

完全流体中の剛体運動 と \mathcal{J} -公式

(H. Weber の古典的仕事の紹介)
数 理 学 青 本 和 彦

これから述べる H. Weber の仕事^[6]は
今から 1 世紀前の仕事であるが、私がこれに
興味を持った理由は次の 4 つ である:

1) \mathcal{J} の 加法公式 は 抽象的数学 の
公式であるが、これを 力学の運動 として理
解すること;

2) 近年盛んに研究されている、非線
型の可積分系^{の多くは}、何らかの意味で 調和関
数の変形 に関連している。完全流体中の
剛体運動も又そうである;

3) ヤコビの逆問題 を通じて、求積
法 の何たるかをさらに掘り下げたこと;

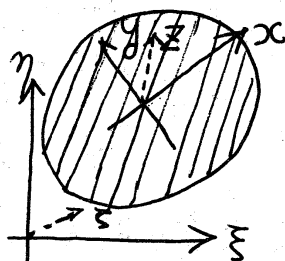
4) Kummer 曲面との関連において、
微分幾何的側面 (線叢の理論, 焦曲面
の概念) を明らかにすること;

§1. Kirchhoff の方程式

粘性完全流体の中を無重力状態で剛体 \mathcal{B} が運動しているとする。 \mathcal{B} の重心を、空間 X に固定した座標 (ξ, η, ζ) で測り、 (α, β, γ) とする。 \mathcal{B} の重心を原点として、 \mathcal{B} に固定された座標系を (x, y, z) とおく。

すると

$$(1.1) \quad \begin{cases} \xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}$$



ここで行列

$$(1.2) \quad g = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

上記は $\mathcal{S} = \sigma + g \cdot \mathcal{X}$

$$\sigma = {}^t(\alpha, \beta, \gamma), \quad \mathcal{X} = {}^t(x, y, z), \quad \mathcal{S} = {}^t(\xi, \eta, \zeta)$$

と書かれる。今 g の時間微分 \dot{g} を用いて

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \bar{g}^{-1} \dot{\sigma}, \quad \bar{g}^{-1} \cdot \dot{g} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. Ω の外側は 完全流体 だから,
 その速度分布は 速度ポテンシャルを用いて
 表示される. Ω が 渦なし だから それは
 調和的である. Ω の境界での境界条件
 を考慮すれば Ω と Ω の合成
 系の全運動エネルギー T は

$$(14) \quad 2T = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + \\
 + 2a_{14}up + 2a_{15}uq + 2a_{16}ur + a_{22}v^2 + \dots \\
 \dots + a_{66}r^2,$$

よって与えられる [4] p248. 運動方程式
 は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} = \rho \frac{\partial T}{\partial w} - r \frac{\partial T}{\partial v},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} = r \frac{\partial T}{\partial u} - \rho \frac{\partial T}{\partial w},$$

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial w} = \rho \frac{\partial T}{\partial v} - q \frac{\partial T}{\partial u},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} = v \frac{\partial T}{\partial w} - w \frac{\partial T}{\partial v} + q \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial q},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} = w \frac{\partial T}{\partial u} - u \frac{\partial T}{\partial w} + r \frac{\partial T}{\partial p} - \rho \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = u \frac{\partial T}{\partial v} - v \frac{\partial T}{\partial u} + p \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial p}$$

である [4] p245. (1,5) は 次の 3つの初等積分を持つ.

$$(1,6) \quad \begin{cases} 2T = L, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M, \\ \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w} \frac{\partial T}{\partial r} = N \end{cases}$$

(但し L, M, N は 常数)

T の形 からわかるように (1,6) の 3つの方程式は 各々 2次式を表わす. 従って (1,6) は 6次元 アイン空間 \mathbb{R}^6 の中で一般に 3次元 多様体 V を定義する.

