数理解析研究所講究録
第416巻 1981年 21-29

Simple Holonomic Systemの構造について

東大 教養　大島利雄

これから述べる主な結果は1974年に得られていたものであるが，未だ発表していない。そこで主要結果をここに記しておくことにします．§1,2の部分は［1］の中で発表される予定です．

§1　標準型について，

Xをl次元複素多様体とするとき，T^*Xは自然に$2l$-次元のhomogeneous symplectic manifoldとなる。T^*X-Xの点pを通るhomogeneous holonomic variety Λを考える。

<u>定理1</u>　Λを含む$(l+1)$-次元の非特異なT^*Xの部分多様体が存在すると仮定する。このとき，pの近傍で適当な斉次正準座標系$(x_1, \ldots, x_l; \xi_1, \ldots, \xi_l)$と，自然数$d$および互に素な自然数$m$，$n$が存在して，$\Lambda$は次の形に表わすことができる：

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{d} \Lambda_i \qquad (\Lambda_i \text{ は } \Lambda \text{ の既約成分})$$

$$\Lambda_i = \{ C_i^0 x_1^m \xi_\ell^n + C_i^1 \xi_1^n = n x_1 \xi_1 + (m+n) x_\ell \xi_\ell = \xi_2 = \cdots = \xi_{\ell-1} = 0 \}$$

ただし，$p = (0; dx_\ell)$，$(C_i^0, C_i^1) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$

<u>注意</u>　ルジャンドル変換をすると m と n が入れ換わる．

<u>定理2</u>　定理1の Λ に台をもつ simple holonomic system（生成元が1コで，symbol ideal が reduced な holonomic system）は，適当な quontized contact transformation によって次のいずれかに変換される．　（$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$）

i) $$\begin{cases} [n x_1 D_1 + (m+n) x_\ell D_\ell] u = D_2 u = \cdots = D_{\ell-1} u = 0 \\ \left[\left(\prod_{i=1}^{d-1} (D_1^n + C_i x_1^m D_\ell^n)\right) D_1 + \sum_{(m+n)k - n(d-1)-1 \leq j \leq mk-1} \lambda_{jk} x_1^j D_1^{j+1+n(d-1)-(m+n)k} D_\ell^{nk}\right] u = 0 \end{cases}$$

ii) $$\begin{cases} [n x_1 D_1 + (m+n) x_\ell D_\ell] u = D_2 u = \cdots = D_{\ell-1} u = 0 \\ \left[x_1 \left(\prod_{i=1}^{d-2} (D_1^n + C_i x_1^m D_\ell^n)\right) D_1 + \sum_{(m+n)k - n(d-2) \leq j \leq mk} \lambda_{jk} x_1^j D_1^{j+n(d-1)-(m+n)k} D_\ell^{nk}\right] u = 0 \end{cases}$$

iii) $$\begin{cases} [n x_1 D_1 + (m+n) x_\ell D_\ell] u = D_2 u = \cdots = D_{\ell-1} u = 0 \\ \left[\prod_{i=1}^{d} (D_1^n + C_i x_1^m D_\ell^n) + \sum_{(m+n)k - nd \leq j \leq mk-1} \lambda_{jk} x_1^j D_1^{j+nd-(m+n)k} D_\ell^{nk}\right] u = 0 \end{cases}$$

ここで，λ_{jk} は適当な複素数．さらに，すべての Λ_i が p を特異点にもつときは iii) に，Λ_i のうち少くとも2つのものが p を特異点とせずしかも transversal に交わっているとき ii) に，それ以外のとき i) に変換されるとしてよい。

