数理解析研究所講究録
第416巻 1981年 60-107

超函数の特異集合と概均質ベクトル空間に付随するゼータ函数の留数.

高知大 理　室政和

概均質ベクトル空間に付随するゼータ函数の函数等式は相対不変式の複素ベキのFourier変換を計算することによって得られる。(佐藤-新谷[1][2], 木村[3]) それでは、ゼータ函数の留数に対しては、相対不変式はどのような情報を与えるであろうか。また超局所解析(microlocal calculus)の方法はやはりこの場合にも有効であろうか。

これらの問題については、佐藤-新谷[2]においてすでにimplicite な形で、ある種の相対不変超函数のFourier変換に帰着されることが実例を通して述べられており、さらに超局所解析がここでも有効であるということは1975年すでに木村氏によって注意されている。木村氏はまた同じ概均質ベクトル空間に付随するいくつかのゼータ函数たち(それらのpossible poles の位置は同じである。)の留数の比は、このFourier変換だけによって計算される(すなわち格子のとり方などによ

らない）ことを発表されている。（木村[9] 1978） しかしその詳細については、未だあきらかにされていないようである。（特に、どのような条件のもとに計算が可能なのかについて）

筆者は 1979年になって、やっと同様のことに気がつき、実例の計算を実行して来た。 実際にやってみると、超局所解析だけでは、かたのつかぬ問題も多く、種々の工夫が必要である。にもかかわらず、超函数の特異性が留数の計算に大きく影響をおよぼしていることは事実のようである。この小論では、超函数の特異性と留数の計算がどのようにかかわっているかを実例をまじえて解説する。

最後に今回の研究集会の出席者との種々の討論が、大変に有益であったことを記し、代表者をはじめとする五名の出席者の方々に感謝したい。

§1. 超函数の特異性。

まず (G, ρ, V) を既約な正則概均質ベクトル空間として $P(x)$ を既約な相対不変式、対応する character を χ とする。singular set S は $P(x)$ の零点集合に等しく、G はユニモジュラーであることを仮定する。$n = \dim V$, $d = \deg P(x)$ とする。$(G_{\mathbb{R}}, \rho, V_{\mathbb{R}})$ をひとつの real form として、$G_{\mathbb{R}}^{+}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の単位元を含む連結成分、$G' = \{g \in G_{\mathbb{R}}^{+} ; \chi(g) = 1\}$ とおく。ここまで

は通常おいている仮定として無理のないものであるが、さらに次の仮定をおく。

(仮定) $S_{\mathbb{R}} = S \cap V_{\mathbb{R}}$ は有限個の G'-orbit に分かれる。

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ を G'-orbit 分解としよう。我々は次の問題をまず考える。

(問題) 1. $\overline{S_i}$ $(i=1,\cdots,k)$ を support にもつ, G'不変超函数 T_i で, S_i上で G'不変測度となっているものは存在するか。

2. 存在したとすればそれは定数倍をのぞいてユニークか。

G'-不変な超函数は、この場合 $G_{\mathbb{R}}$-相対不変である。したがって適当な $s_i \in \mathbb{C}$ が存在して

$$T_i(\rho(g)\cdot x) = \chi(g)^{s_i}\, T_i(x) \quad , (g \in G_{\mathbb{R}}^{+})$$

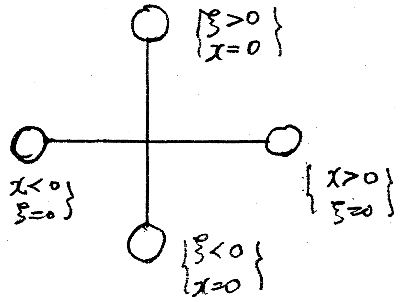
をみたす。これは、holonomic system

$$\mathfrak{M}_{s_i};\ (\langle d\rho(A)\cdot x, D_x\rangle - s_i\,\delta\chi(A))\,u = 0 \quad (A \in \mathcal{L}(G_{\mathbb{R}}))$$

をみたすことと同等である。ここで $\mathcal{L}(G_{\mathbb{R}})$ は $G_{\mathbb{R}}$ の Lie algebra, $d\rho$ は ρ の infinitesimal representation, $\delta\chi$ は χ の infinitesimal character である。これによって、我々は、$\mathfrak{M}_{s_i}$ の holonomy diagram をえがくことによって、$T_i(x)$ の support だけでなく singular spectrum に対しても完全に知ることができる。それを知るためにまず次のことに注意す

る。

<u>補題1</u> 一変数の holonomic system $(xD_x - s)u=0$ の $\sqrt{-1}T^*V_{\mathbb{R}}=\{(x,\xi)\}$ における characteristic variety は $\{x=0\}\cup\{\xi=0\}$ であり, holonomy diagram は右図のようになる。



さらに,

i) $s\neq -1,-2,\cdots$ のとき,

$\{x<0\}$ (resp. $\{x>0\}$) 上の holonomic system の解は その closure に support をもつ超函数にユニークにのびる。singular spectrum は $\begin{Bmatrix}x>0\\ \xi=0\end{Bmatrix}$ (resp. $\begin{Bmatrix}x<0\\ \xi=0\end{Bmatrix}$) 上にはない。

ii) $s=-1,-2,\cdots$ のとき,

$\{x<0\}$ (resp. $\{x>0\}$) 上の holonomic system の解は, $\{x>0\}$ (resp. $\{x<0\}$) へはユニークにのびる。ただし, $f(x)$ をひとつの解とすれば, $f(x)+c\cdot\delta^{(-s+1)}(x)$ も解である。ここで c は定数, $\delta(x)$ はデルタ函数, $(-s+1)$ は D_x による微分の回数をあらわす。特に $f(x)\equiv 0$ とれば $\{x=0\}$ に support をもつ解が存在する。

この補題を使って, 次の実例で, singular set $S_{\mathbb{R}}$ の各 G'-orbit の closure を support に持つ超函数の存在を見よう。

<u>例 1.1</u>　$G_{\mathbb{C}} = GL(2) \times SO(m)$　　$m \geqq 4$

$V_{\mathbb{C}} = M(2, m)$

ρ ; $g = (g_1, g_2) \in G_{\mathbb{C}}$　$x \in V_{\mathbb{C}}$ に対して、　$\rho(g) \cdot x = g_1 x {}^t g_2$

このとき、相対不変式 $P(x) = \det(x {}^t x)$、対応する character

$\chi(g) = \det(g_1)^2$。　$P(x)^s$ の b 函数は、

$$b(s) = (s+1)(s+\tfrac{3}{2})(s+\tfrac{m-1}{2})(s+\tfrac{m}{2}).$$

Complex holonomy diagram は

右の図のようになる。ここで ◯ は

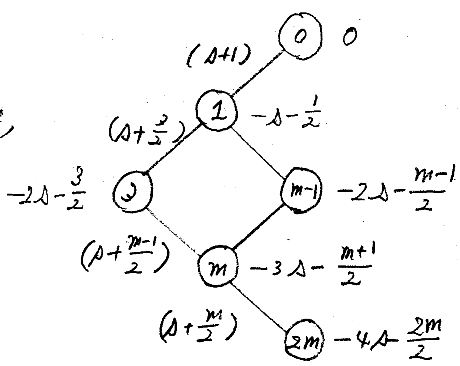
V における G-orbit の Conormal bundle,

中の数は orbit の codimension,

◯ の横の数は order, 線のそばに

( ) に入れて書かれている数は、その

交わりより出る b 函数の factor である。



1) まず　$m > 5$ として、　$G^+_{\mathbb{R}} = GL^+(2, \mathbb{R}) \times SO(p.q, \mathbb{R})$

$(p.q \geqq 3)$,　$V_{\mathbb{R}} = M(2, m, \mathbb{R})$ を real form としてとってみる。

$P(x) = \det(x I_{pq} {}^t x)$。ここで $I_{pq} = I_p \oplus -I_q$ の対角行列を

あらわしている。このとき $V_{\mathbb{R}}$ は次のような $G^+_{\mathbb{R}}$-orbits に

分かれる。

(1) Open orbits ;　$G^+_{\mathbb{R}} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right]$,　$G^+_{\mathbb{R}} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & & 1 & \end{array}\right]$,　$G^+_{\mathbb{R}} \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right]$

(2) 余次元1の orbits ;　$G^+_{\mathbb{R}} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \end{array}\right]$,　$G^+_{\mathbb{R}} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & 1 & & 1 \end{array}\right]$

(3) 余次元$(m-1)$;　$G^+_{\mathbb{R}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & & & \end{array}\right]$,　$G^+_{\mathbb{R}} \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & \end{array}\right]$

(4) 余次元3 ; $G_{\mathbb{R}}^{+}\cdot\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \end{array}\right]$

(5) 余次元m ; $G_{\mathbb{R}}^{+}\cdot\left[\begin{array}{c:c} 1 & 1 \\ & \end{array}\right]$

(6) 余次元0 ; $G_{\mathbb{R}}^{+}\cdot\left[\begin{array}{c:c} & \\ & \end{array}\right]$

Open orbit に G'不変な測度が入ることは，わかっている。
($|P(x)|^{-\frac{n}{d}}|dx|$ ととればよい。)

余次元1のorbitを考えよう。この上にG'不変な測度が入るとすれば，それを$V_{\mathbb{R}}$上の超函数とみて そのorbitの余法束(conormal bundle)上のorderは$\frac{1}{2}$でなければならない。さらにorder $\frac{1}{2}$のその(余次元1の)orbitをsupportに持つ超函数が存在すれば，それはorbit上の測度になっている。

holonomy diagramをながめて，余次元1のorbitの余法束上にorder $\frac{1}{2}$のhyperfunction solution of $\mathfrak{M}_s$ with some $s\in\mathbb{C}$が存在するか否かを考えてみよう。order $\frac{1}{2}$であるから $-s-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ゆえ $s=-1$でなければならない。①と③の交わりの近傍でquantized contact transformationをして，①を補題1におけるzero section $\{\xi=0\}$，③を原点の余法束としてみなすと，$(xD_x-(s+\frac{3}{2}-1))u=0$と同じになる。したがって $s+\frac{3}{2}-1=s+\frac{1}{2}$ は $s=-1$のとき，-1より大きいから補題1，i)によって，①上のmicrofunction solution of order $\frac{1}{2}$は③までユニークにのびる。

同様にして，③から(m)，①から(m-1)，(m)から(2m)へも

ユニークにのびる。

⓪と① の交わりの近傍で, quantized contact transformation で, ⓪ を zero section, ① を原点の余法束とすることができる。holonomic system は $(xD_x-(s+1-1))u=0$ で $s=-1$ であるから, 補題1, ii) によって, ① にのみ support をもつ microfunction 解にすることができる。

かくして我々は, ① ③ ⓜ (m-1) (2m) に support をもつ microfunction 解があることを知った。これは $\sqrt{-1}T^*V_{\mathbb{R}}$ 全体で定義された microfunction であるから, これを singular spectrum とする hyperfunction は, ① ③ ⓜ (m-1) (2m) を V に project したところに support をもつ。したがって, この hyperfunction は余次元 1 の orbit の closure に support をもつ。つまり余次元 1 の orbit に対して問題 1, 2 は肯定的である。

同様にして我々は余次元 3, $m-1$, $2m$, の orbit に対しては, 問題 1, 2, は肯定的である。

次に余次元 m の orbit について考えてみよう。この上に support をもつ超函数としては order は $\frac{m}{2}$ でなければならない。$-3s-\frac{m+1}{2}=\frac{m}{2}$ だから $s=-\frac{2m+1}{6}$。このとき, $(s+\frac{m-1}{2})$ と $(s+\frac{3}{2})$ が $0,-1,\cdots$ ならば, ⓜ に support を持ち, ③ と (m-1) には support を持たぬ microfunction solution が存在しうる。

これは $m=4$ でないかぎり不可能であり，したがって今の場合このようなものはない。つまり問題1. に対して否定的である。

2) 次に $m=4$ とする。$G_{\mathbb{R}}^+ = GL^+(2,\mathbb{R}) \times SO(1,3;\mathbb{R})$, $V_{\mathbb{R}} = M(2,4,\mathbb{R})$ を real form としてとってみる。相対不変式は $P(x) = \det(x I_{1,3}\, {}^t x)$。このとき，$V_{\mathbb{R}}$ は次のような $G_{\mathbb{R}}^+$-orbits に分かれる。

Open orbits ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right]$, $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right]$

余次元 1 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right]$,

余次元 3 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ & & & \end{array}\right]$, $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} & 1 & & \\ & & & \end{array}\right]$

