数理解析研究所講究録
第 414 巻 1981 年 181-202

広田氏の Bilinear Equations について II

京大　数理研　佐藤　幹夫
琉球大　理　佐藤　泰子

ここでは，Korteweg-de Vries 方程式を KdV 方程式，変形 KdV 方程式を MKdV 方程式，Sawada-Kotera KdV 方程式を SK 方程式，Kadomtsev - Petviashvili (又は，2次元 KdV) 方程式を KP 方程式，変形 KP 方程式を MKP 方程式，Nonlinear Schrödinger 方程式を NLS 方程式と略称する。

[1] 分割数

(1)　$p(n) \underset{def}{=}$　n を自然数の和に分ける分け方の数，

(2)　$p^{even}_{odd}(n) \underset{def}{=}$　n を $\begin{matrix}\text{偶数}\\\text{奇数}\end{matrix}$ の和に分ける分け方の数，

(3)　$q(n) \underset{def}{=}$　n を相異なる自然数の和に分ける分け方の数，

(4)　$q^{even}_{odd}(n) \underset{def}{=}$　n を相異なる $\begin{matrix}\text{偶数}\\\text{奇数}\end{matrix}$ の和に分ける分け方の数

とおく。これらの母函数は次で与えられる。

(5)　$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 +$$

$$+ 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + \cdots,$$

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty} p^{\mathrm{even}}(n)\, x^n = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots} = 1 + x^2 + 2x^4 + 3x^6 + 5x^8 + 7x^{10} + 11x^{12} + 15x^{14} + 22x^{16} + 30x^{18} + 42x^{20} + 56x^{22} + 77x^{24} + 101x^{26} + \cdots,$$

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} p^{\mathrm{odd}}(n)\, x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots} = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + 12x^{11} + 15x^{12} + 18x^{13} + 22x^{14} + 27x^{15} + \cdots,$$

(8) $$\sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots,$$

(9) $$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\mathrm{even}}(n)\, x^n = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots = 1 + x^2 + x^4 + 2x^6 + 2x^8 + 3x^{10} + 4x^{12} + 5x^{14} + 6x^{16} + 8x^{18} + 10x^{20} + 12x^{22} + 15x^{24} + 18x^{26} + 22x^{28} + \cdots,$$

(10) $$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\mathrm{odd}}(n)\, x^n = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots = 1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + 3x^{12} + 3x^{13} + 3x^{14} + 4x^{15} + 5x^{16} + 5x^{17} + 5x^{18} + 6x^{19} + \cdots.$$

このとき、

(11) $$\begin{cases} p^{\mathrm{even}}(n) = \begin{cases} p(\frac{n}{2}) & (n : \mathrm{even}) \\ 0 & (n : \mathrm{odd}) \end{cases}, \quad q^{\mathrm{even}}(n) = \begin{cases} q(\frac{n}{2}) & (n : \mathrm{even}) \\ 0 & (n : \mathrm{odd}) \end{cases}, \\ p^{\mathrm{odd}}(n) = q(n) \end{cases}$$

の関係がある。又、これらの量の漸近的評価は、$C \underset{\mathrm{def}}{=} \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ とするとき、

(12) $$\begin{cases} \log p(n) \sim C\sqrt{n}, \quad \log q(n) \sim \log p^{\mathrm{even}}_{\mathrm{odd}}(n) \sim C\sqrt{\frac{n}{2}}, \\ \log q^{\mathrm{even}}_{\mathrm{odd}}(n) \sim C\sqrt{\frac{n}{4}} \qquad (n \to \infty) \end{cases}$$

で与えられる。

[2] KP方程式のLax表示

1階線型擬微分作用素:

(13) $L \underset{\text{def.}}{=} \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \cdots$, $\partial = \frac{\partial}{\partial x_1}$

を考える。擬微分作用素 L^n の integral part で定義される微分作用素を B_n とする: ($u' = \frac{\partial}{\partial x_1} u$ etc.)

(14)
$$
\begin{cases}
B_n \underset{\text{def.}}{=} [L^n]_+ \quad e.g. \ B_0 = 1,\ B_1 = \partial,\ B_2 = \partial^2 + 2u_2,\ B_3 = \partial^3 + 3u_2\partial + \\
+ (3u_3 + 3u_2'),\ B_4 = \partial^4 + 4u_2\partial^2 + (4u_3 + 6u_2')\partial + (4u_4 + 6u_3' + 6u_2^2 + 4u_2''),\ B_5 = \partial^5 \\
+ 5u_2\partial^3 + (5u_3 + 10u_2')\partial^2 + (5u_4 + 10u_3' + 10u_2^2 + 10u_2'')\partial + (5u_5 + 10u_4' + 20u_2u_3 + 20u_2u_2' + 10u_3'' + 5u_2'''), \\
B_6 = \partial^6 + 6u_2\partial^4 + (6u_3 + 15u_2')\partial^3 + (6u_4 + 15u_3' + 15u_2^2 + 20u_2'')\partial^2 + (6u_5 + 15u_4' + 30u_2u_3 \\
+ 45u_2u_2' + 20u_3'' + 15u_2''')\partial + (6u_6 + 15u_5' + 30u_2u_4 + 75u_2u_3' + 35u_2u_2'' + 15u_3^2 + 20u_4'' \\
+ 25u_2'^2 + 20u_2^3 + 15u_3''' + 6u_2''''), \ \cdots\cdots .
\end{cases}
$$

無限個の時間変数 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ を導入し、各 x_j の重みを j と定める。このとき、次の無限連立線型方程式系:

(15) $L\psi = k\psi$, $\frac{\partial}{\partial x_j}\psi = B_j\psi$ $(j=1,2,3,\cdots)$

の積分可能条件:

(16) $\frac{\partial}{\partial x_j} L = [B_j, L] \left(\underset{\text{def.}}{=} B_jL - LB_j\right)$ $(j=1,2,3,\cdots)$

は、L の係数 u_2 に対する高階 KP 方程式系に他ならない。(15) に於いて、L の代りに微分作用素 $L^2 = \partial^2 + u$ の固有値問題を考えると、これが本来の KdV 方程式に対する Lax 表示である。同様に、L の代りに、微分作用素 $L^3 = \partial^3 + u\partial + v$ 及び $L^3 = \partial^3 + u\partial$ を取れば、その可積分条件 (16) として、高階 Boussinesq 方程式系 及び 高階 Sawada-Kotera 方程式系が得られることが知られている。

[3]　KP 方程式の N ソリトン解と双線型 KP 方程式

L の係数は　$u_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log \tau$,　$u_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\right) \log \tau$, …,

