

## 2次元 Ising 格子の相関関数

京大数理研 三輪 哲二  
神保 道夫

§1. 2次元 Ising 模型の2点相関関数は、スケール極限において Painlevé 超越関数を用いて表示できる。これが T.T. Wu ら [1] の有名な結果であり、Holonomic Quantum Field の出発点であった。実は、スケール極限へ行く前の本来の Ising 格子上の相関関数も、モノドロミー保存変形理論の枠組で扱えることを示そうというのが本稿の目的である。

臨接相互作用を持つ2次元 Ising 模型の2点相関関数は、相互作用定数を  $E_1, E_2$  とし、次のように定義される:

$$(1.1) \quad \langle \sigma_{00} \sigma_{MN} \rangle = \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_{00} \sigma_{MN} e^{-\beta E(\sigma)}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta E(\sigma)}} \\ E(\sigma) = -E_1 \sum_{\{jk\}} \sigma_j \sigma_{jk} - E_2 \sum_{\{jk\}} \sigma_j \sigma_{kj} .$$

ここに  $\sigma_{jk} = \pm 1$  は、格子点  $(j, k)$  に attach したスピン変数、 $\sum_{\{\sigma\}}$  はあらゆるスピンの配置に関する和を表わし、 $\beta = \frac{1}{kT}$  は逆温度。以下、臨界温度  $T_c$  の上下  $T_{\pm} \gtrless T_c$  において、温度のかわりに次のパラメータ  $t (> 1)$  を用いる。

$$(1.2) \quad t = \left( \sinh \frac{E_1}{kT_-} \sinh \frac{E_2}{kT_-} \right)^2 = \left( \sinh \frac{E_1}{kT_+} \sinh \frac{E_2}{kT_+} \right)^{-2}$$

$t=1$ が $T=T_c$ にあたる。

結果を先に述べておこう。対角線 $M=N$ に限った2点函数 $\langle \sigma_{00} \sigma_{NN} \rangle$ について次のことがわかる([2])。

1°  $t$ の函数として,

$$\sigma_{N,-}(t) = t(t-1) \frac{d}{dt} \log \langle \sigma_{00} \sigma_{NN} \rangle_{T < T_c} - \frac{1}{4}$$

$$\sigma_{N,+}(t) = t(t-1) \frac{d}{dt} \log \langle \sigma_{00} \sigma_{NN} \rangle_{T > T_c} - \frac{1}{4}t$$

とおけば,  $\sigma = \sigma_{N,\pm}$ はともに次の非線型常微分方程式の解。

$$(1.3) \quad \left( t(t-1) \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \right)^2 = N^2 \left( (t-1) \frac{d\sigma}{dt} - \sigma \right)^2 - \frac{d\sigma}{dt} \left( (t-1) \frac{d\sigma}{dt} - \sigma - \frac{1}{2} \right) \left( (t+1) \frac{d\sigma}{dt} - \sigma \right)$$

これは, VI型のPainlevé方程式の特別な場合

$$(1.4) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t} \right) \frac{dy}{dt} \\ + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left( \alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( N - \frac{3}{2} \right)^2, \quad \beta = -\frac{1}{2} \left( N + \frac{1}{2} \right)^2, \quad \gamma = \frac{1}{8}, \quad \delta = \frac{3}{8}$$

と同値である([3] p. 39)。

2°  $N$ の函数として,

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{NN} \rangle_{T < T_c} = t^{-1/4} (t-1)^{1/4} \alpha_{-|N|}$$

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{NN} \rangle_{T > T_c} = -t^{-1/4} (t-1)^{1/4} \gamma_{-|N|}$$

