数理解析研究所講究録
第414巻 1981年 227-233

Jet bundle and Bäcklund map

筑波大 物理 小寺 武康
柴田 良一

今までによく知られている非線型発展方程式に対する、逆散乱法ならびに、Bäcklund 変換について、以下のように Jet bundle 上の写像として定義する。

Pirani et al. にしたがって、Bäcklund map を、定義する。

$$\phi : J^k(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

ここで、実際の問題のために、

M : 独立変数の作る空間、その座標を $\{x^1, x^2, \cdots, x^a, \cdots, x^m\}$

N_1 : 古い従属変数の作る空間、その座標を $\{z^1, z^2, \cdots, z^\mu, \cdots, z^n\}$

N_2 : 新しい従属変数の作る空間、その座標を $\{y^1, y^2, \cdots, y^A, \cdots, y^{n'}\}$

一般には、$n \neq n'$

前に導入した．ϕは．以下のような性質をもつ

1)

$$\begin{tikzcd} J^k(M,N_1)\times N_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "pr_2"'] & J^1(M,N_2) \arrow[d, "\beta"] \\ & N_2 \end{tikzcd}$$

2)

$$\begin{tikzcd} J^k(M,N_1)\times N_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "pr_1"'] & J^1(M,N_2) \arrow[d, "\alpha"] \\ J^k(M,N_1) \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd}$$

これらの図が可換である。ここで

$\alpha : J^k(M, N_1) \longrightarrow M$

$\beta : J^k(M, N_1) \longrightarrow N_1$

非線型発展方程式は．このϕに対する．可積分条件である．

$\Omega^k(M, N_1)$：

$$\begin{cases} \theta^\mu = dz^\mu - z^\mu_a dx^a \\ \theta^\mu_a = dz^\mu_a - z^\mu_{ab} dx^b \\ \cdots \\ \theta^\mu_{a^1\cdots a^{k-1}} = dz^\mu_{a^1\cdots a^{k-1}} - z^\mu_{a^1\cdots a^{k-1}b} dx^b \end{cases}$$

から生成される ideal とする。$\Omega^k(M,N_1)$ を $J^k(M,N_1)$ 上の contact module と呼ぶ。

さらに、次の写像を定義する。

$$\pi^l_m : J^l(M,N_1) \longrightarrow J^m(M,N_1)$$

$$\tilde{\pi}^l_m := \pi^l_m \times id_{N_2}$$

$$: J^l(M,N_1)\times N_2 \longrightarrow J^m(M,N_1)\times N_2$$

これより、

$$\tilde{\Omega}^{l,\phi} := pr_1^* \Omega^l(M,N_1) + \tilde{\pi}^{l*}_k \phi^* \Omega^1(M,N_2)$$

ϕ に対する可積分条件すなわち、非線型発展方程式は、

$$\tilde{\pi}^{k+1*}_k \phi^* d\Omega^1(M,N_2) \subset I(\tilde{\Omega}^{k+1,\phi})$$

で与えられる。

この条件を具体的に、座標を入れて書くと、

$$\Omega^1(M,N_2) = \{\theta^A = dy^A - y^A_a dx^a\}$$

$$\phi^*\Omega^1(M,N_2) = \{\phi^*\theta^A$$
$$= dy^A - \phi^A_a(x^a; z^u, z^u_a, \cdots; y^A)dx^a\}$$

したがって

$$\phi^* d\Omega^1(M,N_2) = d\phi^*\Omega^1(M,N_2)$$
$$= -d\phi^A_a(x^a; z^u, z^u_a, \cdots; y^A)\wedge dx^a$$
$$\equiv \tilde{D}^{(k+1)}_c \phi^A_b \, dx^b \wedge dx^c$$
$$\mod (I(\tilde{\Omega}^{k+1,\phi}))$$

ここで

$$\tilde{D}^{(k+1)}_c = \frac{\partial}{\partial x^c} + z^\mu_c \frac{\partial}{\partial z^\mu} + z^\mu_{ac} \frac{\partial}{\partial z^\mu_a} + \cdots$$
$$+ z^\mu_{a^1 \cdots a^k c} \frac{\partial}{\partial z^\mu_{a^1 \cdots a^k}} + \phi^A_c \frac{\partial}{\partial y^A}$$