(15) の解は　$\psi(x;k) = \frac{\tau_{[k]}(x)}{\tau(x)}$　と表わされる。ここに,

(17)　$\tau(x) = 1 + \sum_i^N a_i e^{\xi_i} + \sum_{i<j}^{\binom{N}{2}} c_{ij} a_i a_j e^{\xi_i + \xi_j} + \cdots + c_{1\cdots N} a_1 \cdots a_N e^{\xi_1 + \cdots + \xi_N}$

は KP 方程式の N ソリトン解であり,

(18)
$$\left\{\begin{aligned} \tau_{[k]}(x) &= e^{kx_1 + k^2 x_2 + \cdots}\Big(1 + \sum_i a_i(k) e^{\xi_i} + \sum_{i<j} c_{ij} a_i(k) a_j(k) e^{\xi_i + \xi_j} + \cdots \\ &\qquad + c_{1\cdots N} a_1(k) \cdots a_N(k) e^{\xi_1 + \cdots + \xi_N}\Big) \\ &= \tau\Big(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, x_3 - \frac{1}{3k^3}, \cdots\Big) e^{kx_1 + k^2 x_2 + \cdots}, \end{aligned}\right.$$

(19)
$$\left\{\begin{aligned} & a_i \in \mathbb{C}, \quad a_i(k) \underset{\mathrm{def.}}{=} a_i \frac{p_i - k}{q_i - k}, \quad c_{ij} \underset{\mathrm{def.}}{=} \frac{(p_i - p_j)(q_i - q_j)}{(p_i - q_j)(q_i - p_j)}, \quad c_{1\cdots r} \underset{\mathrm{def.}}{=} \prod_{i<j}^{\binom{r}{2}} c_{ij}, \\ & \xi(x; p, q) \underset{\mathrm{def.}}{=} (p - q)x_1 + (p^2 - q^2)x_2 + (p^3 - q^3)x_3 + \cdots, \\ & \xi_i \underset{\mathrm{def.}}{=} \xi(x; p_i, q_i), \quad \eta_i \underset{\mathrm{def.}}{=} \xi(t; p_i, q_i) \end{aligned}\right.$$

である。このとき,

(20)
$$\tau(x+t)\tau(x-t) = \sum_{r=0}^{N} \frac{G_r(t; p_1, q_1, \cdots, p_r, q_r)}{\prod_{i<j} (p_i - q_j)(q_i - p_j)} a_1 \cdots a_r e^{\xi_1 + \cdots + \xi_r},$$

(21)
$$\left\{\begin{aligned} & G_r(t; p_1, q_1, \cdots, p_r, q_r) \underset{\mathrm{def.}}{=} \sum_{I \subset \{1,2,\cdots,r\}}^{2^r} \left(\Delta(p_1, \cdots, p_r)\Delta(q_1, \cdots, q_r) e^{\eta_1 + \cdots + \eta_r}\right)^{\sigma(I)}, \\ & G_0(t) \underset{\mathrm{def.}}{=} 1 \end{aligned}\right.$$

となる。$\{p_j, q_j\}$ に注目しているときは $G_1(p_1, q_1)$ のように t を略して書くこともある。

(22) $\Delta(p_1, \cdots, p_r) \underset{\mathrm{def.}}{=} \prod_{i<j}^{\binom{r}{2}} (p_i - p_j)$,　$(\cdot)^{\sigma(I)}$ は $i \in I$ に対して p_i と q_i の入れかえを意味する.

広田微分の意味[1]で，x_j による微分を D_j と記し，D_j の重みも j と定める。 $\tau(x+t)\tau(x-t) = e^{tD_x}\tau\cdot\tau = \sum_{k_1,k_2,\cdots} \frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots}{k_1!k_2!\cdots} D_1^{k_1}D_2^{k_2}\cdots\tau\cdot\tau$ である。

$P(D_x) = P(D_1, D_2, \cdots)$ が，$D_1, D_2, \cdots$ の重み n の斉重多項式のとき bilinear KP 方程式：$P(D_x)\tau\cdot\tau = 0$ が成り立つための必要十分条件は，$N = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$P(\partial_t)G_N(t; p_1, q_1, \cdots, p_N, q_N)|_{t\mapsto 0} = 0$ が成り立つことである。

又，次が成り立つ。

任意のNソリトン解 $\tau(x)$ に対して，双線型方程式 $P(D)\tau\cdot\tau = 0$ が成り立てば，一般解 $\tau(x)$ に対しても，同じ方程式が成り立つ。

同様に，

$$\tau_{[k]}(x+t)\tau(x-t) = e^{kx_1+k^2x_2+\cdots} e^{kt_1+k^2t_2+\cdots} \sum_{r=0}^{N} \frac{G_r^*(t; k; p_1, q_1, \cdots, p_r, q_r)}{\prod_{i<j}(p_i - q_j)(q_i - p_j)} \cdot \frac{a_1}{q_1 - k} \cdots \frac{a_r}{q_r - k} e^{\xi_1 + \cdots + \xi_r}, \tag{23}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & G_r^*(t; k; p_1, q_1, \cdots, p_r, q_r) \underset{\mathrm{def.}}{=} \sum_{I \subset \{1,2,\cdots,r\}}^{2^r} \left(\Delta(p_1, \cdots, p_r)\Delta(q_1, \cdots, q_r)(p_1 - k)\cdots(p_r - k) e^{\eta_1 + \cdots + \eta_r} \right)^{\sigma(I)}, \\ & G_0^*(t; k) \underset{\mathrm{def.}}{=} 1 \end{aligned} \right. \tag{24}$$

である。

$$G_{N+1}^*(t; 0; p_1, q_1, \cdots, p_N, q_N, k, 0) = k p_1 \cdots p_N q_1 \cdots q_N e^{kt_1 + k^2 t_2 + \cdots} G_N^*(t; k; p_1, q_1, \cdots, p_N, q_N) \tag{25}$$

だから，

$Q(D)$ を $D_1, D_2, \cdots$ の重み n の斉重多項式とするとき，bilinear MKP 方程式：$Q(D)\tau_{[k]}\cdot\tau = 0$ が成り立つ為の必要十分条件は，$N =$

$0, 1, 2, \cdots$ に対して, $Q(\partial_t) G^*_{N+1}(t; 0; p_1, q_1, \cdots, p_N, q_N, k, 0)\big|_{t\mapsto 0} = 0$ が成り立つことである。更に, k を含む作用素 $Q(D; k)$ に対して, 2組の bilinear equations $Q(D;k)\tau_{[k]}\cdot\tau = 0$ と $Q(D;k)\tau_{[0]}\cdot\tau = 0$ とは同値である。

ここで, KP 方程式とその他の方程式との関係について注意する:

1. ($\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{KP}}{\text{MKP}}$ 方程式と $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{KdV}}{\text{MKdV}}$ 方程式) 今, $q_j \mapsto -p_j$ とすれば, (19) から

$$c_{ij} \mapsto \frac{(p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2}, \quad \xi_j \mapsto p_j \cdot 2x_1 + p_j^3 \cdot 2x_3 + p_j^5 \cdot 2x_5 + \cdots$$

