数理解析研究所講究録
第 421 巻 1981 年 247-261

時間を入れたブール代数の公理系

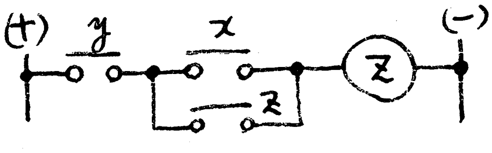
日大 理工 数学科
高橋英之

要約. 実数の集合R(時間軸)から2値{true, false}への関数の全体を$\mathcal{R}$とする。この$\mathcal{R}$の上の演算子について論じる。これは通常のブール代数を含んでより広い体系となる。シーケンス制御の自己保持回路に対応した演算子Hを導入し、このHに関する公理系を立て、多くの定理(つまりHに関する公式)を導く。いくつかの小テーマに分けて論じる。

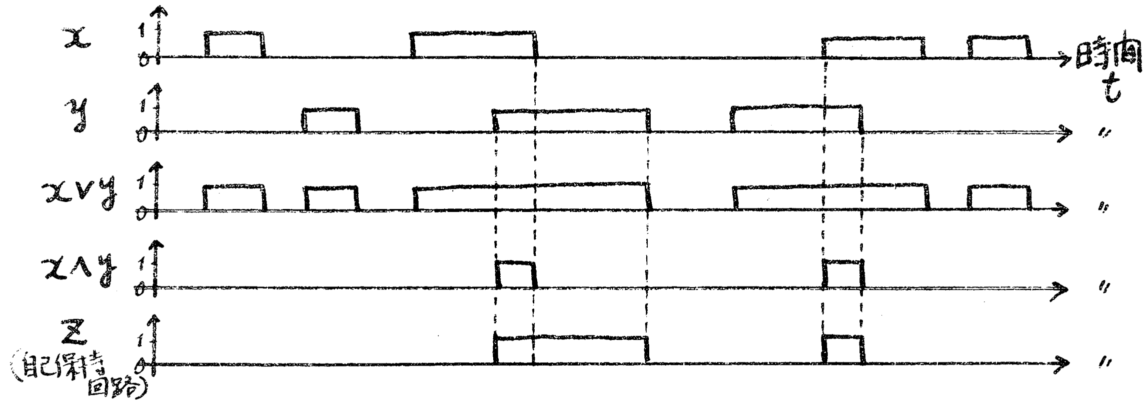
§1. 序論. シーケンス制御は時間に関係している。本稿は次の文献にヒントを得た:

杉原丈夫「時間の論理」 早稲田大学出版部 1974年

他の文献についてはこの本の参考文献を参照されたい。
自己保持回路とは次のようなものである。



$y \wedge (x \vee z) \to z.$



自己保持回路 z は、$x \wedge y$ ON が z の発火条件、それ以後は y ON が z の維持条件である。x は関数：$R \to \{true, false\}$ であり、y も同様である。OR($\vee$) や AND($\wedge$) や自己保持回路は、2つの時間関数に対してひとつの時間関数を与える演算（或は functional）であると見做せる。

<u>定義</u>. $\Omega = \{x \mid x : R \to \{true, false\}\}$.

この Ω の上の演算子について研究する。

2項演算子：$\Omega \times \Omega \to \Omega$，単項演算子：$\Omega \to \Omega$.

<u>定義</u>. Ω の要素に対する等号 (=) を次のように定義する。

For $x, y \in \Omega$, $\quad x = y$ iff $\forall t\,(x(t) = y(t))$.

<u>定義</u>. Ω 上の演算子に対する等号を次のように定める。

単項演算子 $\quad A = B$ iff for $\forall x \in \Omega$, $Ax = Bx$.

2項 〃 $\quad A = B$ iff for $\forall x\, \forall y \in \Omega$, $xAy = xBy$.

§2. 2値のブール代数を Ω の上へ移すこと.

・2値 $\{true, false\}$ に対する通常のブール演算子はすべて

容易に$\mathfrak{B}$の上の演算子とみなすことができる。以下のように。

<u>定義</u>. $\forall x\ \forall y \in \mathfrak{B}$, $\forall t \in R$ に対して

$$(x \wedge y)(t) \overset{\mathrm{def}}{=} x(t) \wedge y(t), \quad (x \vee y)(t) \overset{\mathrm{def}}{=} x(t) \vee y(t).$$

$$(x \to y)(t) \overset{\mathrm{def}}{=} x(t) \to y(t), \quad (\neg x)(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \neg(x(t)).$$

すると2値のブール代数の公式はすべて$\mathfrak{B}$上でも成立する。

例. 分配則 $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$ … $\mathfrak{B}$の元として成立.