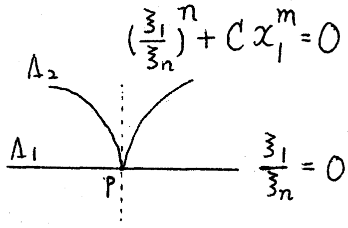
注意　Λに台を持つ symple holonomic system は，quontized contact transformation に対して，その各 Λ_i（の generic point）における order の差が不変量で，それは $d-1$ コある．そこで

$$\mu \equiv \{\text{定理2の標準型におけるパラメータ}\ \lambda_{jk}\ \text{の数}\} - (d-1)$$

とおくと，μ は Λ の generic point における方程式の情報からだけでは決まらない不変量を表わすパラメータの数とみなすことができる．μ の数は，定理2より：

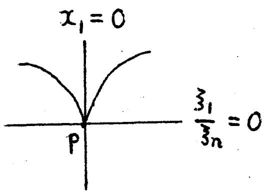
i）において，

$$\begin{cases} d=1,2 & \Rightarrow \mu = 0 \\ d=3 & \Rightarrow \mu = \min\{m-1, n+1\} \end{cases}$$



ii）において

$$\begin{cases} d=2,3 & \Rightarrow \mu = 0 \\ d=4 & \Rightarrow \mu = \min\{m, n\} \end{cases}$$



iii）において

$$\begin{cases} d=1 & \Rightarrow \mu = 0 \\ d=2 & \Rightarrow \mu = \min\{m-1, n-1\} \end{cases}$$

すべての Λ_i が非特異で，すべて互に

$$\begin{cases} \text{transversal に交わっているとき} & \mu = [\frac{d-1}{2}][\frac{d-3}{2}] \\ (d-1)\text{−次以上で接しているとき} & \mu = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \end{cases}$$

特に，$\mu = 0$ となるための必要十分条件は，

$$\begin{cases} d=1 \quad \text{または} \\ d=2 \text{ で, } \Lambda_1, \Lambda_2 \text{ のいずれかが非特異} \quad \text{または} \\ d=3 \text{ で, } \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \text{ の, いずれか2つが非特異で } p \text{ で} \\ \text{transversal に交わる.} \end{cases}$$

たとえば, $\mu=0$, $d=2$ の場合, 定理2より方程式は次の形に変換される ($\lambda=0$ としてもよい):

$$\mathcal{M}_{\alpha,\lambda}: \begin{cases} \left[x_1\left(\frac{D_1}{m+n}\right) - x_\ell\left(-\frac{D_\ell}{n}\right) + \lambda\right] u = D_2 u = \cdots = D_{\ell-1} u = 0 \\ \left[\left(\left(\frac{D_1}{m+n}\right)^n - x_1^m\left(-\frac{D_\ell}{n}\right)^n\right)\frac{D_1}{m+n} - \alpha x_1^{m-1}\left(-\frac{D_\ell}{n}\right)^n\right] u = 0 \end{cases}$$

ここで,

$$\Lambda_1 = \{ x_\ell = \xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{\ell-1} = 0 \}$$

$$\Lambda_2 = \left\{ x_1^{m+n} - x_\ell^n = \left(\frac{\xi_1}{m+n}\right)^n - x_1^m\left(-\frac{\xi_\ell}{n}\right)^n = \xi_2 = \cdots = \xi_{\ell-1} = 0 \right\}$$

$$\mathrm{ord}_{\Lambda_1}(\mathcal{M}_{\alpha,\lambda}) = n\lambda - n\alpha - \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{ord}_{\Lambda_2}(\mathcal{M}_{\alpha,\lambda}) = n\lambda + \alpha - \frac{m(n+1)}{2(m+n)} - \frac{1}{2}$$

§2 方程式の分解について,

§1で, $\mu=0$, $d=2$ の場合を考える. すなわち, simple holonomic system $\mathcal{M}$ の台を Λ とすると, Λ は非特異な部分多様体の超曲面で, 2つの既約成分 Λ_1 と Λ_2 をもち, しかも Λ_1 は非特異である。そこで,

$$e_1 = \mathrm{ord}_{\Lambda_1}(\mathcal{M}), \quad e_2 = \mathrm{ord}_{\Lambda_2}(\mathcal{M}) \qquad \text{とおく.}$$

