数理解析研究所講究録
第414巻 1981年 74-97

Painlevé I 型方程式について

愛媛大学 工 亀高 惟倫

§0 序

Painlevé I 型方程式

(1) $$u'' = 6u^2 + z$$

の解は複素 z 平面上で有理型関数である。解は新しい超越関数と信じられているが その詳しい性質はほとんど知られていない。ここでは原点中心の Laurent 級数で表わされる 2つの特殊解について 主として収束半径を中心に詳しく論ずる。数値計算にかんする部分は全て愛媛大学工学部 野田松太郎氏による。初期条件によって

Regular Case

(2) $$u(0) = u'(0) = 0$$

Singular Case

(3) $$z^2 u(z)\Big|_{z=0} = 1, \quad \left(\frac{d}{dz}\right)^6 \left(z^2 u(z)\right)\Big|_{z=0} = 0$$

の2つの場合に分けて考える。それぞれの場合

(4) $$u_R(z) = \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{336}z^8 + \frac{1}{26208}z^{13} + \cdots$$

(5) $$u_S(-z) = z^{-2} + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{264}z^8 + \frac{1}{19008}z^{13} + \cdots$$

とLaurent 展開される解を持つ。これらの収束半径をそれぞれ R, ρ とするとき

数値計算の結果

(6) $R = 2.616$

(7) $\rho = 2.562$

なる値を得た。又数値計算を通じて次のことを予想している。

予想

$u_R(z)$, $u_\rho(-z)$ はその収束円周上にそれぞれ

$$R\exp\frac{2k\pi}{5}i, \qquad \rho\exp\frac{2k\pi}{5}i \qquad (k=0,1,2,3,4)$$

なる5組の2位の極をもつ（ここまでは以下に示されている）がこれら以外に特異点をもたない。

さて我々は上記の値(6),(7)を初めて発表する訳であるから少なくともこれらの値が大きくまちがってはいないという理論的保障をしなくてはならない。小数点以下何桁まで信用できるかといったこまかい吟味はこれから先の話である。

以下に示すように次の評価を得た。

評価

(8) $\quad 2.240 \leq R \leq 2.666$

(9) $\quad 2.221 \leq \rho \leq 2.609$

上からの評価を与える数値は計算機により得られたものであって もっと大きい計算機があれば これらよりもっと良い値が得られると予想している。下からの評価にかんしては以下の(5.28),(5.29)の方が良い結果になっているものと期待しているが この部分の数値計算は目下実行中である。

R, ρ の相互の関係は次のとおり。

(10) $\quad \left(\frac{77}{102}\right)^{\frac{1}{10}} R \leq \rho \leq R \leq \left(\frac{102}{77}\right)^{\frac{1}{10}} \rho$

$$\left(\frac{77}{102}\right)^{\frac{1}{10}} \fallingdotseq 0.972275, \quad \left(\frac{102}{77}\right)^{\frac{1}{10}} \fallingdotseq 1.02852$$

我々の数値 (6),(7) は以上の理論的評価式と矛盾していない。したがって一応信頼してよいと思っている。

§1 形式解.

以下 (1) の代わりに

(1.1) $\quad u'' = 6u^2 + z + \frac{\lambda - 1}{6} z^6 \qquad (\lambda : \text{パラメーター})$

を考える。$\lambda=1$ の場合が (1) である。2つの特別な場合

<u>Regular Case</u>

(1.2) $$u(0) = u'(0) = 0$$

<u>Singular Case</u>

(1.3) $$z^2 u(z)\Big|_{z=0} = 1 , \qquad \left(\frac{d}{dz}\right)^6 \left(z^2 u(z)\right)\Big|_{z=0} = 0$$

を考える。それぞれの場合次のようなべき級数で表わされる形式解をもつ。

(1.4) $$u_R(z,\lambda) = \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{336} v(z,\lambda)$$

(1.5) $$u_S(z,\lambda) = z^{-2} + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{264} w(z,\lambda)$$