となり, このときの $\tau(x)$ は, KdV 方程式の N ソリトン解になっている。従って, bilinear $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{KP}}{\text{MKP}}$ 方程式で, $D_{2j} \mapsto 0$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ としたものは, bilinear $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{KdV}}{\text{MKdV}}$ 方程式に他ならない。但し, [2] と少し記号が違うので, [2] の方程式は, $x_j \mapsto 2x_{2j+1}$, $D_j \mapsto \frac{1}{2} D_{2j+1}$ と読み変える。例えば, KP eq: $(2D_1D_2^2D_3 + 2D_1^2D_3^2 + 3D_1^2D_2D_4 + 3D_4^2 + 4D_3D_5 - 2D_2D_6 - 12D_1D_7)\tau\cdot\tau = 0$ に於いて, $D_2 = D_4 = D_6 = 0$ とすれば, KdV eq: $(D_1^2D_3^2 + 2D_3D_5 - 6D_1D_7)\tau\cdot\tau = 0$ を得る。これは [2] の KdV eq: $(2D_0^2D_1^2 + D_1D_2 - 3D_0D_3)\tau\cdot\tau = 0$ を上のように読み変えたものに他ならない。

2. (KP 方程式と MKP 方程式) 変換:

$$P(D; k) = Q(D_1 + k, D_2 + k^2, \cdots) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}D_1 + \frac{1}{2k^2}D_2 + \frac{1}{3k^3}D_3 + \cdots\right)} \tag{26}$$

は, bilinear MKP 方程式: $Q(D)\tau_{[k]}\cdot\tau = 0$ を bilinear KP 方程式:

$P(D;k)\tau\cdot\tau=0$ に写す。例えば、最も簡単な $Q(D)=D_1^2-D_2$ に対して、 $P(D;k)=2D_1\cdot k-D_2-\frac{1}{4}D_1^3\cdot\frac{1}{k}+\left\{\frac{1}{12}(D_1^4+3D_2^2-4D_1D_3)-\frac{1}{8}D_1^2D_2\right\}\cdot\frac{1}{k^2}$ $+\left\{\frac{1}{12}(D_1^3D_2+2D_2D_3-3D_1D_4)-\frac{1}{64}(D_1^5+4D_1D_2^2)\right\}\cdot\frac{1}{k^3}+\left\{\frac{1}{480}(D_1^6+15D_1^2D_2^2+20D_1^3D_3+\right.$ $\left.+60D_2D_4-96D_1D_5)-\frac{1}{128}(3D_1^4D_2+4D_2^3)\right\}\cdot\frac{1}{k^4}+\cdots\cdots$ であり、1個のMKP 方程式から、無限個の KP 方程式が得られる。

3.（KP 方程式とNLS 方程式） KP 方程式のソリトン解 $\tau(x)$ が $P(D)\tau\cdot\tau=0$ を満たせば、NLS 方程式のソリトン解 $\tau(x)$ も $P(D)\tau\cdot\tau=0$ を満たす。

[4] 双線型KP 方程式の個数

(27) $\dim\{P(D)\mid P(D)$ は $D_1,D_2,\cdots$ の重み n の斉重多項式$\}=p(n)\sim e^{C\sqrt{n}}$ $(n\to\infty)$ である。又、

(28) $G_1(p_1,q_1)-2$ は $\Delta(p_1,q_1)^2$ で割り切れる、

(29) $G_2(p_1,q_1,p_2,q_2)-(\Delta(p_1,p_2)\Delta(q_1,q_2)+\Delta(p_1,q_2)\Delta(q_1,p_2))(G_1(p_1,q_1)+G_1(p_2,q_2)-2)$ $+\Delta(p_1,q_1)\Delta(p_2,q_2)(G_1(p_1,p_2)-G_1(p_1,q_2)-G_1(q_1,p_2)+G_1(q_1,q_2))$ は $\Delta(p_1,q_1,p_2,q_2)\Delta(p_1,q_1)\Delta(p_2,q_2)$ で割り切れる。

(30) （予想） $G_N(p_1,q_1,\cdots,p_N,q_N)-\{G_{N-1},\cdots,G_1,G_0$ の適当な一次結合$\}$ は $\Delta(p_1,q_1,\cdots,p_N,q_N)\prod_{j=1}^{N}\Delta(p_j,q_j)$ で割り切れる。

この予想を認めれば、

(31) $\dim\{P(D)\tau\cdot\tau\mid P(D)$ は $D_1,D_2,\cdots$ の重み n の斉重多項式$\}$ $=p(n)-p(n-1)\sim\frac{C}{2\sqrt{n}}p(n)\quad(n\to\infty)$

がわかる。故に、# 方程式 $=p(n-1)\sim e^{C\sqrt{n-1}}$ $(n\to\infty)$ である。

特に，$P(D)$ が奇数次の作用素のとき，$P(D)\tau\cdot\tau = 0$ だから，以下には $\dfrac{P^{+}(D)\tau\cdot\tau}{\tau^2}$（$P^{+}(D)$ は重み n の偶数次単項式）を1組の basis $\{K_{\nu}^{(n)}\}$ の一次結合で表わした表と，自明でない方程式を挙げよう（表1, 2）。

weight n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
dim $\{P(D)\}$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101
dim $\{P^{+}(D)\}$	1	0	1	1	3	3	6	7	12	14	22	27	40	
dim $\{P(D)\tau\cdot\tau\}$	1	0	1	1	2	2	4	4	7	8	12	14	21	24
# Equations	0	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77
#Eqs (non-trivial)	0	0	0	0	1	1	2	3	5	6	10	13	19	

[5] 沢田－小寺 KdV 方程式

Sawada-Kotera KdV 方程式についても，時間変数 $(x_1, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, x_{17}, x_{19}, \cdots)$ を考えれば，並行の議論ができる。この時間変数の取り方は Prof. Kuperschmidt の教示に負うている。

SK 方程式の N ソリトン解は (19) に於いて，

$$
(32)\quad
\begin{cases}
c_{ij} \underset{\text{def.}}{=} \dfrac{(p_i-p_j)^2(p_i^2-p_ip_j+p_j^2)}{(p_i+p_j)^2(p_i^2+p_ip_j+p_j^2)}\,, \\[2ex]
\xi(x;p) \underset{\text{def.}}{=} px_1 + p^5x_5 + p^7x_7 + p^{11}x_{11} + \cdots\,, \\[1ex]
\quad \text{i.e. } \xi(p)+\xi(-p)=0\,,\ \xi(p)+\xi(\omega p)+\xi(\omega^2 p)=0,\ \omega \underset{\text{def.}}{=} e^{\frac{2}{3}\pi i}\,, \\[1ex]
\xi_j \underset{\text{def.}}{=} \xi(x;p_j),\quad \eta_j \underset{\text{def.}}{=} \xi(t;p_j)
\end{cases}
$$