さらに, (1,3) からよって, 次の初等積分を得る.

$$(1,7) \quad \begin{cases} 2T = h_1 \\ \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w} = k, \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w} = k', \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w} = k'', \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = l + \beta k'' - \gamma k', \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = l' + \gamma k - \alpha k'', \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = l'' + \alpha k' - \beta k \end{array} \right.$$

(但し $h_1, k, k', k'', l, l', l''$ は常数)

以下 次の 2つの仮定をする

(C₁) k は xy -平面, yz -平面, zx -平面
 K について対称, γ

(C₂) $k' = k'' = 0, l = l' = l'' = 0$

これは k の初期状態が角速度 0 ならば充たされる。(C₁) は又次を意味する。

(C₁') $2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + A_1u^2 + B_1v^2 + C_1w^2$

この時 Kirchhoff 方程式 (1.3)(1.5) は次の
 ように書き表わされる:

$$(1.8) \left\{ \begin{array}{l} A\dot{p} = (C-B)qr + \frac{k^2(C-B_1)}{C_1B_1} \alpha_2\alpha_3, \\ B\dot{q} = (A-C)rp + \frac{k^2(A_1-C_1)}{A_1C_1} \alpha_3\alpha_1, \\ C\dot{r} = (B-A)pq + \frac{k^2(B_1-A_1)}{B_1A_1} \alpha_1\alpha_2 \end{array} \right.$$

$$(1,9) \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_1 = q\alpha_3 - r\alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 = r\alpha_1 - p\alpha_3 \\ \dot{\alpha}_3 = p\alpha_2 - q\alpha_1 \end{cases}$$

これらの初等積分として
 $Au = k\alpha_1$, $Bv = k\alpha_2$, $Cw = k\alpha_3$

$$(1,10) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = l + \frac{A_1 C_1 B}{k^2(A_1 - C_1)} q^2 - \frac{B_1 A_1 C}{k^2(B_1 - A_1)} r^2, \\ \alpha_2^2 = m + \frac{B_1 A_1 C}{k^2(B_1 - A_1)} r^2 - \frac{C_1 B_1 A}{k^2(C_1 - B_1)} p^2, \\ \alpha_3^2 = n + \frac{C_1 B_1 A}{k^2(C_1 - B_1)} p^2 - \frac{A_1 C_1 B}{k^2(A_1 - C_1)} q^2 \end{cases}$$

$$l + m + n = 1 \quad (\text{i.e. } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1)$$

$$(1,11) \quad A\alpha_1 p + B\alpha_2 q + C\alpha_3 r = 0$$

従て Kirchhoff 方程式は (1,8), (1,10), (1,11)
 に簡約され. (仮定 (C₁) (C₂) の下で)

~~さて (1,10) (1,11) は座標 (p, q, r~~
 ~~\mathbb{R}^3 の中の二次元曲面 \tilde{S} を定義する. 与え~~
~~座標 $(p^2, q^2, r^2, 1) = (x, y, z, 1)$ によって~~
~~曲面 (Kummer 曲面と呼ばれる) S~~

我々は問題を解きやすくするために、与え

次の仮定をおく.

$$(C_3) \quad AA_1(C_1 - B_1) + BB_1(A_1 - C_1) + CC_1(B_1 - A_1) = 0$$

この時 $(1, 10), (1, 11)$ は座標 $(p, q, r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ によって \mathbb{R}^6 の中の 2次元曲面 S^2 を定義し, 又これから $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を消去する事によつて, 座標 $(p^2, q^2, r^2, 1) = (x, y, z, 1)$ によつて \mathbb{R}^3 の中の 2次元曲面 S を定義する. S は方程式として

$$(4.2) \quad 0 = A \sqrt{\left(1 + \frac{A_1 C_1 B_1}{k^2(A_1 - C_1)} y - \frac{B_1 A_1 C_1}{k^2(B_1 - A_1)} z\right) x} + \\ + B \sqrt{\left(m + \frac{B_1 A_1 C_1}{k^2(B_1 - A_1)} z - \frac{C_1 B_1 A_1}{k^2(C_1 - B_1)} x\right) y} + C \sqrt{\left(n + \frac{C_1 B_1 A_1}{k^2(C_1 - B_1)} x - \frac{A_1 C_1 B_1}{k^2(A_1 - C_1)} y\right) z}$$

と表わされるが, これはよく知られた Kummer 曲面の方程式である [7] p.341 参照.