ただし

(1.6) $$v(z,\lambda) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}\, z^{5j-2} (\lambda z^{10})^{k+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} A_l(\lambda)\, z^{5l+8}$$

$$A_l(\lambda) = \sum_{j+2k=l} a_{jk}\, \lambda^{k+1} \quad (\lambda \text{の} [\tfrac{l}{2}]+1 \text{次多項式})$$

$$(1.18)\qquad v(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(z)\,\lambda^{k+1}$$

$$(1.19)\qquad w(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)\,\lambda^{k+1}$$

とすると

$$(1.20)\qquad v_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}\, z^{5j+10k+8} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$(1.21)\qquad w_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{jk}\, z^{5j+10k+8} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

であるが (1.8),(1.12) より特に

$$(1.22)\qquad v_0(z) = z^8\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{12}{5},\frac{13}{5};\ \frac{2}{25}z^5\right)$$

$$(1.23)\qquad w_0(z) = z^8\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{9}{5},\frac{16}{5};\ \frac{2}{25}z^5\right)$$

となる。${}_1F_2$ は Pochhammer の超幾何関数で

$${}_1F_2(1;\ p,q;\ z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(j+p)\,\Gamma(j+q)}\, z^j$$

である。(1.18) を (1.16) に (1.19) を (1.17) に代入すると

$$(1.24)\quad \begin{cases} L\,v_0 = 56 z^6 \\ L\,v_{k+1} = \dfrac{1}{56} \displaystyle\sum_{k_1+k_2=k} v_{k_1} v_{k_2} \qquad (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

$$(1.25)\quad \begin{cases} M\,w_0 = 44 z^6 \\ M\,w_{k+1} = \dfrac{1}{44} \displaystyle\sum_{k_1+k_2=k} w_{k_1} w_{k_2} \qquad (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

べキ級数 $u_R(z,\lambda)$, $u_S(z,\lambda)$ の収束半径をそれぞれ $R(\lambda)$, $S(\lambda)$ とする。以下の目的は $R(\lambda)$, $S(\lambda)$ に対する適当な評価を求めることである。

§2 漸化式を使った評価.

任意の λ に対して $R(\lambda)>0$, $S(\lambda)>0$ であることは (1.11) (1.15) よりすぐわかる。(1.11), (1.15) より次の評価が従う。

定理 2.1

$|\lambda|\geq 1$ のとき

$$(2.1)\qquad |A_\ell(\lambda)| \leq C_R^{\ell}\, |\lambda|^{\frac{\ell}{2}+1} \qquad (\ell=0,1,2,\cdots)$$

$$(2.2)\qquad |B_\ell(\lambda)| \leq C_S^{\ell}\, |\lambda|^{\frac{\ell}{2}+1} \qquad (\ell=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つ。ただし

$$C_R = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{153} + \sqrt{\frac{1}{153^2} + \frac{1}{1260}}\right] \fallingdotseq 0.0177279$$

$$C_S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{147} + \sqrt{\frac{1}{147^2} + \frac{1}{1155}}\right] \fallingdotseq 0.0185016$$

$$(2.3)\qquad R(\lambda) \geq C_R^{-\frac{1}{5}}\, |\lambda|^{-\frac{1}{10}} \qquad (|\lambda|\geq 1)$$

$$(2.4)\qquad S(\lambda) \geq C_S^{-\frac{1}{5}}\, |\lambda|^{-\frac{1}{10}} \qquad (|\lambda|\geq 1)$$

特に $\lambda=1$ のとき

$$(2.5)\qquad R = R(1) \geq c_R^{-\frac{1}{5}} \doteqdot 2.2401082$$

$$(2.6)\qquad \rho = \rho(1) \geq c_\rho^{-\frac{1}{5}} \doteqdot 2.22105$$

又次の評価が成り立つ。

$$(2.7)\qquad |u_R(z,\lambda)| \leq u(|z|,|\lambda|) \leq \frac{1}{6}|z|^3 + \frac{1}{336}|\lambda||z|^8\left(1 - c_R|\lambda|^{\frac{1}{2}}|z|^5\right)^{-1}$$

$$\left(|z| < c_R^{-\frac{1}{5}}|\lambda|^{-\frac{1}{10}} \right)$$

$$(2.8)\qquad |u_\rho(z,\lambda)| \leq u_\rho(-|z|,|\lambda|) \leq$$

$$\leq |z|^{-2} + \frac{1}{6}|z|^3 + \frac{1}{264}|\lambda||z|^8\left(1 - c_\rho|\lambda|^{\frac{1}{2}}|z|^5\right)^{-1}$$

$$\left(|z| < c_\rho^{-\frac{1}{5}}|\lambda|^{-\frac{1}{10}} \right)$$

§3 Weierstrass の $\wp$ 関数を使った評価.

