性質の証明は殆ど, [P] の方法が適用できる。

1° f のみによってきまる定数 $r_0 > 0$ が存在し, 任意の $x \in \Lambda^k_{\chi,\ell}$ のまわりの local chart として euclidean space の r_0-ball からのもので, それによって f から induce される euclid. sp. 上の写像 f_x が hyperbolic の様な条件をみたすようなものがとれる。詳しく言うと, $\forall x \in \Lambda^k_{\chi,\ell}$ について, $\exists B(x) =$ nbd. of x, $\exists \Phi_x : B^k_{r_0} \times B^{m-k}_{r_0} \to B(x)$: diffeo. ($B^*_{r_0}$ は $\mathbb{R}^*$ の r_0-ball) s.t.

(i) $\forall y \in B(x)$ について, $T_y M$ の riem. metric から induce される距離と, Φ_x によって $\mathbb{R}^m$ の euclid. metric から induce される

距離とは．余り違わない。(※)

(ii) $f_x \equiv \Phi_{fx}^{-1}\circ f\circ \Phi_x : B_{r_0}^{k} \times B_{r_0}^{s-k} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は次の形；

$$f_x(u,v) = (A_x u + h_{1x}(u,v),\ B_x v + h_{2x}(u,v)) \quad \begin{pmatrix} u\in\mathbb{R}^k \\ v\in \mathbb{R}^{s-k}\end{pmatrix}$$

但，

$h_{1x}(0,0)=0$, $h_{2x}(0,0)=0$, $dh_{1x}(0,0)=0$, $dh_{2x}(0,0)=0$

A_x, B_x は行列で，$\|A_x\| < e^{-\frac{99}{100}\chi}$, $\|B_x^{-1}\| < e^{-\frac{99}{100}\chi}$

《$\|\cdot\|$ は euclid. metric に関する norm》.

$\exists H$: const; s.t. $\|(dh_x)_{z_1} - (dh_x)_{z_2}\| < H\cdot\lambda(\chi)\cdot\|z_1 - z_2\|^{\alpha}$.

(ここで，$z=(u,v)$, $h_x(z)=(h_{1x}(z), h_{2x}(z))$, $\lambda(\chi) = \max.\{\frac{1}{2}, e^{-\frac{99}{100}\chi}\}$．とおいた。)

(即ち，f_x は hyperbolic の様な形をしている．ということ).

(iii) その他の付帯条件(※).

2° $x\in\Lambda^{k}_{\chi\ell}$ について．($\delta>0$, $\gamma>0$)

def. $U_x^{\gamma,\delta,h} \equiv \left\{ \Phi_x(\text{graph of } \varphi);\ \varphi\in C^1(B^{s-k}_{h\varepsilon(x)}, B^{k}_{h\varepsilon(x)}),\ \|\varphi(0)\|\leq\delta,\ \|d\varphi(0)\|\leq\gamma \right\}$

但．$\varepsilon(x)$ は x から決まる，或る正定数，$0<h\leq 1$.

同様にして，$S_x^{\gamma,\delta,h}$ も定義される。

def. $\varepsilon \equiv \inf\{\varepsilon(x);\ x\in\Lambda^{k}_{\chi,\ell}\} > 0$.

$\lambda(\chi) \equiv \max\{\frac{1}{2}, e^{-\frac{99}{100}\chi}\}$, $\gamma(\chi) \equiv \frac{1}{20}(1-\lambda(\chi))$

(※)；～～(※)部分は，詳しく書いても煩雑になるばかりなので簡単に書いた。詳しいことは論文を参照されたい。(以下同様)。

<u>def</u> $N \in \mathcal{U}_x^{\gamma(x),\frac{1}{4}h\varepsilon, h}$ について、$N \cap \Phi_x(B^k_{\frac{h\varepsilon}{2}} \times B^{s-k}_{\frac{h\varepsilon}{2}})$ を<u>admissible (u,h)-mfd. near x</u> という。<u>admissible (s,h)-mfd. near x.</u> も定義される。

admissible (u,h)-【(s,h)-】mfd は、以下、local unstable【stable】mfd の様な働きをする。 △2°

<u>3°</u> $k, \chi > 0$, $l \geq 1$, $\beta < \frac{1}{4}$, $0 < h \leq 1$ について、$x, y \in \Lambda^k_{\chi,l}$ が十分に近く、さらに $N \in \mathcal{U}_y^{4\beta\gamma(x), h\beta\varepsilon, h}$ ならば、$N \cap \Phi_x(B^k_{\frac{h\varepsilon}{2}} \times B^{s-k}_{\frac{h\varepsilon}{2}})$ は admissible (u,h)-mfd. near x である。 △3°