§2. ヤコビ多様体上の直線運動

補題 1. $(1, 10), (1, 11)$ をみたす $(p, q, r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

は

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^2 = \frac{(\delta_1 - x_1)(\delta_1 - x_2)}{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta)} \\ \alpha_2^2 = \frac{(\delta_2 - x_1)(\delta_2 - x_2)}{(\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_1)} \\ \alpha_3^2 = \frac{(\delta_3 - x_1)(\delta_3 - x_2)}{(\delta_3 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_2)} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{(\delta_1 - \delta_4)(\delta_1 - \delta_5)}{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)} \\ m = \frac{(\delta_2 - \delta_4)(\delta_2 - \delta_5)}{(\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_1)} \\ n = \frac{(\delta_3 - \delta_4)(\delta_3 - \delta_5)}{(\delta_3 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_2)} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & p \frac{\sqrt{ABC_1}}{\sqrt{R^2(C_1-B_1)}} = \frac{\sqrt{1,4,5,x_1} \sqrt{2,3,x_2} - \sqrt{1,4,5,x_2} \sqrt{2,3,x_1}}{(x_1-x_2) \sqrt{\Delta}} \\
 & q \frac{\sqrt{BC_1A_1}}{\sqrt{R^2(A_1-C_1)}} = \frac{\sqrt{2,4,5,x_1} \sqrt{3,1,x_2} - \sqrt{2,4,5,x_2} \sqrt{3,1,x_1}}{(x_1-x_2) \sqrt{\Delta}} \\
 & r \frac{\sqrt{CA_1B_1}}{\sqrt{R^2(B_1-A_1)}} = \frac{\sqrt{3,4,5,x_1} \sqrt{1,2,x_2} - \sqrt{3,4,5,x_2} \sqrt{1,2,x_1}}{(x_1-x_2) \sqrt{\Delta}}
 \end{aligned}$$

とある事が本来る。但し

$$\Delta = (\delta_2 - \delta_3)(\delta_3 - \delta_1)(\delta_1 - \delta_2),$$

$$\sqrt{\nu, j, k, x} = \sqrt{(\delta_i - x)(\delta_j - x)(\delta_k - x)},$$

$$\sqrt{\nu, j, x} = \sqrt{(\delta_i - x)(\delta_j - x)}$$

である。

故に

系 種数 2 の超楕円曲線

$$(2.4) \quad \mathcal{L} \quad y = R(x) = \sqrt{(x-\delta_1)(x-\delta_2)(x-\delta_3)(x-\delta_4)(x-\delta_5)}$$

を考える時, $\tilde{\mathcal{S}}$ は \mathcal{L} のヤコビ多様体 $J(\mathcal{L})$ に同型である。

實際上記補題によつて $\tilde{\mathcal{S}}$ は \mathcal{L} の対称積に等しく, それは $J(\mathcal{L})$ に

等しい。

補題2. 運動方程式 (1.8) (1.9) は座標 (x_1, x_2) を用いて表示すれば

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{R(x_1)} + \frac{dx_2}{R(x_2)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu} dt \\ \frac{x_1 dx_1}{R(x_1)} + \frac{x_2 dx_2}{R(x_2)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu} \nu dt \end{cases}$$

但し $\delta_1 = \frac{\mu}{A} + \nu$, $\delta_2 = \frac{\mu}{B} + \nu$, $\delta_3 = \frac{\mu}{C} + \nu$ と表わされる。 故に