この節の結果として得られる R, ρ に対する上からの評価は次節の結果より悪いが この節の結論もそれなりの意味はもっていると思う。Weierstrass の $\wp$ 関数 $\wp(z; g_2, g_3)$ に対して

$$(3.1)\qquad \frac{3}{2}z^{-1}\left[\wp(z^{\frac{1}{2}}; g_2, g_3) - z^{-1}\right] = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell z^\ell$$

と Taylor 展開すると　係数は次の漸化式で定まる。

(3.2)
$$\begin{cases} a_0 = \frac{3}{40} g_2, & a_1 = \frac{3}{56} g_3 \\ a_{l+2} = \frac{1}{(l+1)(l+\frac{9}{2})} \sum_{l_1+l_2=l} a_{l_1} a_{l_2} & (l=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

(1.11) と見くらべて　$\lambda>0$ のとき

(3.3)
$$g_2 = \frac{5\lambda}{1428}, \quad g_3 = \frac{\lambda}{15912}$$

とすると

(3.4)
$$A_l(\lambda) \geq 3808\, a_l \qquad (l=0,1,2,\cdots)$$

がわかる。又 (1.15) と比べて　$\lambda>0$ のとき

(3.5)
$$g_2 = \frac{5\lambda}{1078}, \quad g_3 = \frac{\lambda}{11088}$$

とすると

(3.6)
$$B_l(\lambda) \geq \frac{8624}{3} a_l \qquad (l=0,1,2,\cdots)$$

を得る。したがって次の評価が従う。

<u>定理 3.1</u>

$\lambda>0$ とする。　$0 \leq x < R(\lambda)$　のとき　g_2, g_3 を (3.3) で定めると

$$(3.7) \qquad u_R(x,\lambda) \geq \frac{1}{6}x^3 + 17x^3\left[\wp(x^{\frac{5}{2}}; g_2, g_3) - x^{-5}\right]$$

又 g_2, g_3 を (3.5) で定めると $0 \leq x < \rho(\lambda)$ のとき

$$(3.8) \qquad u_\rho(-x,\lambda) \geq x^{-2} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{49}{3}x^3\left[\wp(x^{\frac{5}{2}}; g_2, g_3) - x^{-5}\right]$$

さてこの評価を利用すると $\lambda = 1$ として $R = R(1)$, $\rho = \rho(1)$ に対する上からの評価を導くことが出来る。いずれの場合も $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 < 0$ となるので $x^3 - \frac{g_2}{4}x - \frac{g_3}{4} = 0$ の3根 e_1, $e_2 (= \bar{e}_2)$ $e_3 = \bar{e}_1$ $(\mathrm{Im}\, e_1 > 0)$ をもとめ

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{Re}(e_2 - e_3)}{|e_2 - e_3|}\right)$$

とすると

$$2\tilde{\omega} = \frac{2K(\tilde{k})}{|e_2 - e_3|^{1/2}} \qquad (K : \text{第1種完全楕円積分})$$

が $\wp(x; g_2, g_3)$ の正の実軸上にあって一番原点に近い特異点となる。$(2\tilde{\omega})^{2/5}$ が R（又は ρ）に対する上からの評価を与える。このようにして求めた評価は

$$(3.9) \qquad R \leq 2.823377292$$

$$(3.10) \qquad \rho \leq 2.750776182$$

§4 微分不等式を使った評価

$\lambda > 0$ とする。前節で示したように $0 < R(\lambda), S(\lambda) < \infty$ であって

$$(4.1)\quad \lim_{x \to R(\lambda)-0} v(x,\lambda) = +\infty, \quad \lim_{x \to S(\lambda)-0} w(x,\lambda) = +\infty$$