と置き, 補助的に11個の量 $\alpha_N, \beta_N, \gamma_N, \alpha_N^{(\pm)}, \beta_N^{(\pm)}, \gamma_N^{(\pm)}, \delta_N^{(\pm)}$ を導入する。このとき次の非線型差分方程式系が成立つ。

$$(1.5) \quad \alpha_N \alpha_{N-1}^{(\pm)} - \alpha_{N-1} \alpha_N^{(\pm)} - \beta_{N-1} \gamma_{N-1}^{(\pm)} = 0$$

$$\alpha_N \beta_{N-1}^{(\pm)} - \sqrt{t}^{\pm 1} \alpha_{N-1} \beta_N^{(\pm)} - \beta_{N-1} \delta_{N-1}^{(\pm)} = 0$$

$$\sqrt{E}^{-1} \alpha_N \gamma_{N-1}^{(\pm)} - \alpha_{N-1} \gamma_N^{(\pm)} + \gamma_N \alpha_N^{(\pm)} = 0$$

$$\alpha_N \delta_{N-1}^{(\pm)} - \alpha_{N-1} \delta_N^{(\pm)} + \gamma_N \beta_N^{(\pm)} = 0$$

$$(2N+1) \alpha_{NH} \alpha_{N-1} - (2N-1) \alpha_N^2 - \alpha_N^{(+)} \delta_N^{(+)} - \alpha_N^{(-)} \delta_N^{(-)} = 0$$

$$(2N-3) \alpha_N \beta_{N-1} - \sqrt{E}^{-1} \alpha_N^{(+)} \beta_N^{(+)} - \sqrt{E} \alpha_N^{(-)} \beta_N^{(-)} = 0$$

$$(2N-1) \alpha_N \gamma_{N-1} - \gamma_{N-1}^{(+)} \delta_{N-1}^{(+)} - \gamma_{N-1}^{(-)} \delta_{N-1}^{(-)} = 0$$

$$(2N+3) \alpha_N \beta_{NH} - \alpha_{NH}^{(+)} \beta_{NH}^{(+)} - \alpha_{NH}^{(-)} \beta_{NH}^{(-)} = 0$$

$$(2N+1) \alpha_N \gamma_{NH} - \sqrt{E}^{-1} \gamma_N^{(+)} \delta_N^{(+)} - \sqrt{E} \gamma_N^{(-)} \delta_N^{(-)} = 0.$$

3°) 方程式 (1.3), (1.5) はどちらも, スケール極限  $N \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 1$ ,  $|t-1|N = \bar{E} : \text{fixed}$ , において V 型の Painlevé 方程式 (と同等な system) に移行し, 知られた結果 [1][4] と一致する。これらは共に,  $\mathbb{P}^1$  上の線型常微分方程式のモノドロミー保存変形を記述しているのだが, スケール極限の操作は, その確定特異点の合流に対応する。

以上の詳細は, 文献 [2] にまとめられている。次の節で, [2] の背景をなす問題設定を解説することにした。

(注意 1) 対角線  $M=N$  に限, た理由は, VI 型 Painlevé 方程式と関係づけるため, 一般の場合にも (VI 型からはみ出すが) 類似の結果が成立つ。

(注意2) McCoy-Wu [5], Perk [6]らも、 $\langle \sigma_{00} \sigma_{MN} \rangle$ に対する非線型差分方程式系を導いている。彼らの場合、 $M, N$ は一般だが方程式は“一つ”しかなく (“holonomic”でない)、解を特定するためには globalな境界条件が必要となる。一方 (1.5) は  $M=N$  であるが、有限個の初期値から解を決める力も持っている。

§2. 天下りであるが、2次元格子から離れて、次の elliptic curve  $E$  を考えよう。

$$(2.1) \quad 2C_1 C_2 = S_1(z+z^{-1}) + S_2(w+w^{-1})$$

$$C_i = \cosh \beta E_i, \quad S_i = \sinh \beta E_i \quad (i=1, 2)$$

$(z, w)$  は、格子の Fourier 変換の変数にあたる。(2.1) は Euclid 的 mass shell に相当し、 $T \neq T_c$  で非特異な curve を定義する。

今、トーラス (2.1) 上の解析的パラメータ  $u$  を  $du = \frac{dz}{\pi i z(w-w^{-1})}$  で導入し、図のサイクル  $C = C_+ \cup C_-$  上に棲む自由フェルミ場  $\psi(u)$  を考える。

$$(2.2) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (0, \infty) & C_+ & (\infty, \infty) \\ \times & \uparrow & \times \\ L & \text{---} & R \\ \times & & \times \\ (z, w) = (0, 0) & C_- & (\infty, 0) \end{array} \\ \begin{array}{l} C_+ : z = e^{i\theta}, |w| > 1 \\ C_- : z = e^{-i\theta}, |w| < 1 \\ (\theta : 0 \rightarrow 2\pi) \end{array} \end{array}$$

その反交換関係と期待値は

$$(2.3) \quad [\psi(u), \psi(u')]_{\pm} = \delta(u^*, u'), \quad \langle \psi(u) \psi(u') \rangle = \theta_{\pm}(u) \delta(u^*, u')$$

$$\theta_-(u) = \begin{cases} 1 & u \in C_- \\ 0 & u \in C_+ \end{cases}$$

で与えられるものとする。但し,  $*$  :  $E \rightarrow E$  は  $(z, w) \mapsto (\bar{z}', \bar{w}')$  なる involution.