定理1. 運動方程式 (1.8) (1.9) はヤコビ多様体 $J(\mathcal{L})$ 上で直線運動を定義する。

§3. アベル積分とJ-関数

v_1, v_2 を アベル積分

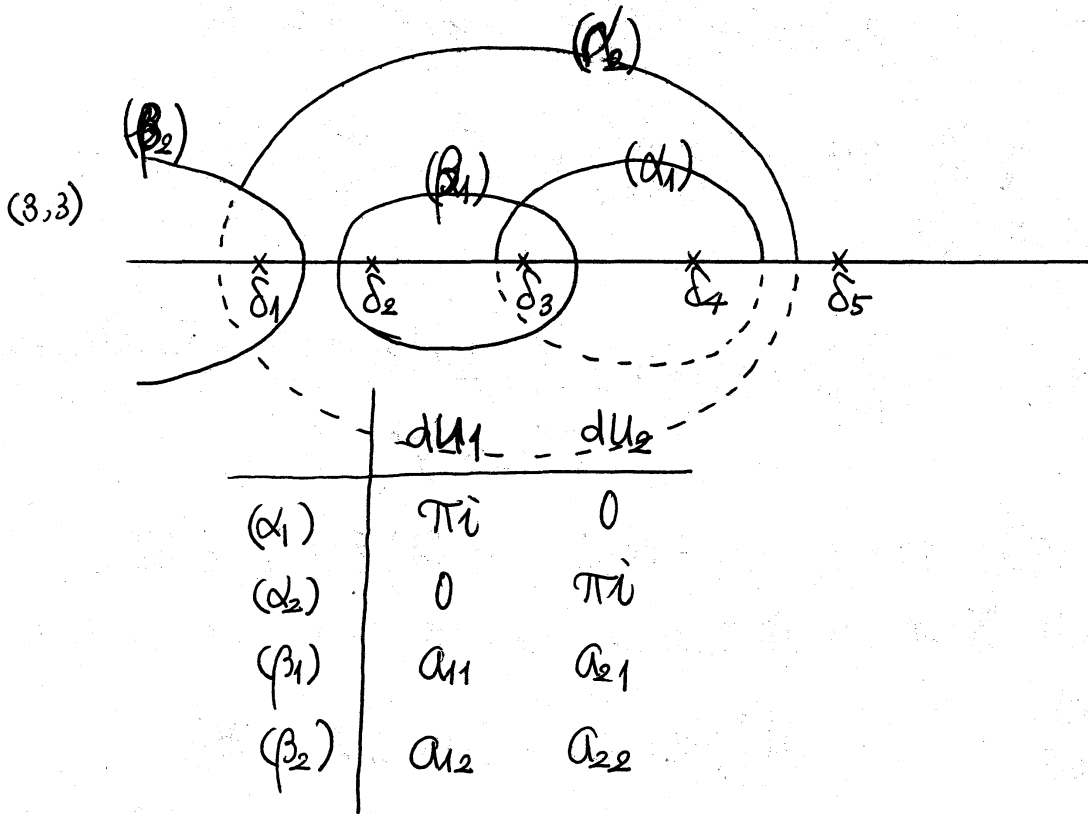
$$(3.1) \quad \begin{cases} v_1 = \int_{x_1}^{\delta_2} du + \int_{x_2}^{\delta_4} du, \\ v_2 = \int_{x_1}^{\delta_2} du_2 + \int_{x_2}^{\delta_4} du_2 \end{cases}$$

ここで 第1種微分

$$(3.2) \quad du = \frac{a_1 + b_1 x}{R(x)} dx, \quad du_2 = \frac{a_2 + b_2 x}{R(x)} dx$$

輪体 $(\alpha_1)(\alpha_2)(\beta_1)(\beta_2)$ に関して

は正規化された周期系を持つものとする。



さて $(p, q, r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ を u_1, u_2 の関数として表わす事を考える。これはヤコビの逆問題に他ならず、 ψ -関数の商として

表示される。そのために \mathcal{J} -関数 K について述べる。実部が負定値 2 次の対称行列 $((a_{ij}))$ の 2 次形式

$$(3.4) \quad \varphi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

と特性 $(\omega) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ を用いて 16 個の \mathcal{J} -関数

$$(3.5) \quad \mathcal{J} \left\{ \begin{matrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{matrix} \right\} (u_1, u_2) = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{\varphi(n_1 + \frac{1}{2}g_1, n_2 + \frac{1}{2}g_2) + \sum (n_i + \frac{g_i}{2})(2u_i + 2h_i\pi i)}$$

は定義されるが、そのうち奇関数は 6 個、偶関数が 10 個である。これは次の記号で表示される。

$$(3.6) \quad \mathcal{J} \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} (u_1, u_2) = \mathcal{J}(u_1, u_2) \quad (\text{偶})$$

$$(3.7) \quad \left\{ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6 \right\} = \begin{pmatrix} 10 & 01 & 11 & 10 & 01 & 11 \\ 11 & 01 & 10 & 10 & 01 & 01 \end{pmatrix} \quad (\text{奇})$$

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{matrix} (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,4) & (3,5) & (3,6) \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{偶})$$