である。$A_\ell(\lambda) > 0,\ B_\ell(\lambda) > 0\ (\forall \ell)$ に注意すると (1.16) (1.17) より

$$(4.2)\quad v''(x,\lambda) \geq \frac{1}{56} v^2(x,\lambda) \quad (0 \leq x < R(\lambda))$$

$$(4.3)\quad w''(x,\lambda) \geq \frac{1}{44} w^2(x,\lambda) \quad (0 \leq x < S(\lambda))$$

が従う。これらの微分不等式より次の結果を得る。

<u>定理 4.1</u>

$\lambda > 0$ とする。次の不等式が成り立つ。

$$(4.4)\quad v(x,\lambda) \leq 336\,(R(\lambda) - x)^{-2} \quad (0 \leq x < R(\lambda))$$

$$(4.5)\quad w(x,\lambda) \leq 264\,(S(\lambda) - x)^{-2} \quad (0 \leq x < S(\lambda))$$

さて上の不等式と

$$(4.6)\quad v(x,\lambda) \geq a_{jk}\, \lambda^{k+1}\, x^{5j+10k+8} \quad (0 \leq x < R(\lambda))$$

$$(4.7)\quad w(x,\lambda) \geq b_{jk}\, \lambda^{k+1}\, x^{5j+10k+8} \quad (0 \leq x < S(\lambda))$$

を組み合わせると

$$(4.8)\qquad R(\lambda) \leq \left[\frac{336}{a_{jk}\lambda^{k+1}} f_{jk}(\xi)\right]^{\frac{1}{5j+10k+10}} \qquad (0<\xi<1)$$

$$(4.9)\qquad \rho(\lambda) \leq \left[\frac{264}{b_{jk}\lambda^{k+1}} f_{jk}(\xi)\right]^{\frac{1}{5j+10k+10}} \qquad (0<\xi<1)$$

を得る。ただし

$$f_{jk}(\xi) = (1-\xi)^{-2}\xi^{-(5j+10k+8)}$$

である。

$$(4.10)\qquad \min_{0<\xi<1} f_{jk}(\xi) = \left(\frac{5j+10k+10}{5j+10k+8}\right)^{5j+10k+10}\left(\frac{5j+10k+8}{2}\right)^{2}$$

であるから 結局次の不等式を得る。

$$(4.11)\qquad R(\lambda) \leq \frac{5j+10k+10}{5j+10k+8}\left[\frac{84(5j+10k+8)^2}{a_{jk}\lambda^{k+1}}\right]^{\frac{1}{5j+10k+10}}$$

$$(j, k=0,1,2,\cdots)$$

$$(4.12)\qquad \rho(\lambda) \leq \frac{5j+10k+10}{5j+10k+8}\left[\frac{66(5j+10k+8)^2}{b_{jk}\lambda^{k+1}}\right]^{\frac{1}{5j+10k+10}}$$

$$(j, k=0,1,2,\cdots)$$

$j=k=0$ として $a_{00}=1$, $b_{00}=1$ に注意すると

定理 4.2

$\lambda>0$ とすると 次の評価が成り立つ。

$$(4.13)\qquad R(\lambda) \leq \frac{5}{4}(5376)^{\frac{1}{10}}\lambda^{-\frac{1}{10}}$$

$$(4.14)\qquad S(\lambda) \leq \frac{5}{4}(4224)^{\frac{1}{10}}\lambda^{-\frac{1}{10}}$$

特に $\lambda=1$ とすると

$$(4.15)\qquad R \leq \frac{5}{4}(5376)^{\frac{1}{10}} \fallingdotseq 2.9509125$$

$$(4.16)\qquad S \leq \frac{5}{4}(4224)^{\frac{1}{10}} \fallingdotseq 2.8806$$

この評価は前節の結果より悪い。さて (4.11) (4.12) において $k=0$ とし (1.8) (1.12) に注意すると

$$R(\lambda) \leq \frac{5j+10}{5j+8}\left[\frac{84(5j+8)^2\Gamma(j+\frac{12}{5})\Gamma(j+\frac{13}{5})}{\Gamma(\frac{12}{5})\Gamma(\frac{13}{5})}\left(\frac{25}{2}\right)^j\right]^{\frac{1}{5j+10}}\lambda^{-\frac{1}{5j+10}}$$