このとき, 一般に  $k$  点の相関関数は, 場の演算子の積の真空期待値の形で書けることが知られている ([7] pp 547-548).

$$(2.4) \quad \langle \sigma_{m_1 n_1} \cdots \sigma_{m_k n_k} \rangle_{\substack{z \in C_- \\ w \in C_+}} = (1 - S_1^{\pm 1} S_2^{\pm 1})^{k/2} \langle \varphi_{m_1 n_1}^{\pm} \cdots \varphi_{m_k n_k}^{\pm} \rangle$$

ここに

$$(2.5) \quad \varphi_{mn}^- = : e^{\rho_{mn}/2} : (= \varphi_{mn} \text{ とおく}), \quad \varphi_{mn}^+ = : \psi_{0, mn} e^{\rho_{mn}/2} :$$

$$\rho_{mn} = \iint_{C \times C} du du' R_{mn}(u, u') \psi(u) \psi(u')$$

$$\psi_{0, mn} = \frac{1}{\sqrt{S_2}} \int_C du z^m w^n \psi(u)$$

$$R_{mn}(u, u') = \frac{w-w'}{1-\bar{z}'z^{-1}} (zz')^m (ww')^n \quad (|z\bar{z}'| < 1 \text{ からの境界値}).$$

さて, サイクル  $C = C_+ \cup C_-$  上で, 次の Fredholm 型積分方程式も考える。

$$(2.6) \quad (1 - RA)W = R, \quad W = W(u, u'), \quad u, u' \in C$$

ここに  $R, A$  は次の積分核をもつ  $k \times k$  行列作用素。

$$(2.7) \quad R(u, u') = \begin{pmatrix} R_{m_1 n_1}(u, u') \\ \vdots \\ R_{m_k n_k}(u, u') \end{pmatrix}$$

$$A(u, u') = (A_{\mu\nu}(u))_{1 \leq \mu, \nu \leq k} \times \delta(u^*, u')$$

$$A_{\mu\nu}(u) = \begin{cases} \lambda_{\mu\nu} \theta_{C_-}(u) & (\mu < \nu) \\ 0 & (\mu = \nu) \\ -\lambda_{\nu\mu} \theta_{C_+}(u) & (\mu > \nu). \end{cases}$$

パラメータ  $\lambda_{\mu\nu}$  は、本来の場合には  $\sigma_{\nu} = 1$  ととる。(2.6) を考える理由は、一般論 [8] から  $\langle \varphi_{m_1 n_1} \dots \varphi_{m_k n_k} \rangle$  がその Fredholm 行列式  $\det(1 - RA)$  になることで了解してもらえらるであろう。

簡単のため  $k=2$ ,  $(m_1, n_1) = (0, 0)$ ,  $(m_2, n_2) = (M, N)$ ,  $\lambda_{12} = \lambda$  としてみよう。(2.6) を Neumann 級数で解いてみると、初めの項は次の如くなる：