したがって

$$\tilde{D}^{(k+1)}_c \phi^A_b - \tilde{D}^{(k+1)}_b \phi^A_c = 0$$

が可積分条件である。

以下 Bäcklund map の例を 2,3 上げ，さらに，保存則もこの場合の特別なものと見なされる。

Ex. 1.　A. K. N. S. 系

$M : (x^1, x^2)$

$N_1 : (q, r)$

$N_2 : (\psi_1, \psi_2)$

今，問題にしている非線型発展方程式の，微分の最高次を，$(k+1)$ とする．

$$\phi : J^k(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$
$$(x^1, x^2 ; q, r, q_{x^1}, r_{x^1}, \cdots, \psi_1, \psi_2)$$
$$\longmapsto (x^1, x^2, \psi_1, \psi_2, \psi_{1,x^1}, \psi_{1,x^2}, \psi_{2,x^1}, \psi_{2,x^2})$$

$$\psi_{1,x^1} dx^1 + \psi_{1,x^2} dx^2 = (\eta \psi_1 + q \psi_2) dx^1$$
$$+ (A(q, r, \cdots)\psi_1 + B(q, r, \cdots)\psi_2) dx^2$$

$$\psi_{2,x^1} dx^1 + \psi_{2,x^2} dx^2 = (r \psi_1 - \eta \psi_2) dx^1$$
$$+ (C(q, r, \cdots)\psi_1 - A(q, r, \cdots)\psi_2) dx^2$$

A, B, C を適当なものを. 選ぶことによって. 非線型発展方程式が. 可積分条件として得られる。

Ex. 2.　K-dV 方程式

$$u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$$

微分の最高は. 3次であるため. Bäcklund map

$$\phi : J^2(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

$$M = (x, t)$$

$$N_1 = (u)$$

$$N_2 = (v)$$

$$\phi : (x, t, u_x, u_t, \cdots, u_{xx}, u_{tt}\, ; v)$$

$$\longmapsto (x, t\, ; v_x, v_t)$$

$$\begin{cases} \phi_x = v_x = -2u - v^2 \\ \phi_t = v_t = 8u^2 + 4uv^2 + 2u_{xx} - 4u_x v \end{cases}$$

$$\tilde{D}^3_t \phi_x - \tilde{D}^3_x \phi_t = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$$

v の満すべき方程式

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

今まで、取り扱ってきた例では、新しい従属変数ともとのそれが、満足すべき方程式が、異っていた。しかし、狭い意味でのBäcklund変換は、同じ方程式を満すものである。その例を上げる。

Ex. 3　　sine-Gordon 方程式

$$u_{xt} - \sin u = 0$$

$$\phi : J^1(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

$$M = (x, t), \quad N_1 = (u), \quad N_2 = (v)$$

$$: (x, t; u_x, u_t, v) \longmapsto (x, t; v_x, v_t)$$

$$\begin{cases} \phi_x = v_x = u_x + 2a \sin \frac{1}{2}(u+v) \\ \phi_t = v_t = -u_t + 2a^{-1} \sin \frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$$

$$\tilde{D}_x^2 \phi_t - \tilde{D}_t^2 \phi_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{xt} - \sin u = 0$$

vの満すべき方程式も

$$v_{xt} - \sin v = 0$$

最後の例として、保存則もこのような写像の一種と考えられる。

Ex. 4　　K-dV 方程式の保存則

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$ （前と、x, tの scaleの変換する）

$$\phi : J^2(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

$$M = (x, t), \quad N_1 = (u), \quad N_2 = (y)$$

今までの例では．ϕ_x, ϕ_t に．新しい従属変数が入っていたが．含まないものとする。

$$\theta_1 = dy - u\,dx + (3u^2 + u_{xx})\,dt$$

$$\theta_2 = dy - \tfrac{1}{2}u^2\,dx - (-u u_{xx} + \tfrac{1}{2}u_x^2 - 2u^3)\,dt$$

の2通りの写像が考えられる．さらにprolongすると．

$$D_x(u_t + u u_x + u_{xxx}) = 0$$

$$\phi : J^3(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

$$\theta_3 = dy - (\tfrac{1}{6}u_x^2 - \tfrac{1}{3}u^3)\,dx - (-\tfrac{1}{3}u_x u_{xxx} + \tfrac{1}{6}u_{xx}^2 + u^2 u_{xx} - 2u u_x^2 + \tfrac{3}{2}u^4)\,dt$$

と．1通りの写像が得られる．さらにprolongすると．次々と得られる．

参考文献

Harrison and Estabrook, J. Math. Phys. 12 (1971) 653

Pirani, Robinson and Shadwick 'Local Jet Bundle Formulation of Bäcklund Transformations' Math. Phys. Studies. Vol. 1