余次元 4 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ & & & \end{array}\right]$,

余次元 8 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} & & & \\ & & & \end{array}\right]$,

このとき，余次元 1, 4, 及び 8 の orbits に対しては，1) の場合と同様にして，G' 不変測度が入り，しかもそれは G' 不変な超函数として，ユニークに $V_{\mathbb{R}}$ 全体に拡張される。

余次元3の orbit については，その orbit 上に G' 不変な測度が入ることはわかる。しかし，余次元 $m-1$ の orbit の closure には余次元 m の orbit が含まれ，その上にも，G' 不変な測度が入るので，余次元 $m-1$ 上の G' 不変測度は，$V_{\mathbb{R}}$ 全体にユニークには拡張されない。

以上の例で見るように，ある orbit に G'不変測度が入るか否か，また それが，G'不変な超函数として $V_{\mathbb{R}}$上にユニークに拡張できるか否かを知るためには，

1) その orbit の conormal bundle 上の order。

2) その orbit の conormal bundle と余次元1で交わる Lagrangian との間の b函数の factor。

に注意して，microfunction solution を延長して，その orbit に support をもつ hyperfunction の存在を知ればよい。

§2. G'-不変超函数の Fourier 変換。

さて，このようにして得られた，超函数は homogeneous であり，さらに $G_{\mathbb{R}}^{+}$-相対不変超函数であるから，その Fourier 変換も，相対不変超函数になることが容易にわかる。一般に $\varphi(x)$ を $V_{\mathbb{R}}$ 上の k次 homogeneous な超函数とするとき，それを $x=r\cdot\xi$ $(r>0,\ \xi\in S^{n-1})$ で極座標表示すれば，

$$(*)\quad \int \varphi(x)\exp(\sqrt{-1}\langle x,y\rangle)\,dx$$
$$=\int_0^\infty dr\int_{S^{n-1}} d\omega(\xi)\; r^{k+n-1}\varphi(\xi)\exp(\sqrt{-1}\, r\langle\xi,y\rangle)$$
$$=\int_{S^{n-1}}\varphi(\xi)\,\Phi_{k+n}(\sqrt{-1}\langle\xi,y\rangle)\,d\omega(\xi)\ 。$$

ここで $\Phi_\lambda(\tau)=\Gamma(\lambda)(-\tau)^{-\lambda}\quad\left((-\tau)^{-\lambda}\big|_{\tau=-1}=1\right)$

$d\omega(\xi)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\xi_j\,d\xi_1\wedge\cdots\wedge\check{d\xi_j}\wedge\cdots\wedge d\xi_n$ である。

$\Phi_\lambda(\sqrt{-1}\langle\xi, y\rangle)$ は $\xi\in S^{n-1}$ について real analytic に depend しているから，S^{n-1} 上の超函数 $\varphi(\xi)$ の test function とみることができる。さらにこれは超函数の平面波展開である。すなわち，今 $T_i(x)$ をある singular orbit S_i の閉包に support をもつ G_1-不変な超函数とするとき，その Fourier 変換の平面波展開が得られる。一方 $T_i(x)$ に対応する character が $\chi(g)^{s_i}$ であるとき，その Fourier 変換 $\hat{T}_i(y)$ は，$\chi(g)^{-(s_i+\frac{n}{d})}$ に対応する $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の hyperfunction であることは容易にわかる。以上の考察によって，

i) $SS(\hat{T}_i(y)) \cap \{0\}\times\sqrt{-1}S^{n-1} = \sqrt{-1}S^{n-1}\cap\{\mathrm{supp}\ T_i(x)\}$。

（ここでは $V_{\mathbb{R}}$ とその dual space $V_{\mathbb{R}}^*$ を同一視している。）

ii) $\hat{T}_i(\rho^*(g)\cdot y) = \chi(g)^{+s_i+\frac{n}{d}}\,\hat{T}_i(y)$。

したがって このような条件をみたすところの holonomic system

$$\mathcal{M}^*_{-(s_i+\frac{n}{d})}\ ;\ (\langle d\rho^*(A)\cdot y, D_y\rangle - (+s_i+\tfrac{n}{d})\,\delta\chi(A))\,u = 0$$

の解であり，しかも (*) の平面波展開を持つものを holonomy diagram を見ながらさがせばよい。これは holonomy diagram の各 Lagrangian のつながりを見ればわかる。この状況をもうすこしくわしく説明しよう。

$T_i(x)$ は $V_{\mathbb{R}}$ 上の homogeneous hyperfunction であり holonomic system $\mathcal{M}_{s_i}$ をみたす。その singular spectrum $\Lambda\subset\sqrt{-1}T^*V_{\mathbb{R}}$

は、いくつかの connected irreducible Lagrangian components $\Lambda=\Lambda_1\cup\cdots\cup\Lambda_r$ に分解される。Λ_j を good Lagrangian として、その上の $T_i(x)$ の principal symbol を考えよう。これは、$\sqrt{\Omega_{\Lambda_j}}\otimes\sqrt{\Omega_V}^{-1}$ の Λ_j の generic point では real analytic な section であり、

$$(2.1)\qquad \sigma_{\Lambda_j}(T_i(x)) = C_{\Lambda_j}\cdot|P_{\Lambda_j}|^{\lambda_i}\cdot\sqrt{|\omega_{\Lambda_j}|}\Big/\sqrt{|dx|}$$

と適当な定数 C_{Λ_j} をもって書くことができる。ここで、

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} P_{\Lambda_j} &= P\circ\pi\Big/\langle x,y\rangle^{\sigma_j} \\ \omega_{\Lambda_j} &= \frac{\pi^{-1}(dx)\wedge d\langle x,y\rangle}{\langle x,y\rangle^{l_j}}\Big/d\langle x,y\rangle \\ \pi &: W \longrightarrow V_{\mathbb{R}} \\ W &= \{(x,y)\in T^*V_{\mathbb{R}};\ \langle Ax,y\rangle=0\quad A\in\mathcal{L}(G')\} \end{aligned}$$

で、σ_j, l_j は、P_{Λ_j}, ω_{Λ_j} が Λ_j 上の non-vanishing real analytic な関数あるいは n-form となる数である。

一方 $T_i(x)$ の Fourier 変換 $\hat{T}_i(y)$ は $\mathcal{M}^+_{-\lambda_i-\frac{n}{d}}$ をみたす $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の hyperfunction とみることができる。(*)より

$$(2.3)\qquad T_i(x) = \int_{S^{n-1}} \hat{T}_i(\xi)\,\Phi_{d\lambda_i+n}(-\sqrt{-1}\langle\xi,x\rangle)\,d\omega(\xi)$$

であり、これは $T_i(x)$ の平面波展開式をあらわしている。$\hat{T}_i(y)$

は $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ 上では real analytic であり定義より

$$(2.3)' \quad \sigma_{\{0\}\times V_{\mathbb{R}}^* - S^*}(T_i(x)) = (2\pi)^{ds_i+\frac{n}{2}}\,\hat{T}_i(y)\sqrt{|dy|}\Big/\sqrt{|dx|}\,\Big|_{V_{\mathbb{R}}^* - S^*}$$

となって与えられる。

そこで、今 $M = \{0\}\times V^*$ として、M 上の principal symbol のなす line-bundle $\sqrt{\Omega_M}\otimes\sqrt{\Omega_{V_{\mathbb{R}}}}^{-1}$ に $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の hyperfunction $B(V_{\mathbb{R}}^*)$ を tensor して得られる bundle $B(V_{\mathbb{R}}^*)\otimes_{\mathcal{A}(V_{\mathbb{R}}^*)}\sqrt{\Omega_M}\otimes\sqrt{\Omega_{V_{\mathbb{R}}}}^{-1}$ を考えて、$\hat{T}_i(y)\sqrt{|dy|}/\sqrt{|dx|}$ を、この bundle の section としよう。$T^*V_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}}\times V_{\mathbb{R}}^* \cong T^*V_{\mathbb{R}}^*$ を同一視することによって、$\mathcal{M}_{s_i}$ と $\mathcal{M}^*_{-s_i-\frac{n}{d}}$ の characteristic variety は一致し、また一方で good Lagrangian であるものは他方でもそうである。そこで、$\hat{T}_i(y)$ の Λ_j の上の principal symbol を考えると、それは、$\sqrt{\Omega_{\Lambda_j}}\otimes\sqrt{\Omega_{V_{\mathbb{R}}}}^{-1}$ の Λ_j の generic point では real analytic な section で、

$$(2.4) \quad \sigma^*_{\Lambda_j}(\hat{T}_i(y)) = c^*_{\Lambda_j}\cdot|Q_{\Lambda_j}|^{-s_i-\frac{n}{d}}\sqrt{|\omega^*_{\Lambda_j}|}\Big/\sqrt{|dy|}$$

と適当な定数 $c^*_{\Lambda_j}$ をもって書ける。ここで $Q(y)$ は X^{-1} に対応する (G,ρ^*,V^*) の相対不変式であり、

$$(2.5) \quad Q_{\Lambda_j} = Q\circ\pi^* \Big/ \langle x,y\rangle^{\sigma_j^*}$$

$$\omega^*_{\Lambda_j} = \frac{\pi^{*-1}(dy)\wedge d\langle x,y\rangle}{\langle x,y\rangle^{l_j^*}}\Big/ d\langle x,y\rangle$$

$$\pi^*: W \longrightarrow V_{\mathbb{R}}^*$$

によって定義される, σ_j^*, l_j^* などは (2.2) と同様にして定義される数である。このとき,

命題 2.1.

$$(2.6)\quad \sigma_{\Lambda_j}(T_i(x)) = (2\pi)^{d\Delta_i+\frac{n}{2}}\, \sigma_{\Lambda_j}^*(\hat{T}_i(y))\sqrt{|dy|}/\sqrt{|dx|}$$

が成立することがわかる。特に Λ_j を $\{0\}\times V_{\mathbb{R}}^*-S^*$ のひとつの connected component とすると, これは (2.3)′ にほかならない。

これよりただちに,

$$(2.7)\quad C_{\Lambda_j}\,|P_{\Lambda_j}|^{\Delta_i}\sqrt{|\omega_{\Lambda_j}|} = (2\pi)^{d\Delta_i+\frac{n}{2}}\, C_{\Lambda_j}^*\,|Q_{\Lambda_j}|^{-\Delta_i-\frac{n}{d}}\sqrt{|\omega_{\Lambda_j}^*|}$$

が得られ, 一方 W 上で直接計算することにより,

$$|P_{\Lambda_j}|^{\Delta_i}\sqrt{|\omega_{\Lambda_j}|} = |K_0|^{\Delta_i}\sqrt{|K_1|}\;|Q_{\Lambda_j}|^{-\Delta_i-\frac{n}{d}}\sqrt{|\omega_{\Lambda_j}^*|}$$

$$K_0 = Q(y)^{-1}\,P(\mathrm{grad}\log Q(y))$$

$$K_1 = Q(y)^{2n/d}\,\mathrm{Hess}\log Q(y)$$

が得られる。したがって

命題 2.2

$$(2.8)\quad C_{\Lambda_j}^* = (2\pi)^{-d\Delta_i-\frac{n}{2}}\,|K_0|^{+\Delta_i}\cdot(\sqrt{|K_1|})\quad C_{\Lambda_j}\,。$$

を得る。

このようにして我々は，次のことを得る。

定理 2.3　$T(x)$ を $\mathfrak{M}_{s}$ の hyperfunction solution, C を $T(x)$ の singular sepectrum in $T^*V_{\mathbb{R}}$ とする。このとき，

i)　$\hat{T}(x)$ は $\mathfrak{M}^*_{-s-\frac{n}{d}}$ の hyperfunction solution であり，
$T^*V_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^* \cong (V_{\mathbb{R}}^*)^* \times V_{\mathbb{R}}^* \cong T^*V_{\mathbb{R}}^*$ によって，$T^*V_{\mathbb{R}}$ と $T^*V_{\mathbb{R}}^*$ を同一視するとき，$\hat{T}(y)$ の singular spectrum in $T^*V_{\mathbb{R}}^*$ は C と一致する。

ii)　Λ を C の中のひとつの irreducible connected Lagrangian subvariety で good Lagrangian であるとする。このとき，$\sigma_{\Lambda}(T(x))$ と，$\sigma_{\Lambda}(\hat{T}(y))$ を (2.1), (2.4) の形に表示するとき，(2.8) の形の表示式を得る。