$$S(\lambda) \leq \frac{5j+10}{5j+8}\left[\frac{66(5j+8)^2\Gamma(j+\frac{9}{5})\Gamma(j+\frac{16}{5})}{\Gamma(\frac{9}{5})\Gamma(\frac{16}{5})}\left(\frac{25}{2}\right)^j\right]^{\frac{1}{5j+10}}\lambda^{-\frac{1}{5j+10}}$$

を得るが ガンマ関数に対する Stirling の公式を使うと

$$R(\lambda),\ S(\lambda) \leq \mathrm{const}\ j^{\frac{2}{5}}\lambda^{-\frac{1}{5j+10}}\qquad (\lambda>0,\ j=1,2,3,\cdots)$$

となる。 $j \leq \frac{1}{5}\log\lambda < j+1$ となるように j をとれば次の結論を得る。

<u>定理 4.3</u>

適当な $\lambda_0>0$ に対し 次の評価が成り立つ。

$$(4.17) \qquad R(\lambda),\ \tilde{S}(\lambda) \le \mathrm{const}\left(\log\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2}{5}} \qquad (0<\lambda<\lambda_0)$$

少しわき道にそれたが R, $\tilde{S}$ を評価するという最初の問題に立ちかえろう。(4.4), (4.5) に

$$(4.18) \qquad v(x,\lambda) \ge A_l(\lambda)\, x^{5l+8} \qquad (0 \le x < R(\lambda))$$

$$(4.19) \qquad w(x,\lambda) \ge B_l(\lambda)\, x^{5l+8} \qquad (0 \le x < \tilde{S}(\lambda))$$

を組み合わせると

$$(4.20) \qquad R(\lambda) \le \left[\frac{336}{A_l(\lambda)}\, g_l(\xi)\right]^{\frac{1}{5l+10}} \qquad (0<\xi<1)$$

$$(4.21) \qquad \tilde{S}(\lambda) \le \left[\frac{264}{B_l(\lambda)}\, g_l(\xi)\right]^{\frac{1}{5l+10}} \qquad (0<\xi<1)$$

を得る。ただし

$$g_l(\xi) = (1-\xi)^{-2}\,\xi^{-(5l+8)}$$

とする。

$$(4.22) \qquad \min_{0<\xi<1} g_l(\xi) = \left(\frac{5l+10}{5l+8}\right)^{5l+10}\left(\frac{5l+8}{2}\right)^{2}$$

より

$$(4.23) \qquad R(\lambda) \le \frac{5l+10}{5l+8}\left[\frac{84(5l+8)^2}{A_l(\lambda)}\right]^{\frac{1}{5l+10}} \qquad (l=0,1,2,\cdots)$$

(4.24) $$\bar{S}(\lambda) \le \frac{5l+10}{5l+8}\left[\frac{66(5l+8)^2}{B_l(\lambda)}\right]^{\frac{1}{5l+10}} \qquad (l=0,1,2,\cdots)$$

収束半径を与える Cauchy-Hadamard の公式によると (4.23) (4.24) の右辺の $l \to +\infty$ としたときの下極限はそれぞれ不等式の左辺に等しい したがって次の結論を得る。

定理 4.4

任意の m に対して

(4.25) $$R(\lambda) = \inf_{l \ge m} \frac{5l+10}{5l+8}\left[\frac{84(5l+8)^2}{A_l(\lambda)}\right]^{\frac{1}{5l+10}}$$

(4.26) $$S(\lambda) = \inf_{l \ge m} \frac{5l+10}{5l+8}\left[\frac{66(5l+8)^2}{B_l(\lambda)}\right]^{\frac{1}{5l+10}}$$