(i, j) は $(\beta_i + \beta_j)$ の意味。

これは基本的である。

補題 3. i) $(\gamma) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$ とする

特性 k に対して $\mathcal{D}^2\{\gamma_j\}(\omega)$ $0 \leq j \leq 3$ は線型独立

ii) 次の 2 種類の Göpel 関係式 が成り立つ。

$$(3.9) \quad \mathcal{D}^2\{\gamma_0\} \mathcal{D}^2\{\omega\}(\omega) = \sum_{i=0}^3 (-1)^{\sum(\nu^{(0)} + \nu^{(i)})} (\mu^{(i)} + h) \mathcal{D}^2\{\gamma_0 + \gamma_i + \omega\} \mathcal{D}^2\{\gamma_i\}(\omega),$$

$$(3.10) \quad \sum_{i=1}^3 (-1)^{\sum \mu^{(i)} \nu^{(i)}} \mathcal{D}\{\gamma_i + \gamma_4 + \gamma_6\} \mathcal{D}\{\gamma_i + \gamma_5 + \gamma_6\} \cdot$$

$$\mathcal{D}\{\gamma_i + \gamma_4 + \gamma_5\}(\omega) \cdot \mathcal{D}\{\gamma_i\}(\omega) = 0$$

但し $\omega = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$, $(\gamma_i) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(i)} & \nu_2^{(i)} \\ \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} \end{pmatrix}$ とする。

iii) (Riemann の \mathcal{D} -加法公式 の微分形)

$$(3.11) \quad \mathcal{D}\{\gamma_0\} \mathcal{D}\{\gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_5\} \left[\mathcal{D}\{\gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_5\}(\omega) \cdot D \mathcal{D}\{\gamma_0\}(\omega) - \mathcal{D}\{\gamma_0\}(\omega) \cdot D \mathcal{D}\{\gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_5\}(\omega) \right] =$$

$$= (-1)^{\sum(\mu^{(5)} + \mu^{(6)})} (\nu^{(4)} + \nu^{(5)}) \mathcal{D}\{\gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_6\} \cdot \{\gamma_4\} \cdot \mathcal{D}\{\gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_6\}(\omega) \mathcal{D}\{\gamma_4\}(\omega)$$

$$+ (-1)^{\sum(\mu^{(4)} + \mu^{(6)})} (\nu^{(4)} + \nu^{(6)}) \mathcal{D}\{\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_6\} \cdot D \mathcal{D}\{\gamma_5\} \cdot \mathcal{D}\{\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_6\}(\omega) \cdot \mathcal{D}\{\gamma_5\}(\omega),$$

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad & \vartheta(\gamma_2 + \gamma_5 + \gamma_6) \vartheta(\gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_6) \left[\vartheta(\gamma_0)(u) \cdot D\vartheta(\gamma_1)(u) - \right. \\
 & \left. - \vartheta(\gamma_1) D\vartheta(\gamma_0)(u) \right] = \\
 & = \vartheta(\gamma_0) D\vartheta(\gamma_1) \vartheta(\gamma_2 + \gamma_5 + \gamma_6)(u) \vartheta(\gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_6)(u) + \\
 & + (-1)^{\sum \mu^{(i)}(\nu^{(5)} + \nu^{(6)})} \vartheta(\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_6) D\vartheta(\gamma_4) \vartheta(\gamma_2)(u) \vartheta(\gamma_3)(u),
 \end{aligned}$$

但し ここで $\vartheta(\gamma)$ は $\vartheta(\gamma)(0,0)$ を意味し,
 $D\vartheta(\gamma)(u)$ は $(a_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial u_2}) \vartheta(\gamma)(u)$
 $(a_1, a_2 \text{ 常数})$ を意味する。

Riemann の Abel 関数の公式により

補題 4.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{(\delta_1 - x_1)(\delta_1 - x_2)}{(\delta_1 - \delta_3)(\delta_1 - \delta_5)}} = \frac{\vartheta_{1,4} \vartheta_{1,4}(u)}{\vartheta \vartheta(u)} \\
 & \sqrt{\frac{(\delta_2 - x_1)(\delta_2 - x_2)}{(\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_5)}} = \frac{\vartheta_{1,4} \vartheta_6(u)}{\vartheta_{1,5} \vartheta(u)} \\
 (3.13) \quad & \sqrt{\frac{(\delta_3 - x_1)(\delta_3 - x_2)}{(\delta_3 - \delta_5)(\delta_3 - \delta_1)}} = \frac{\vartheta_{2,4} \vartheta_{2,4}(u)}{\vartheta \vartheta(u)} \\
 & \sqrt{\frac{(\delta_4 - x_1)(\delta_4 - x_2)}{(\delta_4 - \delta_5)(\delta_4 - \delta_1)}} = \frac{\vartheta_{2,4} \vartheta_5(u)}{\vartheta_{2,6} \vartheta(u)}
 \end{aligned}$$