この定理を使って我々は実際に与えられた相対不変超函数の Fourier 変換をすることができる。以下，実例によって，それを実行してみよう。

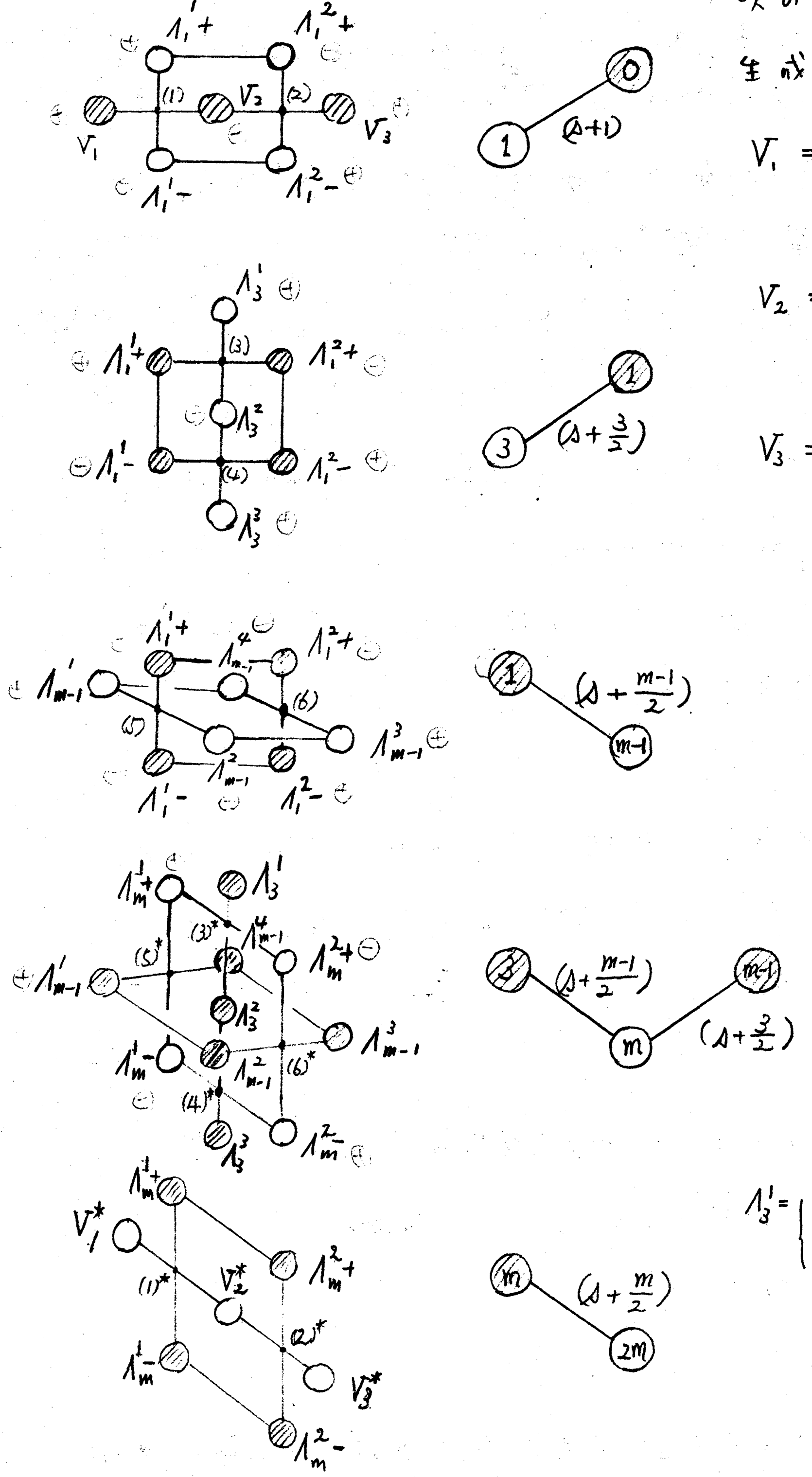
例 2.1　§1 の例 1.1 と同じ概均質ベクトル空間

$$G_{\mathbb{C}} = GL(2) \times SO(m) \qquad (m \geqq 4)$$
$$V_{\mathbb{C}} = M(2, m)$$

をとる。

1) $m > 5$　$p, q \geqq 3$ としよう。このとき，Real holonomy diagram

diagram は. 次のようになる。各 real Lagrangian orbit のは次のような点によって生成される。



$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & 0 \\ & 1 & \vdots & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \right\} \in V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^* \cong T^*V_{\mathbb{R}}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \vdots & \\ & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & \\ & \vdots & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_1^1+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & \\ & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & +1 & \vdots & +1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_1^1- = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & \\ & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_1^2+ = \left\{ \begin{bmatrix} & \vdots & 1 & \\ 1 & \vdots & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_1^2- = \left\{ \begin{bmatrix} & \vdots & 1 & \\ 1 & \vdots & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_3^1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & 1 & \\ & 1 & \vdots & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \Lambda_3^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & 1 & \\ & 1 & \vdots & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_3^3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & 1 & \\ & 1 & \vdots & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -1 \\ -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda^1_{m-1} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & 1 & & \end{array}\right] \end{array} \right\} \quad \Lambda^2_{m-1} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & 1 & \end{array}\right] \end{array} \right\} \quad \Lambda^3_{m-1} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \right\} \quad \Lambda^4_{m-1} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ 1 & & & \end{array}\right] \end{array} \right\}$$

$$\Lambda^1_m{+} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ & & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ & 1 & & \end{array}\right] \end{array} \right\} \quad \Lambda^1_m{-} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ & & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & & -1 & \\ & 1 & & \end{array}\right] \end{array} \right\} \quad \Lambda^2_m{+} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ & & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \right\} \quad \Lambda^2_m{-} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & - & \\ & & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \right\}$$

$$V_1^* = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \right\} \quad V_2^* = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \right\} \quad V_3^* = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{c|cc} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{array}\right] \end{array} \right\}$$

各 orbit に付随する Maslov index は次のとおりである。ここで，orbit Λ に付随する Maslov index $\tau(\Lambda)$ とは $(x,y)\in\Lambda$ を Λ の generic point とするとき，

$$\tau(\Lambda) \underset{\text{def}}{=} \underset{A\in\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}{\mathrm{sgn}} \langle Ax, {}^tAy\rangle = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\text{上の2次型式 } \langle Ax, {}^tAy\rangle \\ \text{の positive eigenvaluesの\#} \\ -\text{ negative eigenvaluesの\#} \end{array} \right\}$$

で定義されるものである。

(2.9) $\tau(V_i) = \tau(V_i^*) = 0 \quad (i=1,2,3)$

$\tau(\Lambda^1_1{+}) = \tau(\Lambda^1_m{+}) = -(q-p+1), \quad \tau(\Lambda^2_1{+}) = \tau(\Lambda^2_m{+}) = -(q-p-1)$

$\tau(\Lambda^1_1{-}) = \tau(\Lambda^1_m{-}) = (q-p+1), \quad \tau(\Lambda^2_1{-}) = \tau(\Lambda^2_m{-}) = (q-p-1)$

$\tau(\Lambda^1_3) = -2(q-p), \quad \tau(\Lambda^2_3) = 0, \quad \tau(\Lambda^3_3) = 2(q-p)$

$\tau(\Lambda^1_{m-1}) = 0 \qquad \tau(\Lambda^2_{m-1}) = 0$

$\tau(\Lambda^3_{m-1}) = 0 \qquad \tau(\Lambda^4_{m-1}) = 0$

同じようにして，各 Lagrangian の交わりに付随する Maslov index は次のとおりである。

$$\tau((1)) = \tau((1)^*) = \tau((2)) = \tau((2)^*) = 0.$$

$$\tau((3)) = \tau((3)^*) = -(q-p) \qquad \tau((4)) = \tau((4)^*) = (q-p)$$

$$\tau((5)) = \tau((5)^*) = 0 \qquad \tau((6)) = \tau((6)^*) = 0$$

この概均質ベクトル空間の Lagrangian の交わりはすべて、"good" であり、しかも、$\Lambda_i \cap \Lambda_j$ の generic point を (x, y) とするとき、$\Lambda_i = T^*_{G\cdot x}V$, $\Lambda_j = T^*_{G\cdot y}V^*$ と表示することができる。したがって、$\mathfrak{M}_{A_i}$ の microfunction 解の principal symbol の接続公式によって、Fourier 変換の計算ができる。すなわち、$\mathfrak{M}_{A_i}$ をみたす超函数 $T_i(x)$ の Λ_j 上の principal symbol を、(2,1) の形に書いたとき、C_{Λ_j} たちの関係式は次のようになる。

(2.10) 3)
$$\begin{bmatrix} C_{\Lambda_3^1} \\ C_{\Lambda_3^2} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_i+\frac{3}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}) & \\ & \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{1+}^1} \\ C_{\Lambda_{1+}^2} \end{bmatrix}$$

4)
$$\begin{bmatrix} C_{\Lambda_3^2} \\ C_{\Lambda_3^3} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_i+\frac{3}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})), & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}) & \\ & \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{1-}^1} \\ C_{\Lambda_{1-}^2} \end{bmatrix}$$

5)
$$\begin{bmatrix} C_{\Lambda_{m-1}^1} \\ C_{\Lambda_{m-1}^2} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_i+\frac{m-1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{m-1}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{m-1}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{m-1}{2})), & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{m-1}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p+1)) & \\ & \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p+1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{i+}^1} \\ C_{\Lambda_{i-}^1} \end{bmatrix}$$

6)
$$\begin{bmatrix} C_{\Lambda_{m-1}^4} \\ C_{\Lambda_{m-1}^3} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_i+\frac{m-1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{m-1}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{m-1}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{m-1}{2})), & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{m-1}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p-1)) & \\ & \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{i+}^2} \\ C_{\Lambda_{i-}^2} \end{bmatrix}$$

6)*
$$\begin{bmatrix} C_{\Lambda_{m+}^2} \\ C_{\Lambda_{m-}^2} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_i+\frac{3}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})), & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(A_i+\frac{3}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{m-1}^2} \\ C_{\Lambda_{m-1}^3} \end{bmatrix}$$

$$5)^*\ \begin{bmatrix} C_{\Lambda^1_{m}+} \\ C_{\Lambda^1_{m}-} \end{bmatrix} = (\,6)^* \text{ と同じ matrix}) \begin{bmatrix} C_{\Lambda^1_{m-1}} \\ C_{\Lambda^4_{m-1}} \end{bmatrix}$$

$$3)^*\ \begin{bmatrix} C_{\Lambda^1_{m}+} \\ C_{\Lambda^2_{m}+} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\lambda_i+\frac{m-1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m-1}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m-1}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m-1}{2})), & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m-1}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p)) & \\ & \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda^1_3} \\ C_{\Lambda^2_3} \end{bmatrix}$$

$$4)^*\ \begin{bmatrix} C_{\Lambda^1_{m}-} \\ C_{\Lambda^2_{m}-} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\lambda_i+\frac{m-1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m-1}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m-1}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m-1}{2})), & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m-1}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p)) & \\ & \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda^2_3} \\ C_{\Lambda^3_3} \end{bmatrix}$$

$$1)^*\ \begin{bmatrix} C_{V_1^*} \\ C_{V_3^*} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\lambda_i+\frac{m}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m}{2})), & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p+1)) & \\ & \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p+1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda^1_{m}+} \\ C_{\Lambda^1_{m}-} \end{bmatrix}$$

$$2)^*\ \begin{bmatrix} C_{V_2^*} \\ C_{V_3^*} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\lambda_i+\frac{m}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m}{2})), & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m}{2})), & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(\lambda_i+\frac{m}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p-1)) & \\ & \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(q-p-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda^2_{m}+} \\ C_{\Lambda^2_{m}-} \end{bmatrix}$$

この関係式を使って、$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \vdots\ 1 \end{bmatrix}$によって生成される余次元1のorbit上の$G'$-不変測度のFourier変換を実行してみよう。この測度はV_R上の$\overline{\pi(\Lambda_1^1+)}$にsupportをもつ$G'$不変超函数$T_1'(x)$にユニークに拡張され、$\mathcal{M}_{-1}$をみたす。今$T_1'(x)$のprincipal symbolを、(2.1)の形に表示したとき、$C_{\Lambda_1^1+}=C_{\Lambda_1^1-}=1$となるように（$T_1'(x)$にconstantをかけることによって）することができる。$T_1'(x)$は$\pi(\Lambda_1^2\pm)$上にはsupportを持たないから、$C_{\Lambda_1^2+}=C_{\Lambda_1^2-}=0$である。上の3)〜2)*までの関係式によって、