$\mathcal{M}$ が既約でないとすると，$\mathcal{M}$ は Λ_1 を台とする方程式を商にもつ（$\Leftrightarrow$ Λ_2 を台とする方程式を含む）か，あるいは，Λ_2 を台とする方程式を商にもつ（$\Leftrightarrow$ Λ_1 を台とする方程式を含む）かである．

<u>定理3</u>　i) $\mathcal{M}$ が Λ_1 を台とする方程式を商にもつ

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqq \frac{m+n}{n+1}(e_1 - e_2) - \frac{m}{2} \equiv 0, 1, \cdots, n \mod (m+n)$$

ii) $\mathcal{M}$ が Λ_2 を台とする方程式を商にもつ．

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqq \frac{m+n}{n+1}(e_2 - e_1) - \frac{m}{2} \equiv 0, 1, \cdots, n \mod (m+n)$$

<u>注</u>　特に，Λ_2 も non-singular で，Λ_1 と Λ_2 が m 次の接触をしているとき，i) の条件は，

$$e_1 - e_2 = k \pm \frac{1}{m+1}, \quad k = 1, 3, 5, 7, \cdots$$

（定理3の m, n については，§1を見よ）

$\mu = 0$，$d = 3$ の場合についても同様な結果が得られるがここでは省略する．

§3　方程式の解について．— 1

§1の方程式 $\mathcal{M}_{\alpha,\lambda}$ の複素領域での解は，generalized hypergeometric function

$${}_{n+1}F_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}; \beta_1, \ldots, \beta_n; z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_{n+1})_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_n)_k (1)_k} z^k$$

ただし，$(\alpha)_k \equiv \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1) = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$

を用いれば，$(n+1)$-個の独立解　$(j=0,\cdots,n)$

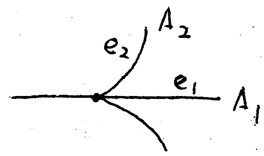
$$u_j(x) \equiv x_1^{j}\, x_\ell^{-n(\lambda+\frac{j}{m+n})}\; {}_{n+1}F_n\Big(\alpha+\frac{j}{m+n},\ \lambda+\frac{j}{m+n},\ \lambda+\frac{j}{m+n}+\frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$\lambda+\frac{j}{m+n}+\frac{n-1}{n};\ 1-\frac{1}{m+n},\ 1-\frac{2}{m+n},\ \cdots,\ 1-\frac{n-j}{m+n},\ 1+\frac{1}{m+n},\ \cdots,\ 1+\frac{j}{m+n};\ \frac{x_1^{m+n}}{x_\ell^{n}}\Big)$$

の1次結合であることがわかる。

実領域での $\mathcal{M}_{\alpha,\lambda}$ の microfunction 解を考えよう。それは2次元であるが，それらは $u_j(x)$ の1次結合をうまくとって実への境界値を考えることにより構成される。それは，${}_{n+1}F_n$ の接続公式がわかっているので，具体的に計算できる。解の symbol の間には次の関係が成立する。

<u>定理４</u>　Λ_1, Λ_2 が純虚であるとする．Λ_1, Λ_2 上での実数値解析関数 f，g が次式を満たすようにとれる．



$$\begin{cases} \Lambda_1 \text{ 上で } f=0 \\ \Lambda_2 \text{ 上で } \left(\dfrac{f}{m+n}\right)^n = g^m \\ \sqrt{-1}\,\{f, g\} > 0 \end{cases}$$

そこで，　$\Lambda_1^+ = \Lambda_1 \cap \{g>0\}$，$\Lambda_1^- = \Lambda_1 \cap \{g<0\}$

$\Lambda_2^+ = \Lambda_2 \cap \{f>0,\ g>0\}$，$\Lambda_2^- = \Lambda_2 \setminus \overline{\Lambda_2^+}$