と取れば，(17)と同じ形に書ける。このとき，

(33) $$\tau(x+t)\tau(x-t)=\sum_{r=0}^{N}\frac{G_r(t;p_1,\cdots,p_r)}{\prod_{i<j}(p_i+p_j)^2(p_i^2+p_ip_j+p_j^2)}a_1\cdots a_r\,e^{\xi_1+\cdots+\xi_r},$$

(34) $$\begin{cases} G_r(t;p_1,\cdots,p_r)\underset{\mathrm{def.}}{=}\displaystyle\sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_r=\pm1}^{2^r}\prod_{i<j}^{\binom{r}{2}}(\epsilon_ip_i-\epsilon_jp_j)^2(p_i^2-\epsilon_i\epsilon_jp_ip_j+p_j^2)\,e^{\epsilon_1\eta_1+\cdots+\epsilon_r\eta_r}, \\ G_0(t)\underset{\mathrm{def.}}{=}1 \end{cases}$$

である。

(35) $G_1(p_1)-2$ は p_1^2 で割り切れる，

(36) $$\begin{cases} G_2(p_1,p_2)-2(p_1^2-p_2^2)\{(p_1^2+p_2^2)(G_1(p_1)-G_1(p_2))-p_2^2(\omega^2G_1(\omega p_1)+\omega G_1(\omega^2p_1)) \\ +p_1^2(\omega^2G_1(\omega p_2)+\omega G_1(\omega^2p_2))\}-8(p_1^4+p_1^2p_2^2+p_2^4) \quad \text{は} \\ p_1^2p_2^2\Delta(p_1^2,p_2^2)\Delta(p_1^6,p_2^6) \quad \text{で割り切れる。} \end{cases}$$

(37) $$\begin{cases} (\text{予想})\quad G_N(p_1,\cdots,p_N)-\{G_{N-1},\cdots,G_1,G_0\ \text{の適当な一次結合}\} \\ \text{は}\quad \displaystyle\prod_{i}^{N}p_i^2\prod_{i<j}^{\binom{N}{2}}\Delta(p_i^2,p_j^2)\Delta(p_i^6,p_j^6) \quad \text{で割り切れる。} \end{cases}$$

この予想を認めれば，

(38) $$\begin{cases} \dim\{P(D)\tau\cdot\tau \mid P(D)\text{は}D_1,D_5,\cdots\text{の重み}n\text{の斉重多項式}\} \\ =n\text{を}10m+2,\ 10m+8\text{の形の自然数の和に分ける分け方の数} \\ \sim e^{c\sqrt{\frac{n}{5}}} \qquad (n\to\infty) \end{cases}$$

である。他方，

(39) $$\begin{cases} \dim\{P(D) \mid P(D)\text{は}D_1,D_5,\cdots\text{の重み}n\text{の斉重多項式}\} \\ =n\text{を}6m+1,\ 6m+5\text{の形の自然数の和に分ける分け方の数} \\ \sim e^{c\sqrt{\frac{n}{3}}} \qquad (n\to\infty) \end{cases}$$

である。 $\dim\{P(D)\}$， $\dim\{P(D)\tau\cdot\tau\}$ の母函数は次で与え

られる。

$$(40)\qquad \frac{1}{\prod_{m=0}^{\infty}(1-t^{6m+1})(1-t^{6m+5})} = 1+t+t^2+t^3+t^4+2t^5+2t^6+3t^7+$$
$$+3t^8+3t^9+4t^{10}+5t^{11}+6t^{12}+7t^{13}+8t^{14}+9t^{15}+10t^{16}+12t^{17}+14t^{18}+\cdots,$$

$$(41)\qquad \frac{1}{\prod_{m=0}^{\infty}(1-t^{10m+2})(1-t^{10m+8})} = 1+t^2+t^4+t^6+2t^8+2t^{10}+3t^{12}+3t^{14}+$$
$$+4t^{16}+5t^{18}+6t^{20}+7t^{22}+9t^{24}+10t^{26}+12t^{28}+14t^{30}+17t^{32}+19t^{34}+23t^{36}+\cdots.$$

weight n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$\dim\{P(D)\}$	1	1	1	2	3	4	6	8	10	14	18	23	30	38
$\dim\{P(D)\tau\cdot\tau\}$	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	7	9	10
# Equations	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	12	16	21	28

以下に、$\frac{P(D)\tau\cdot\tau}{\tau^2}$ ($P(D)$ は重み n の斉重多項式) を1組の basis $\{K_\nu^{(n)}\}$ の一次結合で表わした表とSK方程式を挙げる (表 4, 5)。

(表1) KP

	$K_1^{(0)}$
1	1

	$K_1^{(2)}$
D_1^2	1

	$K_1^{(3)}$
D_1D_2	1

	$K_1^{(4)}$	$K_2^{(4)}$
D_1D_3	1	0
D_2^2	1	1
D_1^4	1	-3

	$K_1^{(5)}$	$K_2^{(5)}$
D_1D_4	1	0
D_2D_3	1	1
$D_1^3D_2$	1	-2

	$K_1^{(6)}$	$K_2^{(6)}$	$K_3^{(6)}$	$K_4^{(6)}$
D_1D_5	1	0	0	0
D_2D_4	1	1	0	0
D_3^2	1	1	1	0
$D_1^3D_3$	1	-2	1	3
$D_1^2D_2^2$	1	-1	-2	-2
D_1^6	1	-5	10	-30

	$K_1^{(7)}$	$K_2^{(7)}$	$K_3^{(7)}$	$K_4^{(7)}$
D_1D_6	1	0	0	0
D_2D_5	1	1	0	0
D_3D_4	1	1	1	0
$D_1^3D_4$	1	-2	1	1
$D_1^2D_2D_3$	1	-1	-1	0
$D_1D_2^3$	1	0	-3	-1
$D_1^5D_2$	1	-4	5	-5

	$K_1^{(8)}$	$K_2^{(8)}$	$K_3^{(8)}$	$K_4^{(8)}$	$K_5^{(8)}$	$K_6^{(8)}$	$K_7^{(8)}$
D_1D_7	1	0	0	0	0	0	0
D_2D_6	1	1	0	0	0	0	0
D_3D_5	1	1	1	0	0	0	0
D_4^2	1	1	1	1	0	0	0
$D_1^3D_5$	1	-2	1	0	1	0	0
$D_1^2D_2D_4$	1	-1	-1	1	0	-2	0
$D_1^2D_3^2$	1	-1	0	-2	0	2	1
$D_1D_2^2D_3$	1	0	-2	-1	0	1	-1
D_2^4	1	1	-3	-3	-4	0	6
$D_1^5D_3$	1	-4	6	-5	0	5	-5
$D_1^4D_2^2$	1	-3	1	5	-4	4	2
D_1^8	1	-7	21	-35	-84	-280	70