<u>4°</u> $x \in \Lambda^k_{\chi,l}$, $0 < h \leq 1$ について、任意の admissible (s,h)-mfd near x と、任意の admissible (u,h)-mfd. near x とは、1点のみで交わり、かつ、その交わりは横断的である。 △4°

V. <u>Main Lemma ⇒ 主結果.</u>

Main Lemma を仮定して主結果（I 節）を導く。

<u>Th. A.</u>; $\forall x_0 \in \operatorname{supp}\mu$, $\forall \varepsilon > 0$ について、$z \in \operatorname{Per}(f)$ s.t. $d(x_0, z) < \varepsilon$ を見つければよい。

$\mu(\Lambda) = 1$ 故、$\exists k, l, \chi$; $\mu(B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \Lambda^k_{\chi,l}) > 0$。$\psi = \psi(k, \chi, l, \frac{\varepsilon}{2})$ を Main Lemma に表われる正数とする。このとき、$\exists B \subset B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \Lambda^k_{\chi,l}$; $\operatorname{diam} B < \psi$ かつ $\mu(B) > 0$.

Poincaré recurrence theorem により，$\exists x \in B$，$\exists n(x) \in \mathbb{Z}^+$；$f^{n(x)}(x) \in B \subset \Lambda^k_{\lambda,\ell}$．とくに，このとき，$d(x, f^{n(x)}(x)) < \psi$ である。故に，Main Lemma を用いれば，$\exists z \in Per(f)$；$d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$。このとき，$d(x_0, z) \leqq d(x_0, x) + d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

故，Th. A. が証明できた。 $\boxed{\text{Th. A.}}$

<u>Th.B.</u>；もしも，$\forall i$；$\chi_i^\mu < 0$ とすると，f は，大体(※) contraction と考えられ，ergodicity により $\mathrm{supp}\,\mu = $ (single periodic orbit) となり仮定に矛盾。$\forall i$：$\chi_i^\mu > 0$ とすれば，f^{-1} を考えることによって，矛盾。故に，$\exists i$：$\chi_i^\mu < 0 < \chi_{i+1}^\mu$ となる。

$\forall x_0 \in \mathrm{supp}\,\mu$，$\forall \varepsilon > 0$ をとる。このとき，$\exists x_1, x_2 \in M$ s.t. $x_1, x_2 \in B(x_0, \frac{\varepsilon}{4})$，$\exists k, \ell$；$\forall \delta > 0$；$\mu(\Lambda^k_{\lambda,\ell} \cap B(x_i, \delta)) > 0$ $(i=1,2)$，かつ，$d(x_1, x_2)$ は十分近い(※)。Th. A. の証明と同様にして，x_i に十分近い(※) hyperbolic periodic point z_i $(i=1,2)$ がとれ，Main Lemma (iii) 及び IV. 4° により，$W^u(z_1) \pitchfork W^s(z_2) \neq \phi$，$W^u(z_2) \pitchfork W^s(z_1) \neq \phi$．このような状況があれば，Th. B の主張が導かれることは，S. Smale が証明している。[S]。 $\boxed{\text{Th. B}}$

<u>Th. C.</u>；$0 < h(f) = \sup\{h_\mu(f)$；$\forall \mu = $ ergodic f-inv. Prob. meas.$\}$

故，$\exists \mu = $ ergodic f-invariant probability measure s.t. $h_\mu(f) > 0$ かつ，$\mathrm{supp}\,\mu \neq$ (single periodic orbit)。

f の Lyapunov 数を $\chi_1^\mu \geqq \chi_2^\mu$ とする。一般に，Margulis に

より，次の結果が得られている。（1968年，unpublished）.

$$\left[\begin{array}{l} f: M^n \to M^n \ ;\ C^1\text{-diffeomorphism} \ ,\ \mu = \text{Borel prob. } f\text{-inv. meas.} \\ \text{について，} \\ h_\mu(f) \leqq \int_M \chi^P(x)\, d\mu \qquad \text{where } \chi^P(x) = \sum_{i:\chi_i(x)>0} k_i(x)\chi_i(x). \end{array}\right.$$

これを上の場合に適用すれば，$0 < h_\mu(f) \leqq \sum_{i:\chi_i^\mu>0} \chi_i^\mu$。故に，$\chi_1^\mu > 0$ である。同様の議論を f^{-1} に適用すれば，$\chi_2^\mu < 0$ なることが示される。故に，Th.B. が適用できて，証明がおわる。 $\boxed{\text{Th.C}}$