とおく．このとき，次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\Lambda_1^+}(u) \\ \sigma_{\Lambda_1^-}(u) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{n}\,\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left(\prod_{j=0}^{n} \Gamma\Big(\frac{e_2-e_1}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{2j-n}{2(m+n)}\Big)\right) \left|\frac{g^{\frac{m+n}{n}}}{\{f, g\}}\right|^{e_1-e_2}$$

$$\times \begin{bmatrix} A_1^+ & A_2^- \\ A_1^- & A_2^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\Lambda_2^+}(u) \\ \sigma_{\Lambda_2^-}(u) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{A_2^+}(u)\\ \sigma_{A_2^-}(u)\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{n}}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\left(\prod_{j=0}^{n}\Gamma\left(\frac{e_1-e_2}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{2j-n}{2(m+n)}\right)\right)\left|\frac{g^{\frac{m+n}{n}}}{\{f,g\}}\right|^{e_2-e_1}\begin{bmatrix}B_1^+ & B_2^-\\ B_1^- & B_2^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{A_1^+}(u)\\ \sigma_{A_1^-}(u)\end{bmatrix}$$

ただし

イ) m : odd, n : odd のとき

$$A_1^{\pm}=A_2^{\pm}=\frac{1}{2}\left\{e^{\frac{\pi i}{4}\frac{n+1}{m+n}}\prod_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}}\cos\pi\left(\frac{e_2-e_1}{n+1}-\frac{4\nu-n}{2(m+n)}\right)\pm e^{-\frac{\pi i}{4}\frac{n+1}{m+n}}\prod_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}}\cos\pi\left(\frac{e_2-e_1}{n+1}+\frac{4\nu-n}{2(m+n)}\right)\right\}$$

$$B_1^{\pm}=B_2^{\pm}=i\left\{e^{-\frac{\pi i}{4}\frac{n+1}{m+n}}\prod_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}}\cos\pi\left(\frac{e_1-e_2}{n+1}-\frac{4\nu-n}{2(m+n)}\right)\pm e^{\frac{\pi i}{4}\frac{n+1}{m+n}}\prod_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}}\cos\pi\left(\frac{e_1-e_2}{n+1}+\frac{4\nu-n}{2(m+n)}\right)\right\}$$

ロ) m : even, n : odd のとき

$$A_1^{\pm}=-A_2^{\pm}=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{i}\left\{\prod_{0\le j\le\frac{n-1}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{e_2-e_1}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{4j+2-n}{2(m+n)}\right)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{e_2-e_1}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{4j-n}{2(m+n)}\right)\right)\right.$$
$$\left.\pm\prod_{0\le j\le\frac{n-1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\left(\qquad〃\qquad\right)\sin\frac{\pi}{2}\left(\qquad〃\qquad\right)\right)\right\}$$

$B_1^{\pm}=-B_2^{\pm}$ = ($A_2^{\pm}$ の e_1 と e_2 を交換したもの)

ハ) m : odd, n : even のとき

$$A_1^{\pm}=2^{\frac{n+1}{2}}\left\{e^{-\frac{\pi i}{4}}\prod_{0\le j\le\frac{n}{2}-1}\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{e_2-e_1}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{4j+2-n}{2(m+n)}\right)\cdot\prod_{0\le j\le\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{e_2-e_1}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{4j-n}{2(m+n)}\right)\pm e^{\frac{\pi i}{4}}\prod_{0\le j\le\frac{n}{2}-1}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{e_2-e_1}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{4j+2-n}{2(m+n)}\right)\right.$$
$$\left.\times\prod_{0\le j\le\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{e_2-e_1}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{4j-n}{2(m+n)}\right)\right\}$$

$$A_2^{\pm}=2^{\frac{n+1}{2}}\left\{e^{\frac{\pi i}{4}}\qquad〃\qquad\mp e^{-\frac{\pi i}{4}}\qquad〃\qquad\right\}$$

$$B_1^{\pm}=2^{\frac{n+1}{2}}\left\{e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\prod_{0\le j\le\frac{n}{2}-1}\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{e_1-e_2}{n+1}+\cdots\right)\cdot\prod_{0\le j\le\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{e_1-e_2}{n+1}+\cdots\right)+e^{\mp\frac{\pi i}{4}}\cdots\cdots\right\}$$

$$B_2^{\pm}=2^{\frac{n+1}{2}}\left\{e^{\mp\frac{\pi i}{4}}\qquad〃\qquad-e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\qquad〃\qquad\right\}$$