	$K_1^{(9)}$	$K_2^{(9)}$	$K_3^{(9)}$	$K_4^{(9)}$	$K_5^{(9)}$	$K_6^{(9)}$	$K_7^{(9)}$	$K_8^{(9)}$
D_1D_8	1	0	0	0	0	0	0	0
D_2D_7	1	1	0	0	0	0	0	0
D_3D_6	1	1	1	0	0	0	0	0
D_4D_5	1	1	1	1	0	0	0	0
$D_1^3D_6$	1	-2	1	0	3	0	0	0
$D_1^2D_2D_5$	1	-1	-1	1	1	1	0	0
$D_1^2D_3D_4$	1	-1	0	-1	0	0	1	0
$D_1D_2^2D_4$	1	0	-2	0	0	0	-2	1
$D_1D_2D_3^2$	1	0	-1	-2	0	-1	0	-1
$D_2^3D_3$	1	1	-2	-3	-6	0	3	0
$D_1^5D_4$	1	-4	6	-2	0	0	10	-15
$D_1^4D_2D_3$	1	-3	2	1	-6	-4	-9	8
$D_1^3D_2^3$	1	-2	-2	6	-12	0	12	-9
$D_1^7D_2$	1	-6	14	-14	-84	56	0	35

	$K_1^{(10)}$	$K_2^{(10)}$	$K_3^{(10)}$	$K_4^{(10)}$	$K_5^{(10)}$	$K_6^{(10)}$	$K_7^{(10)}$	$K_8^{(10)}$	$K_9^{(10)}$	$K_{10}^{(10)}$	$K_{11}^{(10)}$	$K_{12}^{(10)}$
D_1D_9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_2D_8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_3D_7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_4D_6	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D_5^2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$D_1^3D_7$	1	-2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$D_1^2D_2D_6$	1	-1	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$D_1^2D_3D_5$	1	-1	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0
$D_1^2D_4^2$	1	-1	0	0	-2	0	0	0	1	0	0	0
$D_1D_2^2D_5$	1	0	-2	0	1	0	0	0	0	1	0	0
$D_1D_2D_3D_4$	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
$D_1D_3^3$	1	0	0	-3	0	2	-1	-6	-3	-3	-6	1
$D_2^3D_4$	1	1	-2	-2	0	0	-2	0	-3	0	-6	-4
$D_2^2D_3^2$	1	1	-1	-3	-2	-2	0	2	3	0	4	2
$D_1^5D_5$	1	-4	6	-4	1	0	10	-20	0	-15	0	20
$D_1^4D_2D_4$	1	-3	2	2	-4	0	-2	0	-3	0	-2	-4
$D_1^4D_3^2$	1	-3	3	-3	6	-2	-8	18	3	12	12	-10
$D_1^3D_2^2D_3$	1	-2	-1	3	1	0	-4	-4	0	0	-5	0
$D_1^2D_2^4$	1	-1	-4	4	6	-8	10	0	3	-12	12	12
$D_1^7D_3$	1	-6	15	-21	21	0	0	-84	0	0	-105	0
$D_1^6D_2^2$	1	-5	8	0	-14	-40	10	80	15	36	40	-20
D_1^{10}	1	-9	36	-84	126	-1000	770	3360	-525	420	2100	-2660

	$K_1^{(11)}$	$K_2^{(11)}$	$K_3^{(11)}$	$K_4^{(11)}$	$K_5^{(11)}$	$K_6^{(11)}$	$K_7^{(11)}$	$K_8^{(11)}$	$K_9^{(11)}$	$K_{10}^{(11)}$	$K_{11}^{(11)}$	$K_{12}^{(11)}$	$K_{13}^{(11)}$	$K_{14}^{(11)}$
D_1D_{10}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_2D_9	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_3D_8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_4D_7	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_5D_6	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_1^3D_8$	1	-2	1	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_1^2D_2D_7$	1	-1	-1	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
$D_1^2D_3D_6$	1	-1	0	-1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$D_1^2D_4D_5$	1	-1	0	0	-1	0	-1	1	3	0	0	0	0	0
$D_1D_2^2D_6$	1	0	-2	0	1	0	0	-2	-3	1	0	0	0	0
$D_1D_2D_3D_5$	1	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0
$D_1D_2D_4^2$	1	0	-1	0	-2	-1	0	-2	0	2	0	1	0	0
$D_1D_3^2D_4$	1	0	0	-2	-1	0	0	0	-3	-1	2	-1	-1	0
$D_2^3D_5$	1	1	-2	-2	1	6	3	3	3	0	0	0	7	-2
$D_2^2D_3D_4$	1	1	-1	-2	-2	2	1	0	2	0	1	-1	0	1
$D_2D_3^3$	1	1	0	-3	-3	0	0	3	6	0	-3	3	-4	-1
$D_1^5D_6$	1	-4	6	-4	1	0	-20	10	-15	-15	0	0	-30	0
$D_1^4D_2D_5$	1	-3	2	2	-3	2	3	-9	-13	8	8	0	-7	2
$D_1^4D_3D_4$	1	-3	3	-2	2	-6	9	0	6	-4	-7	-1	12	1
$D_1^3D_2^2D_4$	1	-2	-1	4	-2	5	-2	6	8	-6	-2	-1	6	-2

	$K_1^{(11)}$	$K_2^{(11)}$	$K_3^{(11)}$	$K_4^{(11)}$	$K_5^{(11)}$	$K_6^{(11)}$	$K_7^{(11)}$	$K_8^{(11)}$	$K_9^{(11)}$	$K_{10}^{(11)}$	$K_{11}^{(11)}$	$K_{12}^{(11)}$	$K_{13}^{(11)}$	$K_{14}^{(11)}$
$D_1^3D_2D_3^2$	1	−2	0	0	3	0	12	−6	3	9	0	3	7	−2
$D_1^2D_2^3D_3$	1	−1	−3	2	4	6	−5	4	0	−6	3	−3	−12	3
$D_1D_2^5$	1	0	−5	0	10	15	0	10	0	10	0	15	−30	0
$D_1^7D_4$	1	−6	15	−20	14	105	−126	126	168	−70	−70	35	70	−70
$D_1^6D_2D_3$	1	−5	9	−6	0	54	15	−60	−36	54	39	−15	0	15
$D_1^5D_2^3$	1	−4	3	8	−14	51	28	58	48	−30	−60	15	42	−12
$D_1^9D_2$	1	−8	27	−48	42	567	−72	−294	672	378	168	−105	938	392