<u>Th.D.</u>　この定理の証明には，(n,ε)-spanning set を用いた $h_\mu(f)$ の定義（論文の第Ⅰ章で述べられている）を必要とするため，ここでは省略する。 $\boxed{\text{Th.D}}$

<u>Th.E.</u>（Th.D. を認めて，Th.E. を証明する。）$h(f)=0$ ならば証明すべきことはない。$h(f)>0$ とする。$\forall\varepsilon>0$ について，$\exists\mu$: ergodic measure s.t. $h_\mu(f) > h(f)\cdot(1-\varepsilon) > 0$．このとき，Th.C. の証明と同様に，$\chi_2^\mu < 0 < \chi_1^\mu$ とできるから，Th.D により，

$$\limsup \frac{1}{n} P_n(f) \geqq h_\mu(f) > h(f)\cdot(1-\varepsilon) \ 。$$

$\varepsilon \to 0$ とすれば Th.E. が証明される。 $\boxed{\text{Th.E.}}$

<u>Ⅵ．Main Lemma の証明の概略</u>

適当な admissible (s,h)-mfd near x の族 $\{A_m\}_{m\geq 0}$，及び

admissible (u, h)-mfd. near x の族 $\{B_m\}_{m\geq 0}$ を構成し，それらの（横断的な）交点達の点列の極限として，求める hyperbolic periodic point を得る。即ち，詳しく言えば次の様；

$$B_0 \equiv \Phi_x\left(\{0\} \times B^{s-k}_{\frac{h\varepsilon}{2}}\right).$$ とおき，inductive に，

$$B_0^i \equiv f\left(B_0^{i-1} \cap C(f^{i-1}x, h)\right) \quad (i=2, 3, \cdots, n-1)$$ とおく。

但. $C(x, h) \equiv \Phi_x\left(B^k_{h\varepsilon(x)} \times B^{s-k}_{h\varepsilon(x)}\right)$ for $x \in \Lambda^k_{\chi,\ell}$。

そして，

$$B_1 \equiv f B_0^{n-1} \cap \Phi_x\left(B^k_{\frac{h\varepsilon}{2}} \times B^{s-k}_{\frac{h\varepsilon}{2}}\right).$$

（次頁の図を参照）.

B_0 から B_1 を構成したのと同様に，inductive に，B_m $(m=1, 2, \cdots)$ を構成する。一方，f^{-1} を用いて，$B^k_{\frac{h\varepsilon}{2}} \times \{0\}$ から，inductive に，A_m $(m=0, 1, 2, \cdots)$ を構成する。

このとき，適当な条件のもとで（即ち，ψ etc. を小さくとることで，）$\forall m=1, 2, \cdots$；A_m は admissible (s, h)-mfd near x & B_m は admissible (u, h)-mfd near x. なることが証明できる。そこで，

$$z_{k,\ell} \equiv A_k \cap B_\ell$$

とおく。（NB：$f^n z_{k,\ell} = z_{k-1,\ell+1}$）.

このとき，Ⅲ.1° 等を用いて，次の2式が示される；

① --- $\lim_{k\to\infty} d'_x(z_{k,k-1}, z_{k-1,k}) = 0$

② --- $\sum_{k=1}^{\infty} d'_x(z_{k+1,k}, z_{k,k-1}) < \infty$.

(ここで. d_x^2 は. euclidean metric を表わす.)