(2.11) $\quad C_{\Lambda^1_1+} = C_{\Lambda^1_1-} = 1\ ,\qquad C_{\Lambda^2_1+} = C_{\Lambda^2_1-} = 0$

$$C_{\Lambda^1_3} = (\sqrt{2\pi})^{-1}\Gamma(\tfrac{1}{2})\, e\{-2\}\ ,\quad C_{\Lambda^2_3} = (\sqrt{2\pi})^{-1}\Gamma(\tfrac{1}{2})\ ,\quad C_{\Lambda^3_3} = (\sqrt{2\pi})^{-1}\Gamma(\tfrac{1}{2})\, e\{2\}$$

$$C_{\Lambda^1_{m-1}} = (\sqrt{2\pi})^{-1}\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(e\{2-2q\}+e\{-2+2q\}\right), \quad C_{\Lambda^3_{m-1}} = C_{\Lambda^4_{m-1}} = 0$$

$$C_{\Lambda^2_{m-1}} = (\sqrt{2\pi})^{-1}\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(e\{-4+2p\}+e\{4-2p\}\right)$$

$$C_{\Lambda^1_{m}+} = (2\pi)^{-1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) e\{-1\}\left(e\{-2q+2\}+e\{2q-2\}\right)$$

$$C_{\Lambda^2_{m}+} = (2\pi)^{-1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) e\{-1\}\left(e\{2p-4\}+e\{-2p+4\}\right)$$

$$C_{\Lambda^1_{m}-} = e\{2\}\, C_{\Lambda^1_{m}+} = (2\pi)^{-1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)\cdot e\{1\}\left(e\{-2q+2\}+e\{2q-2\}\right)$$

$$C_{\Lambda^2_{m}-} = e\{2\}\, C_{\Lambda^2_{m}+} = (2\pi)^{-1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) e\{1\}\left(e\{2p-4\}+e\{-2p+4\}\right)$$

$$C_{V_1^*} = 0$$

$$C_{V_2^*} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)\cdot 2\cdot\left\{\cos\left(\frac{\pi(p-q-2)}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi(p+q-6)}{2}\right)\right\}$$

$$C_{V_3^*} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)\cdot 2\cdot\left(1+(-1)^p\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

これよりたとえば，我々は次のような Fourier 変換公式を得る。

命題 2.1.1

$$(2.12) \qquad \int T_1'(x)\, \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle)\, dx \Big|_{V_{\mathbb{R}}^* - S}$$

$$= (2\pi)^{4-m}\, 4^{-2+\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{3} C_{V_i^*}\, |P(y)|^{1-\frac{m}{2}} \Big|_{V_i^*}$$

ここで，$\langle x, y\rangle = tr\,(x\, {}^t y)$，$V_i^*$ は $V_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ をこの内積によって，同一視したとき，V_i にあたる $V_{\mathbb{R}}^* - S$ の connected component である。証明は (2.8) の式において，$k_0 = 4^2$，$k_1 = 4^m$，$s_i = -1$，$n = 2m$ に注意すればただちに出る。

例 2.2. $G_{\mathbb{C}} = GL(n)\times SL(n)$

$V_{\mathbb{C}} = M(n,\mathbb{C})$

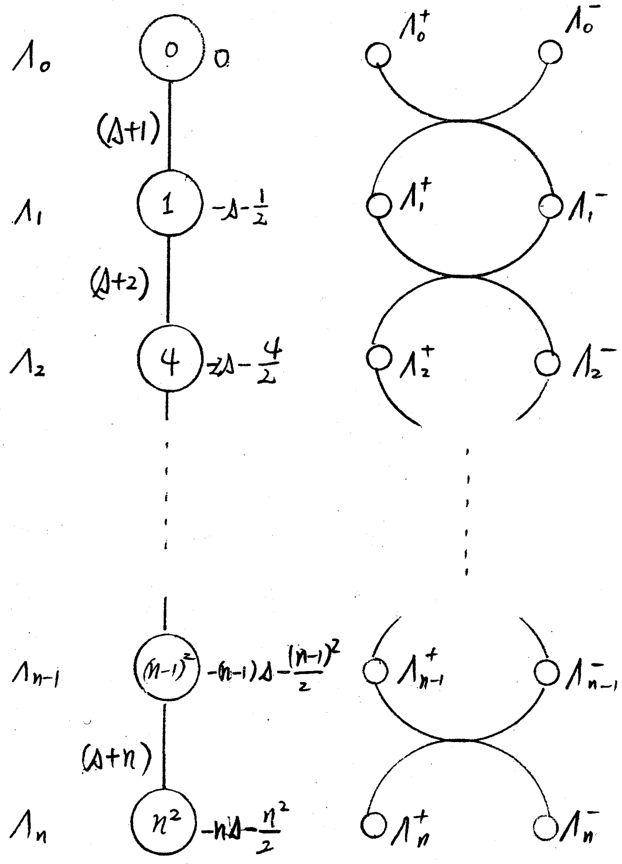
ρ ; $g=(g_1,g_2)\in G_{\mathbb{C}}$, $x\in V_{\mathbb{C}}$ に対して $\rho(g)\cdot x = g_1 x\,{}^t g_2$

このとき, 相対不変式 $P(x)=\det x$, 対応する character $\chi(g)=\det(g_1)$。 $V_{\mathbb{C}}$ 上に内積 $\langle x,y\rangle = tr(x\,{}^t y)$ $(x,y\in V_{\mathbb{C}})$ を入れて, $V_{\mathbb{C}}$ と $V_{\mathbb{C}}^*$ を同一視するとき, $(G_{\mathbb{C}},\rho^*,V_{\mathbb{C}}^*)$ は $P(x)$ を相対不変式に持つ正則概均質ベクトル空間になる。$P(x)^s$ の b 函数は,

$$b(s)=(s+1)(s+2)\cdots\cdots(s+n)$$

で与えられる。Real form としてはすべての係数を $\mathbb{R}$ に制限したものをとる。

holonomy diagram は右の図のようになり 右がわの図が complex, 左がわの図が real の holonomy diagram である。



Λ_i の生成点は,

$$\left(\begin{bmatrix} I_i & \\ & O_{n-i}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O_i & \\ & I_{n-i}\end{bmatrix}\right)\in V_{\mathbb{C}}\times V_{\mathbb{C}}^*,$$

$\Lambda_i^{\pm}$ の生成点は,

$$\left(\begin{bmatrix} I_i & \\ & O_{n-i}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_i & & \\ & \pm 1 & \\ & & I_{n-i-1}\end{bmatrix}\right)\in V_{\mathbb{R}}\times V_{\mathbb{R}}^*$$

$\Lambda_{i\mathbb{R}}$の$V_{\mathbb{R}}$へのprojection $\pi(\Lambda_{i\mathbb{R}})$はひとつの$G^{+}_{\mathbb{R}}$-orbitであり$\overline{\pi(\Lambda_{i\mathbb{R}})}$にsupportを持つ，$\pi(\Lambda_{i\mathbb{R}})$上では，その上の$G'$-不変measureとなっている超函数は存在する。なぜならば，$\Lambda_{i\mathbb{R}}$上のorderが$\frac{i^2}{2}$ととなるためには，$s=-i$とおけばよい。しかもこのとき，$\Lambda_{i\mathbb{R}}$にsupportがあって$\Lambda_{j\mathbb{R}}$ $(j\neq i)$にはsupportのないmicrofunctionがあって，それは$\Lambda_{j\mathbb{R}}(j\neq i)$へユニークに延長できることは補題1でたしかめることができる。

さて，このような超函数$T_i(x)$は，constant倍を除いて，ユニークに定まる。今我々は，$T_i(x)$を(2.1)の表示にしたがって

$$(2.13)\qquad \sigma_{\Lambda_i^+}(T_i(x)) = |P_{\Lambda_i^+}|^{-i}\sqrt{|\omega_{\Lambda_i^+}|}\Big/\sqrt{|dx|}$$

$$\sigma_{\Lambda_i^-}(T_i(x)) = |P_{\Lambda_i^-}|^{-i}\sqrt{|\omega_{\Lambda_i^-}|}\Big/\sqrt{|dx|}$$

となるように定めることができる。このとき，

$$(2.14)\qquad \sigma_{\Lambda_j^\pm}(T_i(x)) = 0 \qquad (j>i)$$

これは，$\Lambda_i^\pm$と$\Lambda_j^\pm$のassociated numbersの計算をすることによって，得られる。実際，Maslov indexたちはすべてのLagrangian上及びその交わりで0であるから，$\Lambda_i^\pm$上と$\Lambda_{i+1}^\pm$のmicrofunction solutionのprincipal symbolsの関係式は，次で与えられる。

$$(2.15)\quad \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{i+1}^+} \\ C_{\Lambda_{i+1}^-} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}), & \exp(\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}) \\ \exp(\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}), & \exp(-\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_i^+} \\ C_{\Lambda_i^-} \end{bmatrix}$$

ここで，$C_{\Lambda_j^\varepsilon}$ は，Λ_j^ε 上の symbol を $|P_{\Lambda_j^\varepsilon}|^{-i}\sqrt{|\omega_{\Lambda_j^\varepsilon}|}/\sqrt{|dx|}$ の constant 倍であらわしたときの constant term である。($\varepsilon=\pm1$, $j=i, i+1$)

$T_i(x)$ に対しては $C_{\Lambda_i^+}=C_{\Lambda_i^-}=1$ であるから，$C_{\Lambda_{i+1}^+}=C_{\Lambda_{i+1}^-}=0$。

したがって $C_{\Lambda_j^+}=C_{\Lambda_j^-}=0$ $(j\geq i+1)$.

命題 2.2.1

$$(2.16)\quad \int T_i(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle)\,dx = (2\pi)^{-ni-\frac{n^2}{2}}\,T_{n-i}(y)\text{。}$$

これは，(2.8) において，$k_0=k_1=1$，$s_i=i$，とおき，n のかわりに n^2 を入れれば，ただちに C_{Λ_j} と $C^*_{\Lambda_j}$ の関係式が得られることからわかる。

注意　命題 2.1.1. の Fourier 変換公式においても，$C_{V_2^*}=C_{V_3^*}=0$ となれば，$V_{\mathbb{R}}^*-S$ 上では Fourier 変換像は 0 になってしまうが，その場合にはもちろん，S に support が含まれるのであり，それも (2.8) の公式にあてはめれば計算できる。

§3. ゼータ函数の構成と函数等式，そしてその poles。

ここでは概均質ベクトル空間に付随するゼータ函数の構成と留数の計算について，佐藤・新谷[2]を敷衍あるいは要約しつつ述べよう。§1の仮定に加えて，次を仮定する。

(仮定1) G, V に $\mathbb{Q}$ structure $G_{\mathbb{Q}}$, $V_{\mathbb{Q}}$ が入り，$\rho(G_{\mathbb{Q}})\cdot V_{\mathbb{Q}} \subset V_{\mathbb{Q}}$。さらに，$V$ 上に $\mathbb{Q}$ 係数の内積 $\langle x, y\rangle$ と，G の involution ι が存在して，$\rho^*(g) = \rho(g^{\iota})$ $(g \in G)$.