(表2) KP 方程式

(weight 4) $(D_1^4+3D_2^2-4D_1D_3)\tau\cdot\tau=0$, (weight 5) $(D_1^3D_2+2D_2D_3-3D_1D_4)$ $\tau\cdot\tau=0$, (weight 6) $(D_1^6-9D_1^2D_2^2+4D_1^3D_3-32D_3^2+36D_2D_4)\tau\cdot\tau=0$, $(3D_1^2D_2^2+2D_1^3D_3+4D_3^2+3D_2D_4-12D_1D_5)\tau\cdot\tau=0$, (weight 7) $(D_1^5D_2$ $-5D_1D_2^3-20D_3D_4+24D_2D_5)\tau\cdot\tau=0$, $(D_1D_2^3+D_1^3D_4+2D_3D_4-4D_1D_6)\tau\cdot\tau$ $=0$, $(D_1^2D_2D_3+D_3D_4-2D_1D_6)\tau\cdot\tau=0$, (weight 8) $(D_1^8+14D_1^5D_3$ $-105D_1^2D_2D_4+210D_4^2+84D_1^3D_5-504D_3D_5+420D_2D_6-120D_1D_7)\tau\cdot\tau=0$, $(D_1^4D_2^2-2D_1^2D_3^2-9D_4^2+4D_1^3D_5+4D_3D_5+14D_2D_6-12D_1D_7)\tau\cdot\tau=0$, $(D_2^4-6D_1^2D_3^2-6D_1^2D_2D_4-3D_4^2+4D_1^3D_5-4D_3D_5+2D_2D_6+12D_1D_7)\tau\cdot\tau=0$, $(D_1^5D_3-5D_1D_2^2D_3-16D_3D_5+20D_2D_6)\tau\cdot\tau=0$, $(2D_1D_2^2D_3+2D_1^2D_3^2+$ $+3D_1^2D_2D_4+3D_4^2+4D_3D_5-2D_2D_6-12D_1D_7)\tau\cdot\tau=0$, (weight 9) $(D_1^7D_2+35D_1D_2D_3^2-21D_1^2D_2D_5+105D_4D_5+35D_1^3D_6-140D_3D_6+90D_2D_7-105D_1D_8)\tau\cdot\tau=0$,

$(D_1^3D_2^3 + 9D_1D_2^2D_4 + 6D_1^2D_3D_4 + 4D_1^3D_6 + 16D_3D_6 - 36D_1D_8)\tau\cdot\tau = 0$, $(3D_1^4D_2D_3 - 24D_1D_2^2D_4 - 21D_1^2D_3D_4 + 12D_1^2D_2D_5 - 36D_4D_5 + 2D_1^3D_6 - 8D_3D_6 + 48D_2D_7 + 24D_1D_8)\tau\cdot\tau = 0$, $(D_2^3D_3 - 3D_1^2D_3D_4 + 2D_1^3D_6)\tau\cdot\tau = 0$, $(3D_1D_2D_3^2 + 3D_1D_2^2D_4 + 6D_1^2D_3D_4 + 3D_1^2D_2D_5 + 9D_4D_5 - D_1^3D_6 + 4D_3D_6 - 6D_2D_7 - 21D_1D_8)\tau\cdot\tau = 0$, $(D_1^5D_4 + 15D_1D_2^2D_4 + 20D_1^2D_3D_4 + 22D_4D_5 + 2D_3D_6 - 60D_1D_8)\tau\cdot\tau = 0$,

(weight 10) $(D_1^4D_2D_4 - D_2^3D_4 - 4D_1D_2D_3D_4 - 8D_4D_6 + 12D_2D_8)\tau\cdot\tau = 0$, $(D_1^7D_3 - 21D_1^3D_2^2D_3 - 84D_1^2D_2D_6 + 168D_4D_6 - 288D_3D_7 + 224D_1D_9)\tau\cdot\tau = 0$, … …

(weight 11) $(D_1D_2^5 - D_1^5D_6 - 15D_1D_2D_4^2 + 5D_1D_2^2D_6 - 20D_1^2D_3D_6 + 10D_1^3D_8 - 24D_5D_6 + 20D_3D_8 + 24D_1D_{10})\tau\cdot\tau = 0$, $(D_1^3D_2D_3^2 + D_1^4D_2D_5 - 3D_1D_2D_4^2 + 8D_1D_2D_3D_5 - 3D_1D_2^2D_6 + 3D_1^2D_4D_5 + 6D_1^2D_2D_7 - D_1^3D_8 + 4D_3D_8 + 8D_2D_9 - 24D_1D_{10})\tau\cdot\tau = 0$, … … .

(表 3)　　MKP 方程式

(weight 2) $(D_1^2 - D_2)\tau_{[0]}\cdot\tau = 0$, (weight 3) $(D_1^3 + 3D_1D_2 - 4D_3)\tau_{[0]}\cdot\tau = 0$, (weight 4) $(D_1^4 + 8D_1D_3 - 3D_2^2 - 6D_4)\tau_{[0]}\cdot\tau = 0$, $(D_1^2D_2 + D_2^2 - 2D_4)\tau_{[0]}\cdot\tau = 0$, (weight 5) $(D_1^3D_2 - 3D_1D_2^2 - 4D_2D_3 + 6D_1D_4)\tau_{[0]}\cdot\tau = 0$, $(D_1^5 - 3D_1^3D_2 + 6D_1D_2^2 - 4D_1^2D_3)\tau_{[0]}\cdot\tau = 0$, $(D_1^5 + 5D_1D_2^2 + 10D_1D_4 - 16D_5)\tau_{[0]}\cdot\tau = 0$, …

(表4)　　SK

	$K_1^{(0)}$
1	1

	$K_1^{(2)}$
D_1^2	1

	$K_1^{(4)}$
D_1^4	1

	$K_1^{(6)}$
D_1^6	1
D_1D_5	1

	$K_1^{(12)}$	$K_2^{(12)}$	$K_3^{(12)}$
D_1^{12}	1	33	33
$D_1^7D_5$	1	3	−7
$D_1^2D_5^2$	1	−2	3
$D_1^5D_7$	1	−2	5
D_5D_7	1	3	0
D_1D_{11}	1	0	0

	$K_1^{(10)}$	$K_2^{(10)}$
D_1^{10}	1	21
$D_1^5D_5$	1	1
D_5^2	1	6
$D_1^3D_7$	1	0

	$K_1^{(8)}$	$K_2^{(8)}$
D_1^8	1	7
$D_1^3D_5$	1	−3
D_1D_7	1	0

	$K_1^{(16)}$	$K_2^{(16)}$	$K_3^{(16)}$	$K_4^{(16)}$
D_1^{16}	1	78	−2470	572
$D_1^{11}D_5$	1	28	0	22
$D_1^6D_5^2$	1	3	−5	−3
$D_1D_5^3$	1	3	15	−3
$D_1^9D_7$	1	15	15	−9
$D_1^4D_5D_7$	1	0	0	1
$D_1^2D_7^2$	1	1	1	−2
$D_1^5D_{11}$	1	1	5	0
D_5D_{11}	1	6	0	0
$D_1^3D_{13}$	1	0	0	0