②より,

$$\exists \lim_k z_{k,k-1} = z .$$

このとき,

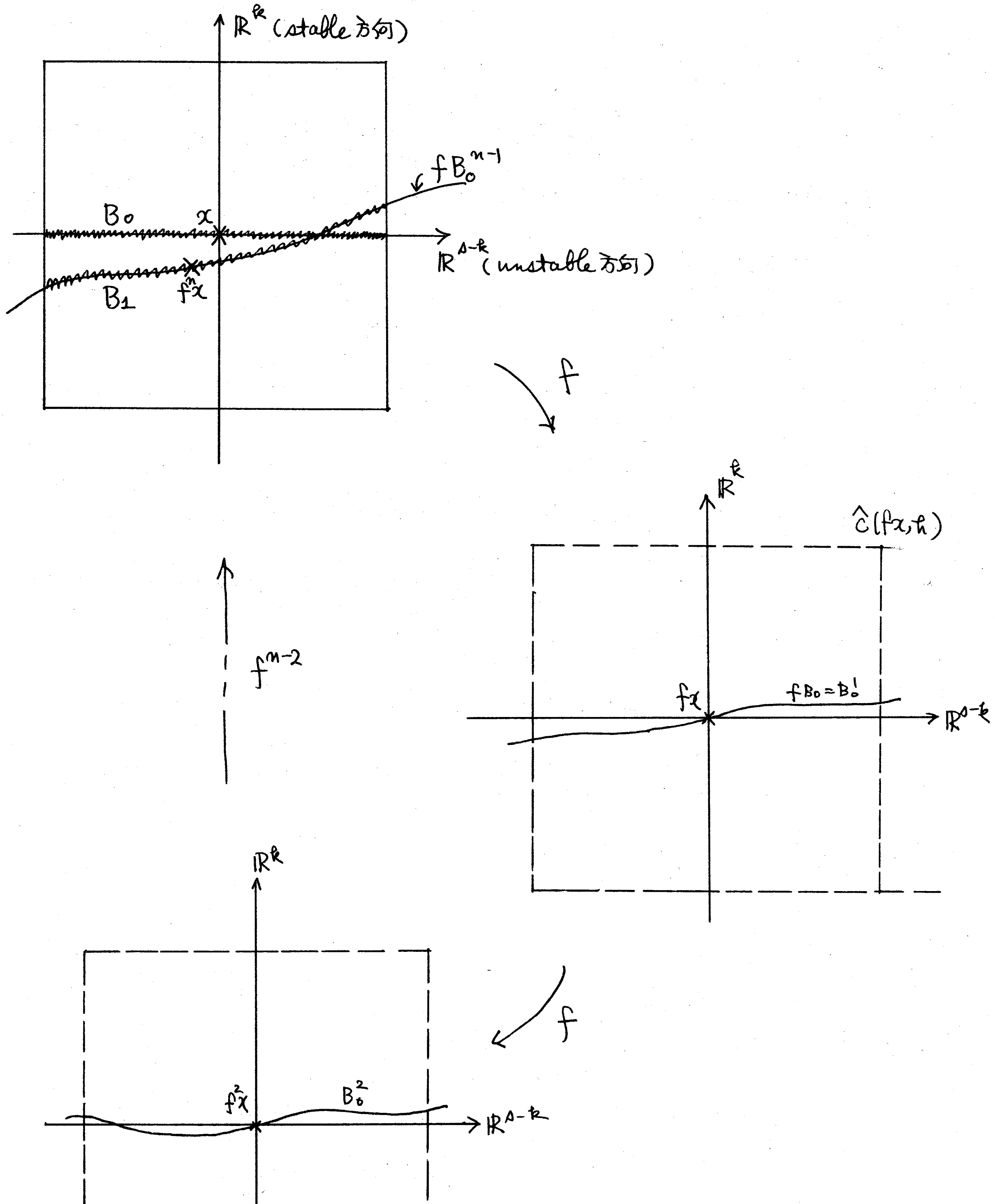
$$f^n z = f^n(\lim_k z_{k,k-1}) = \lim_k (f^n z_{k,k-1}) = \lim_k z_{k-1,k}$$

$$= \lim_k z_{k,k-1} \quad (\text{ここで①を用いる})$$

$$= z$$

故, Main Lemma の (i)(ii) が示された.

さらに, より注意深く考察すれば, $\exists \lim_m A_m$ がわかり, これが求める local stable mfd となる. unstable mfd についても同様で, (iii) が示された. $\boxed{\text{Main Lemma}}$


$\mathbb{R}^k$ (stable 方向)
fB_0^{n-1}
B_0
x
$\mathbb{R}^{s-k}$ (unstable 方向)
B_1
$f^n x$
f
f^{n-2}
$\mathbb{R}^k$
$\hat{C}(fx, h)$
fx
$fB_0 = B_0^1$
$\mathbb{R}^{s-k}$
f
$\mathbb{R}^k$
f^2x
B_0^2
$\mathbb{R}^{s-k}$
$\hat{C}(f^2x, h)$

REFERENCES.

[P] Pesin, Ja. B., Families of invariant manifolds corresponding to non-zero characteristic exponents, Math. of the USSR – Izvestija, 10 (1976), 6, 1261–1305.

———, Characteristic Lyapunov exponents and smooth Ergodic theory, Russian Math. Surveys, 32 (1977), 4, 55–114.

[O] Oseledec, V. I., Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, Trans. Moscow Math. Soc., 19 (1968), 197–221.

[S] Smale, S., Diffeomorphisms with many periodic points, Diff. and Comb. Topology, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965, 63–80.