これで (4.23) (4.24) は単に $R(\lambda)$, $S(\lambda)$ に対する上界を与えているだけではなく 原理的にはいくらでもよい近似値を与え得るということがわかった。しかし実際に数値を求めようと思うと計算可能なのは最初の有限個だけであるから どれだけ良い値が得られるかは実際に計算を実行してみなければわからない。$\lambda=1$ の場合我々の所の計算機の能力の限界まで計算した結果は 以下にみるように (3.9) (3.10) (4.15) (4.16) に比較して格段に良い結果を得た。(4.23) (4.24) の不等式の右辺をそれぞれ $\bar{R}_l(\lambda)$, $\bar{S}_l(\lambda)$, 特に $\lambda=1$ のとき $\bar{R}_l(1)=\bar{R}_l$, $\bar{S}_l(1)=\bar{S}_l$ と書くことにする。

$0 \leq l \leq 46$ の範囲で $\bar{R}_l$, $\bar{\rho}_l$ は単調減少であって

$$\bar{R}_{45} = 2.665680727\,47$$

$$\bar{\rho}_{46} = 2.60813485108$$

したがって十分なゆとりをもって下の評価が主張できる。

(4.27) $\quad R \leq 2.666$

(4.28) $\quad \rho \leq 2.609$

§5 非線型変形ベッセル方程式とみなしての評価.

(1.16) (1.17) は非線型変形ベッセル方程式とみなせる。

(5.1) $$\begin{cases} \zeta = \dfrac{2\sqrt{2}}{5} z^{\frac{5}{2}} \\ v(z) = 350\,\zeta\, V(\zeta), \quad w(z) = 275\,\zeta\, W(\zeta) \end{cases}$$

とおくと (1.16), (1.17) は

(5.2) $$V'' + \frac{1}{\zeta} V' - \left(1 + \frac{1}{25\zeta^2}\right) V = \frac{A}{4}\zeta + \frac{1}{\zeta} V^2$$

$$(5.3)\quad W'' + \frac{1}{\xi}W' - \left(1 + \frac{49}{25\xi^2}\right)W = \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{\xi}W^2$$

となるが 非線型項を含む右辺を非斉次項とみて それぞれ 1/5 次 および 7/5 次変形ベッセル方程式である。非線型方程式 (1.16) (1.17) を無限個の線型方程式 (1.24)(1.25) に分解して考える。微分作用素 L および M に対する基本解 $\{I_R(z), K_R(z)\}$, $\{I_S(z), K_S(z)\}$ を次のようにえらぶ

$$(5.4)\quad \begin{cases} I_R(z) = z^{\frac{1}{2}} I_{1/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} z^{\frac{5}{2}}\right) \\ K_R(z) = z^{\frac{1}{2}} K_{1/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} z^{\frac{5}{2}}\right) \end{cases}$$

$$(5.5)\quad \begin{cases} I_S(z) = z^{\frac{1}{2}} I_{7/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} z^{\frac{5}{2}}\right) \\ K_S(z) = z^{\frac{1}{2}} K_{7/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} z^{\frac{5}{2}}\right) \end{cases}$$

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ は ν次変形ベッセル関数である。
それぞれのロンスキアンは次のようになる。

$$(5.6)\quad I_R'(z)K_R(z) - I_R(z)K_R'(z) = \frac{5}{2}$$

$$(5.7)\quad I_S'(z)K_S(z) - I_S(z)K_S'(z) = \frac{5}{2}$$

(1.24) (1.25) を定数変化法で解いて

$$(5.8)\quad v_0(z) = A_R I_R(z) - \frac{112}{5}\left[I_R(z)\int_z^\infty K_R(t)t^6 dt + K_R(z)\int_0^z I_R(t)t^6 dt\right]$$

$$(5.9)\quad w_0(z) = A_S I_S(z) - \frac{88}{5}\left[I_S(z)\int_z^\infty K_S(t)t^6 dt + K_S(z)\int_0^z I_S(t)t^6 dt\right]$$

となる。ただし定数 A_R, A_S は

$$(5.10)\quad A_R = 2^{-\frac{3}{2}}5^3\Gamma(\tfrac{12}{5})\Gamma(\tfrac{13}{5}) = \frac{336\pi}{5\sqrt{5+\sqrt{5}}} \fallingdotseq 78.481596$$

$$(5.11)\quad A_S = 2^{-\frac{3}{2}}5^3\Gamma(\tfrac{9}{5})\Gamma(\tfrac{16}{5}) = \frac{264\pi}{5\sqrt{5-\sqrt{5}}} \fallingdotseq 99.774627$$