	$K_1^{(14)}$	$K_2^{(14)}$	$K_3^{(14)}$
D_1^{14}	1	52	286
$D_1^9D_5$	1	12	6
$D_1^4D_5^2$	1	−3	1
$D_1^7D_7$	1	3	−1
$D_1^2D_5D_7$	1	−2	−1
D_7^2	1	3	6
$D_1^3D_{11}$	1	−3	0
D_1D_{13}	1	0	0

	$K^{(18)}_1$	$K^{(18)}_2$	$K^{(18)}_3$	$K^{(18)}_4$	$K^{(18)}_5$
D_1^{18}	1	102	1071	3978	31824
$D_1^{13}D_5$	1	42	91	78	−156
$D_1^8 D_5^2$	1	7	−14	3	−11
$D_1^3 D_5^3$	1	−3	6	3	9
$D_1^{11}D_7$	1	25	0	−19	−33
$D_1^6 D_5 D_7$	1	0	0	1	12
$D_1 D_5^2 D_7$	1	0	0	−4	−18
$D_1^4 D_7^2$	1	−3	7	2	9
$D_1^7 D_{11}$	1	3	−7	−4	−21
$D_1^2 D_5 D_{11}$	1	−2	3	1	9
$D_7 D_{11}$	1	3	0	3	0
$D_1^5 D_{13}$	1	−2	5	0	0
$D_5 D_{13}$	1	3	0	0	0
$D_1 D_{17}$	1	0	0	0	0

	$K^{(20)}_1$	$K^{(20)}_2$	$K^{(20)}_3$	$K^{(20)}_4$	$K^{(20)}_5$	$K^{(20)}_6$
D_1^{20}	1	133	2261	15827	8398	50388
$D_1^{15}D_5$	1	63	441	−153	208	−1482
$D_1^{10}D_5^2$	1	18	21	67	−7	−27
$D_1^5 D_5^3$	1	−2	1	−13	3	3
D_5^4	1	3	6	−18	−12	108
$D_1^{13}D_7$	1	42	175	−91	−65	429
$D_1^8 D_5 D_7$	1	7	0	−6	5	−26
$D_1^3 D_5^2 D_7$	1	−3	0	4	0	−6
$D_1^6 D_7^2$	1	0	0	14	−2	9
$D_1 D_5 D_7^2$	1	0	0	−6	−2	9
$D_1^9 D_{11}$	1	12	6	−24	−6	63
$D_1^4 D_5 D_{11}$	1	−3	1	1	−1	3
$D_1^2 D_7 D_{11}$	1	−2	−1	−3	1	0
$D_1^7 D_{13}$	1	3	−1	−7	0	0
$D_1^2 D_5 D_{13}$	1	−2	−1	3	0	0
$D_7 D_{13}$	1	3	6	0	0	0
$D_1^3 D_{17}$	1	−3	0	0	0	0
$D_1 D_{19}$	1	0	0	0	0	0

	$K_1^{(22)}$	$K_2^{(22)}$	$K_3^{(22)}$	$K_4^{(22)}$	$K_5^{(22)}$	$K_6^{(22)}$	$K_7^{(22)}$
D_1^{22}	1	3724	10868	55556	114665	302328	831402
$D_1^{17}D_5$	1	924	−2652	1156	3145	1768	442
$D_1^{12}D_5^2$	1	99	53	56	175	−267	57
$D_1^7D_5^3$	1	−1	−17	6	5	−27	−3
$D_1^2D_5^4$	1	−1	13	6	10	−12	12
$D_1^{15}D_7$	1	441	−1053	−220	−65	−429	663
$D_1^{10}D_5D_7$	1	21	22	15	30	−24	−27
$D_1^5D_5^2D_7$	1	1	−3	0	0	6	8
$D_5^3D_7$	1	6	−3	−15	−30	36	18
$D_1^8D_7^2$	1	0	11	11	12	−23	−16
$D_1^3D_5D_7^2$	1	0	1	1	2	−3	−6
$D_1D_7^3$	1	0	−3	−3	−9	−9	−9
$D_1^{11}D_{11}$	1	50	−11	−49	−76	147	66
$D_1^6D_5D_{11}$	1	0	−1	1	−1	−3	−9
$D_1D_5^2D_{11}$	1	0	9	1	−1	−3	−9
$D_1^4D_7D_{11}$	1	1	3	0	1	0	3
D_{11}^2	1	6	0	6	12	−18	0
$D_1^9D_{13}$	1	6	0	−6	−21	0	0
$D_1^4D_5D_{13}$	1	1	0	−1	−1	0	0
$D_1^2D_7D_{13}$	1	−1	0	1	0	0	0
$D_1^5D_{17}$	1	1	5	0	0	0	0
D_5D_{17}	1	6	0	0	0	0	0
$D_1^3D_{19}$	1	0	0	0	0	0	0