$$(2.8) \quad W(u_0^*, u) = \left( \begin{array}{l} \frac{w_0^{-1} - w}{1 - z_0 z^{-1}} - \lambda^2 \int_{C_- C_+} du_1 du_2 \frac{w_0^{-1} - w_1}{1 - z_0 z_1^{-1}} \frac{w_1^{-1} - w_2}{1 - z_1 z_2^{-1}} \frac{w_2^{-1} - w}{1 - z_2 z^{-1}} \left(\frac{z}{z_1}\right)^M \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^N + \dots \quad \lambda \int_C du_1 \frac{w_0^{-1} - w_1}{1 - z_0 z_1^{-1}} \frac{w_1^{-1} - w}{1 - z_1 z^{-1}} \left(\frac{z}{z_1}\right)^M \left(\frac{w}{w_1}\right)^N + \dots \\ -\lambda \int_{C_+} du_1 \frac{w_0^{-1} - w_1}{1 - z_0 z_1^{-1}} \frac{w_1^{-1} - w}{1 - z_1 z^{-1}} \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^M \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^N + \dots \quad \left( \frac{w_0^{-1} - w}{1 - z_0 z^{-1}} - \lambda^2 \int_{C_- C_+} du_1 du_2 \frac{w_0^{-1} - w_1}{1 - z_0 z_1^{-1}} \frac{w_1^{-1} - w_2}{1 - z_1 z_2^{-1}} \frac{w_2^{-1} - w}{1 - z_2 z^{-1}} \left(\frac{z}{z_1}\right)^M \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^N + \dots \right) \left(\frac{z}{z_0}\right)^M \left(\frac{w}{w_0}\right)^N \end{array} \right)$$

$(z, w)$ -依存性は最後の積分にだけある。この表示から明らかのように、 $W(u_0^*, u)$  は  $E - C_+ \cup C_-$  上-価有理型である。(極の位置は  $(z, w) = (z_0, w_0), (0, 0), (0, \infty), (\infty, 0), (\infty, \infty)$  の 5ヶ所)。

今、 $E - C_+ \cup C_-$  の連結成分 (図 (2.2) 参照) 上の  $W(u_0^*, u)$  の分枝を  $W_L, W_R$  と書くことにする。このとき、 $C_+ \cup C_-$  上での jump は、(2.8) から留数計算で容易に求められる。たとえば、

$$(W_L(u_0^*, u))_{11} - (W_R(u_0^*, u))_{11} = -\lambda^2 \int_{C_-} du_1 \frac{w_0^{-1} - w_1}{1 - z_0 z_1^{-1}} \frac{w_1^{-1} - w}{1 - z_1 z^{-1}} 2 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{m_j} \left(\frac{w}{w_1}\right)^{n_j} + \dots$$

$$= -2\lambda (W_R(u_0^*, u))_{12} \quad \text{on } C_+.$$

$L \begin{array}{c} \uparrow C_+ \\ \times \\ \downarrow R \end{array} = L \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \\ \downarrow R \end{array} + \textcircled{\times}$ 
等々。

一般に,  $W$  の行列要素の表示は

$$(2.9) \quad W_{jj'}(u_0^*, u) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^k (-\epsilon_{j_0 j_1} \lambda_{j_0 j_1}) \dots (-\epsilon_{j_{l-1} j_l} \lambda_{j_{l-1} j_l}) \int \dots \int_{C_{j_1} \dots C_{j_l}} du_1 \dots du_l$$

$$\times R_{m_{j_0} n_{j_0}}(u_0^*, u_1) R_{m_{j_1} n_{j_1}}(u_1^*, u_2) \dots R_{m_{j_l} n_{j_l}}(u_l^*, u)$$

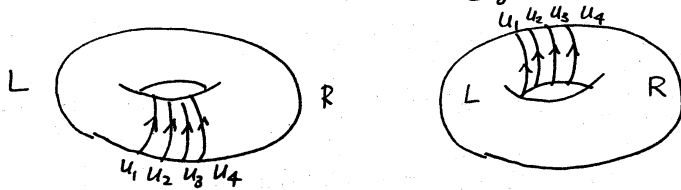
$$= \delta_{jj'} \frac{w_0^{-1} - w}{1 - z_0 z^{-1}} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{m_j} \left(\frac{w}{w_0}\right)^{n_j}$$

$$- \epsilon_{jj'} \lambda_{jj'} \int_{C_{jj'}} du_1 \frac{w_0^{-1} - w_1}{1 - z_0 z_1^{-1}} \frac{w_1^{-1} - w}{1 - z_1 z^{-1}} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{m_j} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{n_j} \left(\frac{z}{z_1}\right)^{m_{j'}} \left(\frac{w}{w_1}\right)^{n_{j'}}$$

$$+ \dots$$

$(j_0=j, j_{k+1}=j'), \epsilon_{jj'} = \begin{cases} +1 & (j > j') \\ 0 & (j = j') \\ -1 & (j < j') \end{cases}, C_{jj'} = C_{\epsilon_{jj'}}$