次に L を $V_{\mathbb{Q}}$ 内の lattice, L^* を $\langle x, y\rangle$ に関する dual lattice とする。Γ を $G_{\mathbb{Z}}$ の subgroup として，

(仮定2) L, L^* は Γ-不変。

(仮定3)
$$I'(f, L) = \int_{G_+^1/\Gamma} \sum_{x \in L - S} f(\rho(g)\cdot x)\, d'g,$$
$$I'^{*}(f, L^*) = \int_{G_+^1/\Gamma} \sum_{x \in L^* - S^*} f(\rho^*(g)\cdot x)\, d'g,$$

は，任意の $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して絶対収束する。

さて，$x_1 \in V_{\mathbb{Q}} - S$ に対して，

$$(3.1) \quad \int_{G^1/\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_{x_1}} f(\rho(g\cdot\gamma)\cdot x_1)\, d'g \qquad f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$$

は収束し，

$$(3.2) \quad \int_{\rho(G_+^1)\cdot x_1} f(x)\, \tilde{\omega}(x) \int_{G_x^+/\Gamma_x} dv_x$$

と書くことができる。ここで，$\tilde{\omega}$ は $\rho(G_+^1)\cdot x$ 上の measure で $V_{\mathbb{R}}-S$ 上の n-form とみたとき，$dP\wedge\tilde{\omega}$ が $V_{\mathbb{R}}-S$ 上の Euclidian measure となるものであり，$d\nu_x$ は G_x^+（G_1^+ の x における isotropy subgroup）上の Harr measure，$\Gamma_x=\Gamma\cap G_x^+$ である。我々は，$\int_{G_x^+/\Gamma_x} d\nu_x$ を x における density と呼び，$\mu(x)$ であらわす。

定義 3.1

i) $\xi_i(s, L) = \sum_{x\in L^i/\sim} \mu(x)\,|P(x)|^{-s}$

ii) $Z(f, L, s) = \int_{G_{\mathbb{R}}^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{x\in L'} f(\rho(g)\cdot x)\, dg$

ここで L^i は $V_{\mathbb{R}}-S$ のひとつの connected component V_i と L の共通部分，$\sim$ は Γ による同値関係，$L'=L-S$ である。$Re(s)$ が充分大きいとき，i) ii) は絶対収束し，

$$(3.3)\quad Z(f, L, s) = \sum_{i=1}^{l} \xi_i(s, L) \int_{V_i} |P(x)|_i^{s-\frac{n}{d}} f(x)\, dx$$

が成立する。ここで，$V_{\mathbb{R}}-S=\bigcup_{i=1}^{l} V_i$（connected component 分解），$f\in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}}-S)$ とする。同様にして，$\xi_i(s, L^*)$ も定義され

$$(3.4)\quad Z^*(f, L^*, s) = \int_{G_{\mathbb{R}}^+/\Gamma} \chi(g)^{-s} \sum_{x\in L^*-S} f(\rho^*(g)\cdot x)\, dg$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \xi_i(s, L^*) \int_{V_i} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}} f(x)\, dx$$

である。

定理 3.2. $b(s)=\prod_{i=1}^{d}(s+c_i)^{d_i}$ を $P(x)^s$ の b-函数とする。このとき，$\xi_i(s,L)$ と $\xi_i(s,L^*)$ は $s=c_i$ に d_i 次の possible poles をもつ meromorphic function on $\mathbb{C}$ に解析接続される。さらに，適当な $\mathbb{C}$ 上の meromorphic function $C_{ji}(s)$ によって

$$(3.5)\quad \xi_j(s,L)=v(L)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell}C_{ji}(-s)\,\xi_i\left(\frac{n}{d}-s,L^*\right)$$

の形の函数等式を持つ。（ $v(L)=Volume(L)$ ）

これらの $C_{ji}(s)$ は holomorphic parameter s をもつ超函数 $|P(x)|^s|_{V_i}$ を Fourier 変換することによって計算される。i.e.,

$$(3.6)\int|P(x)|^s|_{V_i}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle)\,dx=\sum_{j=1}^{\ell}C_{ji}(s)\,|P(y)|^{-s-\frac{n}{d}}|_{V_j}\,.$$

この証明は，[2] の最後の remark にある。

さて，我々の目的は，$\xi_j(s,L)$ の留数の計算にある。そこで，[2] に従って，$\xi_j(s,L)$ の解析接続をしてみよう。まず Poisson の和公式；$\sum_{x\in L}f(x)=v(L)^{-1}\sum_{x^*\in L^*}\hat{f}(x^*)$ を考える。ここで，$f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$，$\hat{f}(x)=\int f(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle)\,dy$。
$f(x)$ のかわりに $f(\rho(g)\cdot x)$ をとると容易に次の式が得られる。

$$(3.7)\quad \sum_{x\in L'} f(\rho(g)\cdot x) = v(L)^{-1}\sum_{x^*\in L^{*\prime}} \hat{f}(\rho^*(g)\cdot x^*)$$

$$+\ v(L)^{-1}\sum_{x^*\in L^*\cap S'} \hat{f}(\rho^*(g)\cdot x^*) - \sum_{x\in L\cap S'} f(\rho(g)\cdot x).$$

この左辺は G'/Γ 上の函数として可積分である。右辺を計算するために、次の仮定をおく。

（仮定 4）1) $S'\cap V_{\mathbb{R}}$ は有限個の G'-orbits に分かれ, 2) 各 G'-orbit は G'-不変な measure を持つ。

$S'\cap V_{\mathbb{R}} = S'_1\cup\cdots\cup S'_k$ を $S'\cap V_{\mathbb{R}}$ の G'-orbit 分解とする。各 S'_i は G'-不変な measure $d\nu_i$ を持つ。$f(x)$ を S'_i 上では compact support を持った $V_{\mathbb{R}}$ 上の C^∞ function とするとき, $s_i\in\mathbb{C}$ があって,

$$(3.8)\quad \int_{S'_i} f(g\cdot x)\,d\nu_i = \chi(g)^{-s_i-\frac{n}{d}}\int_{S'_i} f(x)\,d\nu_i \qquad (g\in G_{\mathbb{R}})$$

と書くことができる。このとき, 次のことが予想される。(もっと仮定と結論を弱めて, Remark 1 のようにも言える。)

<u>予想 3.3</u> $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_\ell\}$ を, (3.8) にあらわれる $s_i\in\mathbb{C}$ の全体の集合とし, $\Sigma_i=\{j\in\{1,2,\cdots k\};\ s_j=\sigma_i\}$ $(i=1,\cdots,\ell)$ とおく。

このとき, $f(x)\in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}}-S')$ ならば,

$$(3.9)\quad J_i^*(\hat{f},L^*) = \lim_{K\to G'/\Gamma}\int_K \sum_{j\in\Sigma_i}\sum_{x^*\in L^*\cap S_j} \hat{f}(\rho^*(g)\cdot x^*)\,dg$$

は収束する。ここで K は G'/Γ の compact set で, G'/Γ に近づいたときの極限の意味である。また, このとき, (3.9) は,

(3.10) $$J_i^*(\hat{f}, L^*) = \sum_{k=0}^{m_i} a_i^k J_i^{*k}(\hat{f}, L^*) \quad (a_i^k \in \mathbb{C},\ m_i \in \mathbb{N}\cup\{0\})$$

という線型汎函数 $f \longmapsto J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)$ の和に分解され,

(3.11) $$J_i^{*k}(\hat{f}_g, L^*) = \chi(g)^{\sigma_i}\left(\sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(\log \chi(g))^q J_i^{*k-q}(\hat{f}, L^*)\right)$$

をみたす。 $(f_g(x) = f(g\cdot x) \quad g \in G_{\mathbb{R}}^+)$

同様に, $\hat{f} \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S)$ とするとき,

(3.12) $$J_i(\hat{f}, L) = \lim_{K \to G^1/\Gamma} \int_K \sum_{j \in \Sigma_i} \sum_{x \in L \cap S_j} \hat{f}(\rho(g)\cdot x)\, dg$$

は収束し, (3.10), (3.11) と同じ型の分解をもつ ($\sigma_i \to -\sigma_i - \frac{n}{d}$ とおく。)。

この予想が成り立つとして, 留数の計算を行う。 $f(x) \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S)$ とする。

(3.13) $$Z(f, L, s) = \int_{G_{\mathbb{R}}/G^1} \chi(g)^s\, I'(f_g, L)\, d\chi(g)/\chi(g)$$

$$= \left(\int_{\chi(g) \ge 1} + \int_{\chi(g) \le 1}\right) \chi(g)^s\, I'(f_g, L) \frac{d\chi(g)}{\chi(g)}$$

$I'(f_g, L)$ は $\chi(g) \to \infty$ のとき, 急減少するから $\int_{\chi(g)\ge 1}$ は s に関する entire function である。(これを $Z_+(f, L, s)$ と書く。) 一方 (3.7) を G^1/Γ 上で, 積分すれば,

(3.14) $$I'(f_g, L) = v(L)^{-1}\left(I'^*(\hat{f}_g, L^*) + \int_{G^1/\Gamma} \sum_{x^* \in L^* \cap S^*} \hat{f}_g(\rho^*(g_1)\cdot x^*)\, dg_1\right)$$

$$= v(L)^{-1}\left(I'^*(\hat{f}_g, L^*) + \sum_{i=1}^{l} J_i^*(\hat{f}_g, L^*)\right)$$

を得る。

$$(3.15)\qquad \int_{x(g)\leq 1} x(g)^{s} I^{*}(\hat{f}_g, L^*)\, dx(g)/x(g)$$

は $Z_+(f,L,s)$ が s について entire であるのと同じ理由で entire である。これを $Z_+^*(\hat{f},L^*,s)$ と書く。(3.14) を (3.13) に代入すると、

$$(3.16)\quad Z(f,L,s) = Z_+(f,L,s) + v(L)^{-1} Z_+^*(\hat{f},L^*,s) + v(L)^{-1}\int_{x(g)\leq 1} x(g)^{s-1}\sum_{i=1}^{l} J_i^*(\hat{f}_g, L^*)\, dx(g)。$$

一方、$Re(s)\gg 0$ のとき、

$$(3.17)\quad \int_{x(g)\leq 1} x(g)^{s-1} J_i^*(\hat{f}_g, L^*)\, dx(g)$$

$$= \int_{x(g)\leq 1} x(g)^{s-1}\Big(\sum_{k=0}^{m_i} a_i^k\, x(g)^{\sigma_i}\cdot\Big(\sum_{g=0}^{k}\frac{1}{g!}(\log x(g))^g J_i^{*\,k-g}(\hat{f},L^*)\Big)\Big)\, dx(g)$$

$$= \sum_{g=0}^{m_i}\frac{1}{g!}\int_0^1 t^{s+\sigma_i-1}(\log t)^g\Big(\sum_{k=g}^{m_i} a_i^k\, J_i^{*\,k-g}(\hat{f},L^*)\Big)\, dt$$

部分積分をくりかえすことにより、

$$\int_0^1 t^{s+\sigma_i-1}(\log t)^g\, dt = (-1)^g\, g!\,(s+\sigma_i)^{-g-1},$$

したがって

$$(3.17) = \sum_{g=0}^{m_i}(-1)^g(s+\sigma_i)^{-g-1}\sum_{k=g}^{m_i} a_i^k\, J_i^{*\,k-g}(\hat{f},L^*)$$

すなわち、

$$(3.18)\quad Z(f,L,s) = Z_+(f,L,s) + v(L)^{-1} Z_+^*(\hat{f},L^*,s) + v(L)^{-1}\sum_{i=1}^{l}\sum_{g=0}^{m_i}(-1)^g(s+\sigma_i)^{-g-1}\sum_{k=g}^{m_i} a_i^k J_i^{*\,k-g}(\hat{f},L^*)$$

を得る。(3.3)の式において、 $f(x) \in C_0^\infty(V_j)$, $f \geqq 0$ とすれば $\int_{V_j} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}} f(x)\,dx$ は s の entire function で、任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して、f をうまくえらべば、その s の近傍で $\int_{V_j} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}} f(x)\,dx$ は、0 でないようにできる。つまり、(3.18)の式にあらわれた $s=\sigma_i$ における poles は $\xi_j(s, L)$ の poles であり、また $\xi_j(s, L)$ は、それ以外には poles を持たない。

<u>定理 3.4</u> 仮定1〜4、及び、予想3.3が成立しているとき、$\xi_j(s, L)$ は $s \in \mathbb{C}$ に有理型函数に接続され、$s=\sigma_i$ $(i=1, \cdots, l)$ に m_i+1 次の poles を持ち、それ以外では正則である。$s=\sigma_i$ において、$\xi_j(s, L)$ をローラン展開したとき得られる $(s-\sigma_i)^{-q-1}$ の係数は、

$$(3.19) \quad v(L)^{-1} (-1)^q \sum_{k=q}^{m_j} a_i^k J_i^{*\,k-q}(\hat{f}, L^*) \Big/ \int_{V_j} |P(x)|^{\sigma_i - \frac{n}{d}} f(x)\,dx \qquad (f \in C_0^\infty(V_j))$$

で与えられる。

佐藤-新谷[2]においては、任意の $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して、(3.9)が収束するという、より強い仮定をおいており、線型汎函数 $f \longmapsto J_i^*(\hat{f}, L^*)$ は、$V_{\mathbb{R}}$ 上の G^1-不変超函数(tempered distribution になっている)であるばかりでなく、$G_{\mathbb{R}}$ 相対不変な超函数になっている場合を扱っている。このときには、

$m_i=0$であり，$\xi_i(s,L)$は simple pole を持つのみである。すなわち，このときは，$J_i^*(\hat{f},L^*)$そのものが(3.11)をみたす$J_i^*(\hat{f},L^*)$の線型汎函数への分解になっている。