と計算されるが これは次の W. B. Ford の公式による。

$$(5.12)\quad {}_1F_2(1;p,q;z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\sqrt{\pi}} z^{\frac{3}{4}-\frac{p+q}{2}} e^{2z^{\frac{1}{2}}}$$

同様に

$$(5.13)\quad v_{k+1}(z) = \frac{1}{140}\int_0^z\left[I_R(z)K_R(t) - I_R(t)K_R(z)\right]\sum_{k_1+k_2=k} v_{k_1}(t)v_{k_2}(t)\,dt$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

$$(5.14)\quad w_{k+1}(z) = \frac{1}{110}\int_0^z\left[I_S(z)K_S(t) - I_S(t)K_S(z)\right]\sum_{k_1+k_2=k} w_{k_1}(t)w_{k_2}(t)\,dt$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

を得る。

$$I_R(t),\ K_R(t),\ I_\rho(t),\ K_\rho(t) > 0 \quad (t>0)$$

$$I_R(z)K_R(t) - I_R(t)K_R(z) > 0,\ I_\rho(z)K_\rho(t) - I_\rho(t)K_\rho(z) > 0 \quad (0<t<z)$$

に注意すると $x \geq 0$ のとき次の不等式を得る。

$$(5.15) \qquad v_0(x) \leq A_R I_R(x)$$

$$(5.16) \qquad v_{k+1}(x) \leq \frac{1}{140} I_R(x) \int_0^x K_R(t) \sum_{k_1+k_2=k} v_{k_1}(t) v_{k_2}(t)\, dt \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$(5.17) \qquad w_0(x) \leq A_\rho I_\rho(x)$$

$$(5.18) \qquad w_{k+1}(x) \leq \frac{1}{110} I_\rho(x) \int_0^x K_\rho(t) \sum_{k_1+k_2=k} w_{k_1}(t) w_{k_2}(t)\, dt \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

次の量

$$(5.19) \qquad B_R = \frac{1}{140} \sup_{t>0} \frac{K_R(t) I_R^2(t)}{\frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{2}} I_R(t)\right)} = \frac{1}{140\sqrt{2}} \sup_{s>0} \frac{K_{1/5}(s) I_{1/5}^2(s)}{I_{1/5}'(s)}$$

$$(5.20) \qquad B_\rho = \frac{1}{110} \sup_{t>0} \frac{K_\rho(t) I_\rho^2(t)}{\frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{2}} I_\rho(t)\right)}$$

$$= \frac{1}{110\sqrt{2}} \sup_{s>0} \frac{K_{7/5}(s)\, I_{7/5}^2(s)}{I'_{7/5}(s)}$$

が有限となることに注意すると上の不等式(5.15)〜(5.18)より次の不等式が従う。

<u>定理 5.1</u>

定数 A_R, B_R, A_S, B_S を上のように定めると $x \geq 0$ のとき次の不等式が成り立つ。

$$(5.21) \qquad 0 \leq v_k(x) \leq A_R I_R(x) \left[A_R B_R\, x^{-\frac{1}{2}} I_R(x) \right]^k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$(5.22) \qquad 0 \leq w_k(x) \leq A_S I_S(x) \left[A_S B_S\, x^{-\frac{1}{2}} I_S(x) \right]^k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

したがって次の評価を得る。

<u>定理 5.2</u>

$$|z|^{-\frac{1}{2}} I_R(|z|) = I_{1/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} |z|^{\frac{5}{2}}\right) < \frac{1}{|\lambda| A_R B_R}$$

とすると

$$(5.23) \qquad \left| u_R(z,\lambda) \right| \leq u_R(|z|,|\lambda|) \leq$$

$$\leq \frac{1}{6}|z|^3 + \frac{1}{336} |\lambda| A_R I_R(|z|) \left[1 - |\lambda| A_R B_R |z|^{-\frac{1}{2}} I_R(|z|) \right]^{-1}$$

$$|z|^{-\frac{1}{2}} I_S(|z|) = I_{7/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}|z|^{\frac{5}{2}}\right) < \frac{1}{|\lambda| A_S B_S}$$