注 $d=3,\ \mu=0$ のときも、解は ${}_{n+1}F_n$ を用いて表わされるが、具体的には、実の解は計算されていない (可能と思われるが‥)

§4 方程式の解について — 2

方程式を標準型に直す時に，0階の可逆な micro-differential operator を用いた変換が行なわれる。それに対応した解の変化を考えるのに，次の定理が有効である（cf. [2]）.

<u>定理 6</u>　$(0; dx_\ell)$ の近傍で定義された holonomic system

$$\mathcal{M}:\begin{cases} \left[x_1\left(\frac{D_1}{m+n}\right)-x_\ell\left(-\frac{D_\ell}{n}\right)+\lambda\right]u = D_2 u = \cdots = D_{\ell-1}u = 0 \\ \left[\left\{\prod_{i=1}^{d-1}\left(\left(\frac{D_1}{m+n}\right)^n - C_i x_1^m\left(-\frac{D_\ell}{n}\right)^n\right)\right\}\frac{D_1}{m+n} + \sum_{(m+n)k-n(d-1)-1\le j\le mk-1}\lambda_{jk}x_1^j D_1^{n(d-1)+j+1-(m+n)k} D_\ell^{nk}\right]u = 0 \end{cases}$$

を考える。P を，$(0; dx_\ell)$ の近傍で定義された0階の micro-differential operator とする。このとき，$\frac{nk}{m+n}+(n\lambda-k)$ が整数となるような $\{0,1,\ldots,n(d-1)\}$ の元 k の全体を K とおくと（λ が一般なら $K=\phi$），

$$\begin{aligned} Pu = &\sum_{k\in\{0,1,\ldots,n(d-1)\}-K} Q_k(x)(D_1/D_2)^k u \\ &+ \sum_{k\in K}\ \sum_{0\le j\le \frac{nk}{m+n}+(n\lambda-k)-1} Q_k^j(x_1,\ldots,x_{\ell-1})(D_1/D_\ell)^k D_\ell^{-j} u \\ &+ \sum_{k\in K} Q_k(x)(D_1/D_\ell)^k D_\ell^{-\frac{nk}{m+n}-n\lambda+k} u \end{aligned}$$

を満たす解析関数 Q_k，Q_k^j が存在する。

$$\mathcal{N}:\begin{cases} \left[x_1\left(\frac{D_1}{m+n}\right)-x_\ell\left(-\frac{D_\ell}{n}\right)+\lambda\right]u = D_2 u = \cdots = D_{\ell-1}u = 0 \\ \left[\prod_{i=1}^{d}\left(\left(\frac{D_1}{m+n}\right)^n - C_i x_1^m\left(-\frac{D_\ell}{n}\right)^n\right) + \sum_{(m+n)k-nd\le j\le mk-1}\lambda_{jk}x_1^j D_1^{j+nd-(m+n)k} D_\ell^{nk}\right]u = 0 \end{cases}$$

の場合は，$\{0,1,\ldots,n(d-1)\}$ を，$\{0,1,\cdots,nd-1\}$ に置き換えて同様な命題が成立する。

References

[1] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima : Microlocal analysis of prehomogeneous vector spaces, to appear in Invent. Math.

[2] M. Kashiwara, T. Kawai and T. Oshima : A study of Feynman integrals by micro-differential equations, Commun. Math. Phys., 60 (1978), 97–130.