一般に(3.10)の形の(3.11)をみたすような線型汎函数の system $J_i^{*k}(\hat{f},L^*)$ $(k=0,\cdots,m_i)$ はユニークではない。しかし次の意味では一意に定まる。すなわち，$J_i^{*k}(\hat{f},L^*)$ $(k=0,\cdots,m_i)$ と $\tilde{J}_i^{*k}(\hat{f},L^*)$ $(k=1,\cdots,m_i)$ を二つの線型汎函数の system とするとき，適当な $G_{\mathbb{R}}^+$ の元 g によって

$$J_i^{*k}(\hat{f}_g, L^*) = \tilde{J}_i^{*k}(\hat{f}, L^*) \quad (i=1,\cdots m_i),$$

となる。

さて超局所解析を使って，実際に，$J_i^*(\hat{f},L^*)$を計算する話に移ろう。今予想3.3が成立しているとして，さらに，

(3.10) の m_i はすべて0である，

ことにする。このとき，

$$f \longmapsto J_i^*(\hat{f}, L^*) \qquad f\in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}}-S')$$

は，$G_{\mathbb{R}}$-相対不変な超函数である。さらにもし，

$$h \longmapsto J_i^*(h, L^*) \qquad h\in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$$

が tempered distribution になっているならば，(つまり佐藤-新谷[2]にあるのと同じ要請)，次のようにして計算することができる。

$\widetilde{\Sigma}_i=\{S_j;\ j\in\Sigma_i\}$ の G'-orbits の番号を付けかえて，$S_1^1,\cdots,S_1^{p_1}$，$S_2^1,\cdots,S_2^{p_2},\cdots,S_r^1\cdots S_r^{p_r}$，とし，しかもこれは次の性質をみたすように並べかえられてあるとする。

(3.20) i) $\overline{S_j^k}$ $(k=1,\cdots,p_j)$はたがいに他を含まない。

ii) $\bigcup_{g=1}^{p_k}\overline{S_k^g}$ は，$S_{k+1}^1,\cdots,S_{k+1}^{p_{k+1}},\cdots\cdots,S_r^1,\cdots,S_r^{p_r}$，すべてを含む。

このような並べかえを実行するには，まず $S_1^1-S_1^{p_1}$ を $\widetilde{\Sigma}_i$ の元で，いかなる他の $\widetilde{\Sigma}_i$ の元の closure にも含まれないものとし，$\widetilde{\Sigma}_i-\{S_1^1,\cdots,S_1^{p_1}\}$ に対して同じようにして，$S_2^1,\cdots,S_2^{p_2}$ を選び，以外帰納的に $S_3^1,\cdots,S_3^{p_3}\cdots$ を選んでゆけばよい。各 S_j^k $(j=1,\cdots,r,\ k=1,\cdots,p_i)$ には，G'-invariant measure が入り，これを $d\nu_j^k$ と書くことにする。$d\nu_j^k$ は $G_{\mathbb{R}}$-相対不変で，すべて同じ character を持つ。i.e.,

$$(3.21)\qquad \int f_g(x)\Big|_{S_j^k}d\nu_j^k=\chi(g)^{-\sigma_i-\frac{n}{d}}\int f_g(x)\Big|_{S_j^k}d\nu_j^k.$$

ここで $f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ かつ $f|_{S_j^k}\in C_0^\infty(S_j^k)$ である。

さて，$h\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ で，$h|_{S_j^k}\in C_0^\infty(S_j^k)$ をみたすものとする。このとき，

$$(3.22)\quad K_j^{*k}(h)=\int_{G'/\Gamma}\sum_{x^*\in L^*\cap S_j^k}h(\rho^*(g)\cdot x^*)\,dg$$

$$=\int_{G'/\Gamma}\sum_{x^*\in L^*\cap S_j^k/\sim}\ \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_x}h(\rho^*(g)\cdot x^*)\,dg\qquad(\sim\text{は}\ \Gamma\text{-equivalence})$$

$$= \sum_{x^* \in L^* \cap S_j^k/\sim} \int_{G'/\Gamma_x} h(\rho^*(g)\cdot x^*)\,dg$$

$$= \sum_{x^* \in L^* \cap S_j^k/\sim} \int h(x)\,d\nu_j^k(x)\cdot \mu(x^*),$$

を得る。ここで $\mu(x^*)$ は x^* によってのみきまる定数である。ここでは $h(x)\geqq 0$ で、和が収束するのだから、この級数は絶対収束している。ここで我々は、

(3.23) $S_j = \bigcup_{k=1}^{p_j} S_j^k$ 上の measure $d\nu_j = \sum_{k=1}^{p_j} \sum_{x^* \in L^* \cap S_j^k/\sim} \mu(x^*)\,d\nu_j^k(x)$ に対して、少くともひとつ $V_{\mathbb{R}}$ 上の超函数 $T_j(x)$ が存在して、

i) $Supp\,(T_j(x)) \subseteq \overline{S_j}$。

ii) $\int h(x)\big|_{S_j}\,d\nu_j(x) = \int h(x)\,T_j(x)\,dx$ が $h \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ かつ $h(x)\big|_{S_j} \in C_0^\infty(S_j)$ に対して成立つ。

iii) $T_j(\rho(g)\cdot x) = \chi(g)^{\sigma_i}\,T_j(x)$。

であることを仮定しよう。これは前の section (§2) で述べたところの方法(すなわち holonomy diagram を書くこと)によって、かなりの程度確めることができる。このとき、

定理 3.5 (3.23) をみたす $T_j(x)$ $(j=1,\cdots,r)$ のうち、

(3.24) $$\lim_{K\to G'/\Gamma} \int_{G'/\Gamma} \sum_{j=1}^{r} \sum_{x^* \in L^* \cap S_j} f(\rho^*(g)\cdot x^*)\,dg = \sum_{j=1}^{r} \int f(x)\,T_j(x)\,dx$$

を，すべての $f(x)\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対してみたすものが，ただひとつ存在する。

今，(3.24) の左辺は，$J_i^*(f, L^*)$ をあらわしているから，

$$(3.25)\quad J_i^*(\hat{f}, L^*) = \sum_{j=1}^{r} \int \hat{f}(x)\, T_j(x)\, dx = \sum_{j=1}^{r} \int f(x)\, \widehat{T_j}(x)\, dx 。$$

すなわち，$J_i^*(\hat{f}, L^*)$ を計算するには，$T_j(x)$ の Fourier 変換を計算すればよく，$T_j(x)$ が (3.23) iii) をみたすことにより，

$$(3.26)\quad \int T_j(x) \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle)\, dx \Big|_{V_{\mathbb{R}}-S'} = \sum_{k=1}^{l} c_k\, |P(x)|^{-\sigma_i - \frac{n}{d}} \Big|_{V_{\mathbb{R}}-S'}$$

この c_k は §2 で述べたように，$T_j(x)$ の原点の conormal における principal symbol を計算することによって得られる。§2，例 2.1，例 2.2 では，実際にその計算を行った。

Remark 1　予想 3.3. は，もっと一般化して述べると，$\mathbb{R}^\times$ の表現（既約でない）の問題に帰着される。

「予想 3.3′　仮定 1, 2, 3, と (4-1) が成立し，§1 の最初に述べた条件をみたす概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) に対して，

$$J(\hat{f}, L^*) = \lim_{K \to G'/\Gamma} \int_K \sum_{x^* \in S'\cap L^*} \hat{f}(\rho^*(g)\cdot x^*)\, dg$$

は $f \in C_0^\infty(V_\mathbb{R} - S)$ に対して収束する。（これは Poisson の和公式 (3.7) より明らかである。）このとき，$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_l\}$ という異なる複素数の集合と，$\{J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)\}$ $(i = 1, \cdots l,\ k = 0, \cdots, m_i)$ という線型汎函数，$f \longmapsto J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)$ の集合が存在して次の条件をみたす。

i) $J_i^{*k}(\hat{f_g}, L^*) = \chi(g)^{\sigma_i}\left(\sum_{\beta=0}^{k} \frac{1}{\beta!}(\log \chi(g))^\beta J_i^{*k-\beta}(\hat{f}, L^*)\right)$,

ii) $J(\hat{f}, L^*) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{m_i} a_i^k J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)$。」

そもそも，$g \longmapsto J(\hat{f_g}, L^*)$ を $G_\mathbb{R}^+/G_1 \cong \mathbb{R}_+^\times$ の $C_0^\infty(V_\mathbb{R} - S)$ の dual space への線型表現とみたとき，これが有限次元表現であれば，いくつかの（直和分解はされない）可約な成分の直和に分解される。その可約成分の basis が $\{J_i^{*k}(\hat{f_g}, L^*)\}_{k=1,\cdots,m_i}$ である。

この予想についてもう少し，くわしく説明しよう。

(3.27)　$$C_0^\infty{}'(V_i)^{G'} \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ T \in \mathcal{D}'(V_\mathbb{R})\ ;\ \begin{array}{l} \exists f \in C_0^\infty(V_i),\ T(f) \neq 0 \\ \forall g_1 \in G',\ T_g = T \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$\sim$ は同値関係で $T \sim T'$ とは $T(f) = T'(f)$ $(f \in C_0^\infty(V_i))$ が常に成立することとする。(仮定3) において定義した $f \longmapsto I'(f, L)$ (あるいは, $f \longmapsto I^*(f, L^*)$) などは, $f \in C_0^\infty(V_i)$ に制限して考えると, $C_0^\infty{}'(V_i)^{G'}$ に入っていることは容易にわかる。($\mathcal{D}'(V_\mathbb{R})$ は $V_\mathbb{R}$ 上の distributions のなす空間)

さて, $G_\mathbb{R}^+/G_1 \cong \mathbb{R}_+^\times$ の $C_0^\infty{}'(V_i)^{G_1}$ への表現 ρ を

(3.28) $\quad \rho\ ;\ g \longmapsto T_{g^{-1}}$

で定義する。ここで $T_{g^{-1}}\ ;\ f \longmapsto T(f_g)$ $(f \in C_0^\infty(V_i))$ によって定義される distribution である。さらに

(3.29)
$$\widetilde{C_0^\infty(V_i)}{}'^{G'}_1 = \left\{ T \in C_0^\infty{}'(V_i)^{G'}\ ;\ \forall f \in C_0^\infty(V_i) \text{ に対して, } T(f_g) \text{ は } g \to \infty \text{ のとき急減少} \right\}$$

$$\widetilde{C_0^\infty(V_i)}{}'^{G'}_2 = \left\{ T \in C_0^\infty{}'(V_i)^{G'}\ ;\ \forall f \in C_0^\infty(V_i) \text{ に対して, } T(f_{g^{-1}}) \text{ は } g \to \infty \text{ のとき急減少} \right\}$$

とおくとき, これらは表現 ρ の不変部分空間である。さて, $I'(f, L)$ は, $\widetilde{C_0^\infty(V_i)}{}'^{G'}_1$ の元であることはすぐにわかる。Poisson の和公式にしたがって, (3.14) により,

$$I'(f, L) = v(L)^{-1}\left(I'^*(\hat{f}, L^*) + \sum_{i=1}^{l} J_i^*(\hat{f}, L^*)\right)$$

と $I'(f, L)$ を分解したとき, $I'^*(\hat{f}, L^*)$ は $\widetilde{C_0^\infty(V_i)}{}'^{G'}_2$ の元である。

このとき，$C_0^{\infty}{}'(V_i)^{G'}$ の中の適当な G 不変有限次元空間 A が有って，

(3.30) $\quad I'(f, L) - v(L)^{-1} I^{*\prime}(\hat{f}, L^*)$

は，それに属するであろう，というのが我々の予想である。

実際，現在までに計算されている，概均質ベクトル空間に付随するゼータ函数については，このことは正しい。

一方で，この予想が正しければ，Dirichlet 級数，（定義 3.1, i)）は，有限個の点に poles を持って全平面に有理型函数に接続されることがわかるだけでなく，poles におけるローラン展開の係数を求める問題は，表現空間の basis を求める問題に帰着される。

また，もっと一般に仮定 1, 2, 3, をみたせば，Dirichlet 級数は有限個の点に poles を持つのみで全平面で有理型になることは簡単に示され（佐藤－新谷[2]）その poles の位数もわかる。また，柏原の b-函数の根の有理性定理（[10]）を使えば，poles の位置は実軸上にありしかも有理数であることがわかる。しかし，これらの議論は実際に poles のある位置でのローラン展開を計算することには，あまり手がかりを与えてはくれないようである。

§4. 実例の計算.