とすると

$$(5.24) \quad \left|u_S(z,\lambda)\right| \leq u_S(-|z|,|\lambda|) \leq$$

$$\leq |z|^{-2} + \frac{1}{6}|z|^3 + \frac{1}{264}|\lambda| A_S I_S(|z|)\left[1 - |\lambda| A_S B_S |z|^{-\frac{1}{2}} I_S(|z|)\right]^{-1}$$

又収束半径 $R(\lambda)$, $S(\lambda)$ は次の等式をみたす。

$$(5.25) \quad I_{1/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} R(\lambda)^{\frac{5}{2}}\right) \geq \frac{1}{|\lambda| A_R B_R}$$

$$(5.26) \quad I_{7/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} S(\lambda)^{\frac{5}{2}}\right) \geq \frac{1}{|\lambda| A_S B_S}$$

ここ $\lambda \to +0$ とすると $R(\lambda), S(\lambda) \to +\infty$ となるが

$$I_{1/5}(z), \; I_{7/5}(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \qquad (z \to +\infty)$$

なる漸近挙動が知られている（ついでに この公式も W. B. Ford の公式から従う）のでよの (5.25) (5.26) から次の評価が従う。

定理 5.3

適当な $\lambda_0 > 0$ をとると

$$(5.27)\qquad R(\lambda),\ S(\lambda) \geq \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\log\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2}{5}} \qquad (0<\lambda\leq\lambda_0)$$

が成り立つ。

今までの結果 (2.3) (2.4) (4.13) (4.14) (4.17) (5.2) を合わせて

定理

const. は適当な正定数を表わすものとすると次の不等式が成り立つ

$$\mathrm{const}\ |\lambda|^{-\frac{1}{10}} \leq R(\lambda),\ S(\lambda) \leq \mathrm{const}\ |\lambda|^{-\frac{1}{10}} \qquad (|\lambda|\geq\lambda_0)$$

$$\mathrm{const}\left(\log\frac{1}{|\lambda|}\right)^{\frac{2}{5}} \leq R(\lambda),\ S(\lambda) \leq \mathrm{const}\left(\log\frac{1}{|\lambda|}\right)^{\frac{2}{5}} \qquad (|\lambda|\leq\lambda_0)$$

これらは

$$v(z,\lambda) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}\, z^{5j+10k+8}\lambda^{k+1}$$

$$w(z,\lambda) = \sum_{j,k=0}^{\infty} b_{jk}\, z^{5j+10k+8}\lambda^{k+1}$$

を2変数 (z,λ) のべき級数とみたときの関連収束半径 $(R(\lambda),\lambda)$ $(S(\lambda),\lambda)$ $(\lambda>0)$ にかんする十分満足の行く結論であろう。このように精密な結論が得られるという意味で方程式 (1.1) も Painlevé I型方程式と同様に

十分興味ある研究対象といえるであろう。

R, ρ を評価するという本筋にもどろう。(5,25)(5,26)において $\lambda=1$ とすると

$$(5,28) \qquad I_{1/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} R^{\frac{5}{2}}\right) \geq \frac{1}{A_R B_R}$$

$$(5,29) \qquad I_{7/5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} \rho^{\frac{5}{2}}\right) \geq \frac{1}{A_\rho B_\rho}$$

なる評価を得る。これらは R, ρ に対する下からの評価であるが実際に数値をもとめるには B_R, B_ρ を数値的に求めなければならない。これは目下実行中で結論に至っていない。しかし上の評価は W. B. Ford の公式という定量的にみても大変優れた公式に基づいているし途中の評価もどこもさしたるぜいたくはしていない。(2,5), (2,6) よりかなり良い結果が得られるものと期待している。

最後に、シンポジウムでは Painlevé II型方程式にも言及したが ここでは紙数もつきたので省略する。

数値計算をしていただいた野田松太郎氏に感謝しつつ筆をおく。

(10) の証明はやさしいので省略した。