(表5) SK方程式

(weight 6) $(D_1^6 - D_1D_5)\tau\cdot\tau = 0$, (weight 8) $(3D_1^8 + 7D_1^3D_5 - 10D_1D_7)$
$\tau\cdot\tau = 0$, (weight 10) $(D_1^{10} + 3D_1^5D_5 - 4D_5^2)\tau\cdot\tau = 0$, $(6D_1^5D_5 - D_5^2$
$- 5D_1^3D_7)\ \tau\cdot\tau = 0$, (weight 12) $(D_1^{12} - 7D_1^7D_5 + 56D_1^2D_5^2 - 50D_1^5D_7)$
$\tau\cdot\tau = 0$, $(15D_1^7D_5 + 21D_1^5D_7 - D_5D_7 - 35D_1D_{11})\tau\cdot\tau = 0$, $(15D_1^2D_5^2$
$- 9D_1^5D_7 + 4D_5D_7 - 10D_1D_{11})\tau\cdot\tau = 0$, (weight 14) $(D_1^9D_5 - D_7^2 +$
$+3D_1^3D_{11} - 3D_1D_{13})\tau\cdot\tau = 0$, $(D_1^4D_5^2 + D_1^7D_7 - 2D_1D_{13})\tau\cdot\tau = 0$,
$(3D_1^7D_7 - 3D_1^2D_5D_7 + 5D_1^3D_{11} - 5D_1D_{13})\tau\cdot\tau = 0$, $(3D_1^{14} - 143D_7^2 - 91D_1^3D_{11}$
$+ 231D_1D_{13})\tau\cdot\tau = 0$, $(6D_1^2D_5D_7 + D_7^2 - 3D_1^3D_{11} - 4D_1D_{13})\ \tau\cdot\tau = 0$,
(weight 16) $(D_1^{16} - 26D_1^{11}D_5 + 494D_1^5D_{11} + 26D_5D_{11} - 495D_1^3D_{13})\tau\cdot\tau = 0$,
$(3D_1^{11}D_5 - 66D_1^4D_5D_7 - 14D_5D_{11} + 77D_1^3D_{13})\tau\cdot\tau = 0$, $(3D_1^6D_5^2 - D_1^9D_7$
$+ 6D_1^5D_{11} - 8D_1^3D_{13})\tau\cdot\tau = 0$, $(3D_1D_5^3 - D_1^9D_7 - 6D_1^5D_{11} + 2D_5D_{11} + 2D_1^3D_{13})$
$\tau\cdot\tau = 0$, $(D_1^9D_7 + 9D_1^4D_5D_7 - 3D_1^5D_{11} - 2D_5D_{11} - 5D_1^3D_{13})\tau\cdot\tau = 0$,
$(30D_1^4D_5D_7 + 15D_1^2D_7^2 - 3D_1^5D_{11} - 2D_5D_{11} - 40D_1^3D_{13})\tau\cdot\tau = 0$.
(weight 18) $(15D_1^3D_5^3 - 15D_1^2D_5D_{11} - 10D_7D_{11} - 9D_1^5D_{13} + 9D_5D_{13}$
$+ 10D_1D_{17})\tau\cdot\tau = 0$, $(15D_1D_5^2D_7 + 30D_1^4D_7^2 - 42D_1^5D_{13}$
$+ 2D_5D_{13} - 5D_1D_{17})\tau\cdot\tau = 0$, $(15D_1^4D_7^2 - 15D_1^2D_5D_{11} - 5D_7D_{11}$
$- 12D_1^5D_{13} + 2D_5D_{13} + 15D_1D_{17})\ \tau\cdot\tau = 0$, ……
(weight 20) $(9D_1^5D_5^3 - 9D_1^4D_5D_{11} - 36D_1^2D_7D_{11} + 6D_1^2D_5D_{13} - 5D_7D_{13}$
$+ 18D_1^3D_{17} + 17D_1D_{19})\ \tau\cdot\tau = 0$, $(3D_1^3D_5^2D_7 + 6D_1^4D_5D_{11}$
$+ 6D_1^2D_7D_{11} - 13D_1^3D_{17} - 2D_1D_{19})\ \tau\cdot\tau = 0$, $(9D_1^6D_7^2 - 9D_1D_5D_7^2$

$-60D_1^2D_5D_{13} - 10D_7D_{13} + 30D_1^3D_{17} + 40D_1D_{19})\tau\cdot\tau = 0, \cdots$

(weight 22) $(6D_1^2D_5^4 + 12D_1^3D_5D_7^2 - 6D_{11}^2 + 12D_1^4D_5D_{13} - 18D_1^5D_{17} + 8D_5D_{17} - 14D_1^3D_{19})\tau\cdot\tau = 0$, $(5D_5^3D_7 + 10D_1D_7^3 + 5D_{11}^2 - 180D_1^4D_5D_{13} - 105D_1^2D_7D_{13} + 9D_1^5D_{17} + D_5D_{17} + 255D_1^3D_{19})\tau\cdot\tau = 0$, $(3D_1^6D_5D_{11} - 3D_1D_5^2D_{11} + 6D_1^5D_{17} - D_5D_{17} - 5D_1^3D_{19})\tau\cdot\tau = 0$, $\cdots \quad \cdots$

参考文献

[1] R. Hirota, Lect. Notes in Math. 515 Springer (1976).

[2] 佐藤幹夫、毛織泰子，広田氏の Bilinear Equations について．数理解析研究所講究録 388 (1980).

誤記訂正

[2]で weight 12 のときの KdV の(表1)に於いて，$\frac{D_1^4\tau\cdot\tau}{\tau^2}$ の $K_{8,4}$ の係数 6 を -6 に訂正する。(（表5）の KdV 方程式で D_1^4 を含むものは，-6 として計算してあるので，そのままでよい。)

追記

KP方程式について　予想 (30) が $N \leqq 2$ のときに成り立つことは, (28), (29) で示されているが, $N=3$ のときにも正しいことが次の $(29)^{\text{bis}}$ でわかる。

$$
(29)^{\text{bis}}\left\{
\begin{aligned}
&G_3(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)\\
&+\sum^{6\text{項}}\Big(\Delta(p_1,p_3)\Delta(p_2,p_3)\Delta(q_1,q_3)\Delta(q_2,q_3)+\Delta(p_1,q_3)\Delta(p_2,q_3)\Delta(q_1,p_3)\Delta(q_2,p_3)-\tfrac{2}{3}\Delta(p_1,q_1)\Delta(p_2,q_2)\Delta(p_3,q_3)^2\Big)G_2(p_1,p_2,q_1,q_2)\\
&-\sum^{24\text{項}}\Big(\Delta(p_1,q_2)\Delta(q_1,q_3)\Delta(p_2,q_2)\Delta(p_3,q_3)-\tfrac{2}{3}\Delta(p_1,q_1)\Delta(p_2,q_2)\Delta(q_2,q_3)\Delta(p_3,q_3)\Big)G_2(p_1,p_2,q_1,p_3)\\
&+\Big(\Delta(p_1,p_2,p_3)\Delta(q_1,q_2,q_3)+\Delta(p_1,p_2,q_3)\Delta(q_1,q_2,p_3)+\Delta(p_1,q_2,p_3)\Delta(q_1,p_2,q_3)+\Delta(p_1,q_2,q_3)\Delta(q_1,p_2,p_3)\Big)\\
&\qquad\times\big(G_1(p_1,q_1)+G_1(p_2,q_2)+G_1(p_3,q_3)-2\big)\\
&-\sum^{6\text{項}}\Big(\Delta(p_1,q_1,p_3)\Delta(p_2,q_2,q_3)+\Delta(p_1,q_1,q_3)\Delta(p_2,q_2,p_3)\Big)\big(G_1(p_1,p_2)+G_1(q_1,q_2)-G_1(p_1,q_2)-G_1(q_1,p_2)\big)
\end{aligned}
\right.
$$

は $\Delta(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)\Delta(p_1,q_1)\Delta(p_2,q_2)\Delta(p_3,q_3)$ で割り切れる。但し, 上式で, 例えば $\sum^{6\text{項}}(\cdots)G_2(p_1,p_2,q_1,q_2)$ は, $(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)$ の部分順列 (p_1,p_2,q_1,q_2), (p_1,q_2,q_1,p_2), (p_1,p_3,q_1,q_3), (p_1,q_3,q_1,p_3), (p_2,p_3,q_2,q_3), (p_2,q_3,q_2,p_3) について, それらに応じた係数(多項式)を掛けた和を表わす。他の Σ も同様の意味である。