のようになる。(  $k=2$  のとき以外は, 続けて同じ積分路  $C_{\pm}$  が現われ得るが,  $R_{mn}$  の境界値の規則から, その時は積分変数の番号の若い順に  $L$  側から並べる。 )



(2.9) を用いて, jump が計算できる。

$$(2.10) \quad W_L(u_0^*, u) = W_R(u_0^*, u) (1 - 2^c \Lambda) \quad u \in C_+$$

$$= W_R(u_0^*, u) (1 - 2\Lambda) \quad u \in C_-$$

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda_{k+k} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$





$$(2.12) \quad E \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (z, w) \mapsto z$$

を考へ,  $2k \times 2k$  行列

$$(2.13) \quad Y(z_0; z) = \frac{z - z_0}{z(w_0^{-1} - w_0)} \begin{pmatrix} W(z_0^{-1}, w_0^{-1}; z, w) & W(z_0^{-1}, w_0^{-1}; z, \bar{w}^{-1}) \\ -W(z_0^{-1}, w_0; z, w) & -W(z_0^{-1}, w_0; z, \bar{w}^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$(Y(z_0; z_0) = 1)$$

をとればよい。Y は  $z=0, \infty$  以外に, (2.12) の分岐点  $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \alpha_2, \alpha_2^{-1}$  ( $\alpha_1 = \tanh \beta E_1 \times e^{-2\beta E_2}$ ,  $\alpha_2 = (\tanh \beta E_1)^{-1} \times e^{-2\beta E_2}$ ) に特異点をもつが, それ以外では  $\det Y \neq 0$  となるので, 通常  $\mathbb{P}^1$  上の理論 [9] が適用できる。このときの  $\tau$  関数が相関関数に一致することを見るには, 次の等式を用いる。

$$(2.14) \quad 2d\varphi_{mn} = \sum_{b=\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}} : \phi_{mn}^{(1)}(b) \phi_{mn}^{(2)}(b) e^{\rho_{mn} b^2} : \frac{1}{2} db$$

$$\phi_{mn}^{(1)}(b) = \lim_{(z, w) \rightarrow (b, \pm 1)} \frac{c_b}{z\sqrt{z-b}} (\phi_{mn}(z, w) - \phi_{mn}(z, \bar{w}^{-1}))$$

$$\phi_{mn}^{(2)}(b) = \phi_{mn}(b^{-1}, \pm 1), \quad c_b = \lim_{\bar{w}^{-1} \rightarrow w} \frac{\sqrt{z-b}}{\bar{w}^{-1} - w}$$

(複号は  $b = \alpha_1^{\pm 1}$  のとき -,  $b = \alpha_2^{\pm 1}$  のとき +)

ただし  $\phi_{mn}(u) = \int du_1 R_{mn}(u^*, u_1) \psi(u_1)$ 。

(2.12) 以外にも, 例へば  $(z, w) \mapsto zw$  のようなとり方も可能で, §1 の  $\langle \sigma_{00} \sigma_{NN} \rangle$  についてはこの方が便利であることをつけ加えておく。

## 文献

- [1] T.T.Wu, B.M.McCoy, C.A.Tracy and E.Barouch, *Phys.Rev.B* 13 (1976) 316.
- [2] M.Jimbo and T.Miwa, *Studies on holonomic quantum fields XVII*, RIMS preprint 337 (1980).
- [3] ———, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II*, RIMS preprint 327 (1980).
- [4] ———, *Aspects of holonomic quantum fields*, in Springer L.N. Phys. 126 (1980).
- [5] B.M.McCoy and T.T.Wu, *Non-linear partial difference equations for the two-dimensional Ising model*, preprint ITP-SB-80-26, SUNY (1980).
- [6] J.H.H.Perk, *Quadratic Identities for Ising model correlations*, preprint ITP-SB-80-42, SUNY (1980).
- [7] M.Sato, T.Miwa and M.Jimbo, *Publ.RIMS* 16 (1980) 531.
- [8] ———, *ibid.* 14 (1978) 223.
- [9] M.Jimbo, T.Miwa and K.Ueno, [3]と同題 I, preprint, RIMS 319 (1980).