前の section でも述べたように，現在のところ，ゼータ函数の residues を計算する統一的な方法は見つかっていないように思われる。我々は，ここで比較的かんたんな実例によって，residues の計算を行ってみるが，この例は，すでに良く知られた Riemann のゼータ函数に帰着されるので，新しい結果ではない。しかし，これは，佐藤－新谷[2]で与えられた理論のワク内には入っていない。計算は超局所解析を使って行われるが，いずれも §3 の議論がそのまま適用できるわけではない。

例 4.1. §2. 例 2.2 で扱った概均質ベクトル空間を例にとる。$V_{\mathbb{R}} - \mathscr{S} = V_1 \cup V_2$ と 2つの connected components に分かれる。ここでは $V_1 = \Lambda_0^+$，$V_2 = \Lambda_0^-$ と，とる。§3. 定義 3.1. にしたがって，$\xi_i(s, L)$ $(i=1,2)$ が定義できる。今，$L = M(n, \mathbb{Z})$，$\Gamma = SL(n, \mathbb{Z}) \times SL(n, \mathbb{Z}) \subset G' = SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R})$ と定めるとき，L は Γ-不変な $V_{\mathbb{R}}$ 内の lattice であり $\langle x, y\rangle = tr({}^t x y)$ によって，$V_{\mathbb{R}}$ に内積を入れ，$V_{\mathbb{R}}^*$ と同一視するとき，$L^* = L$ である。このとき，$\xi_i^{(n)}(s, L)$ は $Re(s) > n$ で絶対収束する級数である。この場合 $\xi_1^{(n)}(s, L) = \xi_2^{(n)}(s, L)$ である。

さて，この Residues を計算するために，$f(x) \in C_0^\infty(V_i)$

として，(3.14) の式において，次のように $J_i^*(\hat{f}_g, L^*)$ を定める。

$$(4.1)\qquad J_i^*(\hat{f}_g, L^*) = \int_{G'/\Gamma} \sum_{x^* \in L \cap S_i} \hat{f}_g(\rho^*(g_1)\cdot x^*)\,dg_1 \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

ただし $S_i = \rho(G')\cdot\begin{bmatrix} I_{n-i} & \\ & O_i \end{bmatrix}$ で，G'/Γ 上の積分は，G'/Γ 内上 Compact set K 上での積分したうえで K を G'/Γ に近づけた極限の意味である。

このとき，次が成立する。

<u>命題 4.1.</u> 各 $J_i^*(\hat{f}_g, L^*)$ は収束する。さらに，その値は

$$\sum_{x_i \in S_i \cap L/\sim} \int_{G'/\Gamma} \sum_{x \in \Gamma\cdot x_i} \hat{f}_g(\rho^*(g_1)\cdot x)\,dg_1 \qquad (\sim \text{は } \Gamma\text{-equivalence})$$

に等しい。

ここで，$\sum$ の中の各項を計算するために少し記号を準備することにする。$G^{(n)} = SL(n,\mathbb{R})\times SL(n,\mathbb{R})$，$\Gamma^{(n)} = SL(n,\mathbb{Z})$ $SL(n,\mathbb{R})$ の元を $(x_{ij})_{1\le i,j\le n}$ と行列で表示したとき，その不変測度を $dx^{(n)}$ と書き，単位元において，$\prod_{i=1}^{n-1} dx_{ii} \prod_{i\ne j} dx_{ij}$ となるように正規化されているものとする。$SL(n,\mathbb{R}) = K\cdot A\cdot N$ と岩沢分解したとき，$K = SO(n,\mathbb{R})$，$A = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix};\ a_i > 0\ \prod a_i = 1\right\}$，$N =$

$\left\{\begin{pmatrix}1 & n_{ij}\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ n_{ij}\in\mathbb{R}\right\}$ とおいて，A，N 上の不変測度を $d^{(n)}a = \prod_{i=1}^{n-1} da_i/a_i$，$d^{(n)}n = \prod_{i<j} dn_{ij}$ で正規化する。K 上の不変測度 $d^{(n)}k$ は，$\int_{SL(n,\mathbb{R})} f(x^{(n)})\,dx^{(n)} = \int_{K\times N\times A} f(k\cdot n\cdot a)\, d^{(n)}k\cdot d^{(n)}n\cdot d^{(n)}a$ が成立するように定義するものとする。($f\in C_0^\infty(SL(n,\mathbb{R}))$)

命題 4.2.　i) $S_i\cap L/\sim$ の代表元として，我々は，

(4.4)　$x_i = \begin{bmatrix} X_{n-i} & \\ & O_i\end{bmatrix}$，($X_{n-i}$ は，$M(n-i,\mathbb{Z})^+$ の $\Gamma^{(n-i)}\times\Gamma^{(n-i)}$ による同値類の代表元。)

をとることができる。($M(n-i,\mathbb{Z})^+=\{x\in M(n-i,\mathbb{Z});\ \det x>0\}$，以下 $M(n-i,\mathbb{Z})$ を $L^{(n-i)}$ とも書くことにする。)

これは単因子定理よりの直接の結果である。

さて，$SL(n,\mathbb{R})$ の元を我々は，次のようにして，三つの部分に分けることができる。(ただし以下 $i\neq n$ とする)

(4.5)　$SL(n,\mathbb{R}) = L_i\cdot\begin{bmatrix} a & \\ & a^*\end{bmatrix}\cdot G_i$

ここで，$L_i = SO(n)/\{(a,b)\in O(n-i)\times O(i);\ \det a\det b=1\}$

$\begin{bmatrix} a & \\ & a^*\end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} aI_{n-i} & \\ & a'I_i\end{bmatrix};\ a>0,\ a'=a^{(n-i)/i}\right\}$

$G_i = \left\{\begin{bmatrix} A & B\\ 0 & D\end{bmatrix};\ \begin{matrix} A\in GL(n-i,\mathbb{R}), & B\in M(n-i,i,\mathbb{R})\\ D\in GL(i,\mathbb{R}) & (\det A)^2=(\det D)^2=1\\ & \det(A)\det(D)=1\end{matrix}\right\}$

G_i と $\begin{bmatrix} a & \\ & a^* \end{bmatrix}$ は，ユニモデュラーな $SL(n,\mathbb{R})$ の subgroups であり，L_i は compact homogeneous space で，$SO(n)$ に対する L_i 上の不変測度 dl_i を

$$\int dl_i \int f(l_i\cdot(a,b))\,da\,db = \int_{SO(n)} f(k)\,dk \qquad (f\in C^\infty(SO(n)))$$

によって入れる。このとき，x_i を(4.4)の形の元として，

$$(4.6)\quad \int_{G'/\Gamma}\sum_{x\in\Gamma x_i}\hat{f}_g(\rho^*(g_1)\cdot x_i)\,dg_1$$

$$= \int_{G'/\Gamma_{x_i}}\hat{f}_g(\rho^*(g_1)\cdot x_i)\,dg_1$$

ここで G'/Γ_{x_i} 上の積分の意味は，K を G'/Γ の compact subset として，$K_{x_i}=\bigcup_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_{x_i}} K\cdot\gamma \subset G'/\Gamma_{x_i}$ 上で積分し，K を G'/Γ に近づけた時の極限の意味である。(4.5)の分解を使って，

$$(4.7)\quad \rho^*(g_1)\,x_i$$

$$= l\cdot\begin{bmatrix} a & \\ & a^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{n-i} & \\ & O_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^tA_2 & \\ {}^tB_2 & {}^tD_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & \\ & b^* \end{bmatrix}{}^t l'$$

$$= l\cdot\begin{bmatrix} a & \\ & a^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 X_{n-i}\,{}^tA_2 & \\ & O_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & \\ & b^* \end{bmatrix}{}^t l'$$

そこで $G_i\times G_i\subset SL(n,\mathbb{R})\times SL(n,\mathbb{R})\subset G'$ に Γ_{x_i} は含まれるので，(4.6)の積分を $\int_{G'/\Gamma_{x_i}} = \int_{G'/G_i\times G_i}\int_{G_i\times G_i/(G_i\times G_i)_{x_i}}\int_{(G_i\times G_i)_{x_i}/\Gamma_{x_i}}$ と分けて計算する。$\int_{(G_i\times G_i)_{x_i}/\Gamma_{x_i}}$ 上の積分は有界で，

$$(4.8)\quad Vol\left({}^{(G_i\times G_i)_{x_i}}/{}_{\Gamma_{x_i}}\right)$$
$$= Vol\left(SL(n-i,\mathbb{R})/\Gamma^{(n-i)}\cap X_i^{-1}\Gamma^{(n-i)}X_i\right)\times Vol\left(SL(i,\mathbb{R})/\Gamma^{(i)}\right)^2$$
$$\times Vol\left(M(i,n-i,\mathbb{R})/M(i,n-i,\mathbb{Z})\right)^2$$
$$= \mu^{(n-i)}(X_i)\times Vol\left(SL(i,\mathbb{R})/\Gamma^{(i)}\right)^2 。$$

となる。($\mu^{(n-i)}(X_i) \underset{def}{=} Vol\left(SL(n-i,\mathbb{R})/\Gamma^{(n-i)}\cap X_i^{-1}\Gamma^{(n-i)}X_i\right)$)

したがって (4.6) の積分は,

$$(4.9)\quad \int_{L_i\times L_i'} dl\,dl' \int_0^\infty a^{n(n-i)}\frac{da}{a}\int_0^\infty b^{n(n-i)}\frac{db}{b}\int_{(G_i\times G_i)/(G_i\times G_i)_{x_i}} dA_1\,dA_2$$
$$\hat{f}_g\left(l\cdot\begin{bmatrix}a & \\ & a^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1X_{n-i}{}^tA_2 & \\ & O_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & \\ & b^*\end{bmatrix}{}^tl'\right)$$
$$\times\ \mu^{(n-i)}(X_i)\times Vol\left(SL(i,\mathbb{R})/\Gamma^{(i)}\right)$$

と書ける。この積分は well defined ではないが, $f(x)$ を極座標 $(r,\tau)\in\mathbb{R}_+\times S^{n^2-1}$ で表示したとき, $f(x)=f_1(r)f_2(\tau)$ と, 変数分離できるものとしたとき,

$$(4.10)\quad \lim_{a'\to\infty}\lim_{b'\to\infty}\int_{L_i\times L_i'} dl\,dl'\int_0^{a'} a^{n(n-i)}\frac{da}{a}\int_0^{b'} b^{n(n-i)}\frac{db}{b}\int_{(G_i\times G_i)/(G_i\times G_i)_{x_i}} dA_1\,dA_2$$
$$\hat{f}_g\left(l\begin{bmatrix}a\cdot b\ A_1X_{n-i}{}^tA_2 & \\ & O_i\end{bmatrix}{}^tl'\right)\ \mu^{(n-i)}(X_i)\times Vol\left(SL(i,\mathbb{R})/\Gamma^{(i)}\right)$$

とすれば well defined であることがわかり, また, この値が (4.6) の積分に等しいことも示せる。この証明のためには, $SL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{Z})$ の基本領域を Siegel set と呼ばれる集合で近

似してやらねばならないが，ここでは省略して，実際に(4.10)の値を計算することにしよう。

$$(4.11)\quad \lim_{\substack{a'\to\infty\\ b'\to\infty}} \int dl\,dl' \int_0^{a'} a^{n(n-i)-1}da \int_0^{b'} b^{n(n-i)-1}db \int_{(G_i\times G_i)/(G_i\times G_i)_{X_i}} dA_1 dA_2\; \hat{f}_g\left(l\cdot\begin{bmatrix} a\cdot b\cdot A_1 X_{n-i}{}^tA_2 & \\ & O_i\end{bmatrix}{}^tl'\right)$$

$$= \lim_{\substack{a'\to\infty\\ b'\to\infty}} \int dl\,dl' \int_0^{a'} a^{n(n-i)-1}da \int_0^{b'} b^{n(n-i)-1}db \int_{SL(n-i,\mathbb{R})^{\pm}} dx^{(n-i)}\; \hat{f}_g\left(l\cdot\begin{bmatrix} a\cdot b\cdot x^{(n-i)} & \\ & O_i\end{bmatrix}\cdot{}^tl'\right)\cdot \det(X_i)^{-n}$$

ここで，$SL(n-i,\mathbb{R})^{\pm} = \{x\in GL(n-i,\mathbb{R});\ (\det x)^2=1\} \cong (G_i\times G_i)/(G_i\times G_i)_{X_i}$。