$$\frac{(d_5 - x_1)(d_5 - x_2)}{(d_5 - d_1)(d_5 - d_3)} = \frac{v_{3,4} v_{3,4}(u)}{v v(u)}$$

従って (2,1) より

$$(3,14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{v_{1,4} v_{1,4}(u)}{v v(u)} \\ \alpha_2 = \frac{v_{2,4} v_{2,4}(u)}{v v(u)} \\ \alpha_3 = \frac{v_{3,4} v_{3,4}(u)}{v v(u)} \end{array} \right.$$

方程式 (1,9) (1,11) より

$$(3,15) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\dot{v}_1 v_1(u)}{v v(u)} \\ q = \frac{\dot{v}_2 v_2(u)}{v v(u)} \\ r = \frac{\dot{v}_3 v_3(u)}{v v(u)} \end{array} \right.$$

そこで $\dot{v}_j = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \right) v_j(0)$, a_1, a_2 は
ヤコビ多様体 $J(\mathcal{L})$ 上の直線運動

$$(3,16) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 t + b_1 \\ v_2 = a_2 t + b_2 \end{array} \right.$$

の速度を表わす。同様に

$$(3.17) \quad \dot{g} g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & r' & -q' \\ -r' & 0 & p' \\ q' & -p' & 0 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} g^{-1}$$

を双対な角速度とすれば

$$(3.18) \quad p' = \frac{D_4 D_4(u)}{D D(u)}, \quad q' = \frac{D_5 D_5(u)}{D D(u)}, \quad r' = \frac{D_6 D_6(u)}{D D(u)}$$

と表わされる。故に

定理 2. 運動方程式 (1.8) (1.9) は Riemann の D -加法公式^{の微分形}の直接の帰結であり, (1.10) (1.11) は Göpel 関係式より得られる。

(注意) Riemann の D -加法公式の微分形はその形から明らかのように 広田の双線型形式で表わされている [8] 参照。

§4. 雑談

座標 (p, q, r, p', q', r') の間には

$$(4.1) \quad p^2 + q^2 + r^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2$$

の関係が成り立つ。実はこれは Kummer 曲面を焦曲面とする線叢をなしており, 線叢の焦曲面を与える F.Klein の

方程式 (Plücker 座標 P_{ij} によって)

$$(4.2) \quad 0 = dP_{01} dP_{23} - dP_{02} dP_{13} + dP_{03} dP_{12}$$

を用いて アーベル 積分 (3.2) を導き出せる事が知られている ([3] [5] 参照).

$$\begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \text{ は } SO(3) \text{ の Lie 環の元}$$

と思われるが, $SO(3)$ の普遍被覆 $SU(2)$ のそれとも思われる. 方程式

$$g^{-1} \dot{g} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

は

$$(4.3) \quad g^{-1} \dot{g} = \begin{pmatrix} iq & p+ir \\ -p+ir & -iq \end{pmatrix}$$

と書き直される. このとき $g \in SU(2)$ は又 $M \times 1$ の 4元数とも見做される. g は

やはり \mathcal{D} -関数によつて表示される. これは F. Caspary による \mathcal{D} -関数の直交関係式を用いて説明される ([2] 参照).

文献

[1] W. Blaschke, Kinematik und Quaternionen, 1960

[2] F. Caspary, Zur Theorie der Thetafunctionen mit zwei Argumenten, Crelle Jour. 94(1883), 74-86

[3] F. Klein, 全集

[4] G. Kirchhoff, Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, Crelle Jour. 71(1869) 237-273,

[5] 田中俊一, 数学講究録 388(1980),

[6] H. Weber, Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Ann. Bd 14(1879),

[7] —, Über die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen, Crelle Jour. 84(1878) 332-354 ;

[8] 広田良吾, ソリトン理論における直接法, (広大講義録) 1979 ;