さらに lim の中は（以下かんたんのため f_g のかわりに f と書く），

$$(4.12)\quad \int dl\,dl' \int_0^{a'} a^{n(n-i)-1}da \int_0^{b'} b^{n(n-i)-1}db \int_{SL(n-i,\mathbb{R})^{\pm}} dx^{(n-i)} \int_{M(n,\mathbb{R})} dy\cdot f(y)\cdot \exp\left(-2\pi\sqrt{-1}\left\langle y,\ l\cdot\begin{bmatrix} a\cdot b\cdot x^{(n-i)} & \\ & O_i\end{bmatrix}\cdot{}^tl'\right\rangle\right)$$

$$= \int dl\,dl' \int_0^{a'} a^{n(n-i)-1}da \int_0^{b'} b^{n(n-i)-1}db \int_{SL(n-i,\mathbb{R})^{\pm}} dx^{(n-i)} \int a^{-n^2}dy\; f(a^{-1}y)\exp\left(-2\pi\sqrt{-1}\left\langle y,\ l\begin{bmatrix} b\cdot x^{(n-i)} & \\ & O_i\end{bmatrix}{}^tl'\right\rangle\right)$$

ここで，$f^*_g(y) = \int_0^g a^{-ni-1}f(a^{-1}y)\,da$ とおく。$f(x) = f_1(r)\,f_2(\tau)$ と，極座標 $(r,\tau)\in\mathbb{R}_+\times S^{n^2-1}$ で書け，$f_1\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f_2\in C_0^\infty(S^{n^2-1}-\{P(x)=0\})$ とすると，$f^*_g(y) = f^*_{1g}(r)\cdot f_2(\tau)$ である。$\forall g>0$

に対して,

$$\exists r_0>0,\quad \forall r<r_0 \Rightarrow f^*_{1g}(r) = \int_0^\infty a^{-ni-1} f_1(a^{-1}\cdot r)\,da$$

$$\exists r_1>0,\quad r>r_1 \Rightarrow f^*_{1g}(r) = 0$$

となることが示される。

一方, $\forall\ p(x)\in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して,

$$\lim_{b'\to\infty}\int dl\,dl'\int_0^{b'} b^{n(n-i)-1}db\int_{SL(n-i,\mathbb{R})^\pm} dx^{(n-i)}\ p\left(l\cdot\begin{bmatrix} b\cdot x^{(n-i)} & \\ & 0_i\end{bmatrix}{}^t l'\right)$$

$$= \int_{V_{\mathbb{R}}} p(x)\,T_i(x)\,dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.13)$$

と書くことができる。ここで, $T_i(x)$ は $\overline{S_i}$ 上に support をもつ超函数で, $T_i(g\cdot x) = \chi(g)^{-i}\,T_i(x)$ をみたし, $\Lambda_i = T^*_{S_i}V_{\mathbb{R}}$ 上の principal symbol は, $(2\pi)^{-i^2/2}\,|P_{\Lambda_i}(x)|^{-i}\sqrt{|dy|}/\sqrt{|dx|}$ となるものである。

(一般に $T(x)$ を homogeneous な超函数とすれば, 極座標 (r,τ) を使って, $T(x) = T(r,\tau)$ と書くことによって自然に $\mathbb{R}^+\times S^{n^2-1}$ 上の超函数とみなすことができる。一方 $p(x)$ を $r=0$ の近傍で r について homogeneous で, かつ τ 方向には C^∞, $V_{\mathbb{R}}$ 上で compact support をもつ連続函数とするとき,

$$(4.14)\quad \int p(x)\,T(x)\,dx = \int_0^r r^{n^2-1}dr\int d\tau\ \ p(r,\tau)\cdot T(r,\tau)$$

として, 積分が定義できる。

$T_i(x)$ は homogeneous な超函数で，その homogeneous degree は，$-ni$ である。よってその Fourier 変換 $\hat{T}_i(x)$ はやはり homogeneous な超函数で，homogeneous degree は，$ni-n^2$ である。さらに $f^*_g(y)$ は compact support を持ち，τ 方向に C^∞ で $r=0$ の近傍で，r について $-ni$ 次 homogeneous である。

以上のことに注意すれば，(4.12) は，

$$(4.15)\qquad (4.12) = \int dy \int dx \quad f^*_g(y)\, T_i(x)\, \exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle)$$

$$= \int f^*_g(y)\, \hat{T}_i(y)\, dy$$

として定義できる。

さてこれを計算するために，次のようにして超局所解析を利用する。$T_i^s(x)$ を $V_{\mathbb{R}}$ 上の holomorphic parameter s を持つ超函数で，$\Lambda_i = T^*_{S_i}V_{\mathbb{R}}$ 上の principal symbol が，$(2\pi)^{-i^2/2}|P_{\Lambda_i}(x)|^s\sqrt{|dy|}/\sqrt{|dx|}$ で与えられるもので，$s=-i$ のとき $T_i^s(x) = T_i(x)$ となるものとする。このような $T_i^s(x)$ の存在は §2. の議論から保証される。さらにその Fourier 変換は

$$(4.16)\qquad \int T_i^s(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle)\,dy\,\Big|_{V_{\mathbb{R}}-S}$$

$$= (2\pi)^{ni-\frac{n^2+i^2}{2}} \prod_{g=i+1}^{n} \frac{\Gamma(s+g)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(s+g)\right)\right)$$

$$|P(y)|^{-s-n}\,\Big|_{V_{\mathbb{R}}-S} \quad \left(= A_i(s)\cdot|P(y)|^{-s-n}\Big|_{V_{\mathbb{R}}-S} \text{ と書く}\right)$$

で与えられることが，Principal symbol の計算によってわかる。$A_i(s)$ は $s=-i$ において，$i=(n-1)$，$i=(n-2)$ のとき一位の zero，i が $(n-3)$ 以下のときには２位以上の zero を持つことに注意しよう。さて，(4.15) の計算を続けるために

$$(4.17)\qquad \int f_g^*(y)\,\hat{T}_i^s(y)\,dy$$

を計算して，$s=-i$ とおけばよい。

$$(4.17) = \int f_{1g}^*(r)\, f_2(\tau)\, A_i(s)\, |P(\tau)|^{-s-n}\, r^{-ns-n^2}\, r^{n^2-1}\, dr\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty A_i(s)\, f_{1g}^*(r)\, r^{-ns-1}\, dr \int f_2(\tau)\, |P(\tau)|^{-s-n}\, d\tau$$

ここで，$r<r_0$ ならば，$f_{1g}^*(r)=\int_0^\infty a^{ni-1} f(a^{-1}r)\,da = f_1^*(r)$ で，$f_1^*(r)=r^{-ni} f_1^*(1)$ であることと，$(s+1)\,r_+^{s}\big|_{s=-1}=\delta(r)$ であること，及び $f_{1g}^*(r)$ が Compact support を持つことに注意すれば，

$$(4.18)\qquad A_i(s)\cdot f_{1g}^*(r)\, r^{-ns-1}\Big|_{s=-i} = \frac{A_i(s)}{-n(i+s)}\Big|_{s=-i} f_1^*(1)\,\delta(r)$$

を得る。したがって，

$$(4.19)\qquad \int f_g^*(y)\,\hat{T}_i(y)\,dy$$

$$= \frac{A_i(s)}{-n(i+s)}\Big|_{s=-1}\cdot f_1^*(1)\cdot\int f_2(\tau)\,|P(\tau)|^{-i-n}\,d\tau$$

$$= A_i(s)/-n(i+s)\Big|_{s=-i}\cdot\int f(y)\,|P(y)|^{-i-n}\,dy$$

を得る。

以上 (4.9) (4.13) をまとめて，(4.6) は

$$(4.20)\quad \int_{G'/\Gamma} \sum_{x \in \Gamma \cdot x_i} \hat{f}_g(p^*(g), x_i)\, dg_1$$

$$= \det(X_i)^{-n}\cdot \mu^{(n-i)}(X_i)\cdot \mathrm{Vol}(SL(i,\mathbb{R})/\Gamma^{(i)})^2 \times (4.12)$$

$$= \det(X_i)^{-n}\cdot \mu^{(n-i)}(X_i)\cdot \mathrm{Vol}(SL(i,\mathbb{R})/\Gamma^{(i)})^2 \times (4.19)$$

となる。したがって $\xi_1^{(n-i)}(s, L^{(n-i)}) = \sum_{\substack{X_i \in M(n-i,\mathbb{Z})/\sim \\ \det X_i > 0}} \mu^{(n-i)}(X_i) \det(X_i)^{-s}$

$$(4.21)\quad J_i^*(\hat{f}_g, L^*) = \xi_1^{(n-i)}(n, L^{(n-i)})\cdot \mathrm{Vol}(SL(i,\mathbb{R})/\Gamma^{(i)})^2$$
$$\times\ A_i(s)\,(-n(i+s))^{-1}\Big|_{s=-i} \int f_g(y)\,|P(y)|^{-i-n}\,dy$$

であり、したがって、$J_i^*(\hat{f}_g, L^*) = \chi(g)^{-i} J_i^*(\hat{f}, L^*)$ が得られる。$(i \neq n)$

一方 $i=n$ の場合、

$$(4.22)\quad J_n(\hat{f}_g, L^*) = \int_{G'/\Gamma} \hat{f}_g(0)\,dg_1 = \hat{f}_g(0)\cdot \mathrm{Vol}(SL(n,\mathbb{R})/\Gamma^{(n)})^2$$
$$= \int f_g(x)\,dx \cdot \mathrm{Vol}(SL(n,\mathbb{R})/\Gamma^{(n)})^2$$

であるから、やはり $J_n^*(\hat{f}_g, L^*) = \chi(g)^{-n} J_n^*(\hat{f}_g, L^*)$ をみたす。

したがって次の定理を得る。

<u>定理 4.3.</u> $\xi_i^{(n)}(s, L)$ は、$\mathrm{Re}(s) > n$ で定義され、$s = n, (n-1), \cdots, 1$, 一位の possible poles を持つ有理型函数として全平面に解析接続され、

$s = n$ では $\mathrm{Vol}(SL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{Z}))^2$

$s = i\ (1 \leq i \leq n-1)$ では、

$$\xi_1^{(n-i)}(n, L^{(n-i)}) \cdot Vol\,(SL(i,\mathbb{R})/SL(i,\mathbb{Z}))^2$$
$$\times\ A_i(s)\,(-n(i+s))^{-1}\big|_{s=-i}$$

を留数に持つ。特に $A_i(s)$ は $i \leq n-3$ ならば，$s=-i$ で 2位以上の zero を持つから，$s=(n-3), (n-4), \cdots, 1$ では，holomorphic になる。

最後に例 4.2. として，新谷 [8] でとりあげられたゼータ函数において，やはり今までのべて来た方法が有効であるので取りあげたかったが，すでに予定の紙面を大きく超しているので，割愛する。かんたんに結果を述べると，[8]，P50 において定義されるゼータ函数 $\xi_i(s, L)$ は $s=\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}, \cdots, 1$ に一位の possible poles を持つが，このうち，$s=1$ におけるものを除いては，§3 の議論がそのまま適用できて，[8] では計算されていないものも含めて，その residues は計算できる。$s=1$ においては同じ方法で求めた値が，見かけ上発散していることがあるので，それに注意さえすれば，実際に収束した値に直すことができる。

References

[1] 佐藤幹夫－新谷卓郎；概均質ベクトル空間の理論，数学の歩み 15-1 (1970), 85-157.

[2] M.Sato and T.Shintani; On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. , i00, 1 (1974), 131-170

[3] 木村達雄；概均質ベクトル空間の理論，数学 32-2 (1980), 97-119.

[4] M.Sato, M Kashiwara, T.Oshima and T.Kimura; Micro local analysis of prehomogeneous vector spaces. to appear in Inv. Math.

[5] M.Kashiwara, T.Kimura and M.Muro; Microlocal calculus of simple holonomic system and its application, Lecture Note (Preprint)

[6] 柏原正樹－三輪哲二；Micro local calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換，数理研講究録 238.

[7] T.Shintani; On Dirichret series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan, 24 (1972) 132-188

[8] T.Shintani; On zeta functions associated with the vector space of Quadratic forms, J.Fac. Sci. Univ, Tokyo, 22(1975) 25-65.

[9] 木村達雄；概均質ベクトル空間の組数について；（手紙及び個人的対話，及び数理研講究録）