ブール値 true 及び false は$\mathfrak{B}$の中の元としては、恒等関数であると見做される。 true $\in \mathfrak{B}$, false $\in \mathfrak{B}$.

true(t) = true for $\forall t$. false(t) = false for $\forall t$.

<u>補題</u>. For $x, y \in \mathfrak{B}$, $x = y$ holds

iff $(x \to y)$ = true and $(y \to x)$ = true.

<u>注意</u> 2値 true 及 false と、恒等関数 true 及 false を区別するために、前者を ON 及 OFF と呼ぶことがある。

<u>注意</u> 式 $f(x, y)$ が常時 true であるとき、$f(x, y)$ = true と書く代りに単に $f(x, y)$ と書くことがある。また、公式の「for $\forall x\ \forall y \in \mathfrak{B}$」という但し書きを省略することがある。この約束に従えば例えば上の補題は次のように書ける。

$x = y$ iff $x \to y$ and $y \to x$.

<u>約束</u>. 演算の優先順位について次の約束をする。$\mathfrak{B}$の上で定義される（ブール演算子以外の）演算子はすべて、$\vee$(OR) 及び $\wedge$(AND) よりも演算の優先順位が高い、とする。

§3. 演算子Hに関する公理系.

発火条件 $x \wedge y$ ON、維持条件 y ON であるような自己保持回路を、演算子Hを用いて xHy と書くことにする。これを記号論理式で与えると —

<u>定義</u> $(xHy)(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \exists s\,(s \leq t \wedge x(t) \wedge y(t) \wedge \forall r\,(s \leq r \leq t \rightarrow y(r)))$.

<u>定義</u> $xHyHz \overset{\mathrm{def}}{=} (xHy)Hz$.

$wHxHyHz \overset{\mathrm{def}}{=} (wHxHy)Hz$ etc.

結合律は成立しない。$xHyHz$ ON のとき「現在 x である、その前は y だった、更にその前は x だった」の意味となる。xHy に対する上の記号論理的定義から、以下の9つの基本命題A1〜A9が証明できる。

<u>Hの公理系</u>

A1. If $x_1 \rightarrow x_2$ and $y_1 \rightarrow y_2$ then $x_1Hy_1 \rightarrow x_2Hy_2$.

A2. $xHy \rightarrow y$.

A3. $x \wedge y \rightarrow xHy$.

A4. $\mathit{false}\,Hx = \mathit{false}$.

A5. $xHy = (x \wedge y)Hy$.

A6. $(x \vee y)Hz = xHz \vee yHz$.

A7. $xH(yHz) = (yHz \wedge x)Hz$.

A8. $uHv \wedge xHy = (uHv \wedge x)H(v \wedge y) \vee (xHy \wedge u)H(v \wedge y)$.

A9. $xHy = xH(y \wedge z) \vee (xHy \wedge \overline{z})Hy$.

この9つの命題は、xHy の定義を前提にすればそれから証明される定理であるが、この9つを公理であると設定すれば、xHy の記号論理式はこれら公理に対するひとつのモデルだということになる。以下、後者の見方をとる。これを公理系 A1〜A9 に対する自己保持回路モデルと呼ぶ。この公理系を用いて簡単な公式を証明してみよう。

定理 1) 巾等律. $xHx = x$. $xHxHx = x$, etc.

2) $\mathrm{true}\,Hx = x$. 3) $xH\,\mathrm{false} = \mathrm{false}$.

4) $xH\,\mathrm{false}\,Hy = \mathrm{false}$.

5) $xHyHy = xHy$. 6) $yHxHy = xHy$.

7) $xHy \wedge x = x \wedge y$.

8) $(x \wedge z)H(y \wedge z) = xH(y \wedge z)$.

9) $xHy \wedge z = xHyH(y \wedge z)$.

証. たとえば (1). $x = x \wedge x \to xHx$ by A3.

$xHx \to x$ by A2. 補題によって $xHx = x$.

(5). A7で x を true に等しく置くと、

$$\mathrm{true}\,H(yHz) = (yHz \wedge \mathrm{true})Hz.$$

$$\therefore\ yHz = (yHz)Hz \quad \text{by using (2).}$$

他も公理の機械的適用によって証明できる。

§4. 分配律.

色々な演算子を導入する毎にそれに関する分配律を証明す

ることができる。ここではその基本となるHの分配律を言う。

<u>定理</u>. 1) $(x \vee y) H z = xHz \vee yHz$ --- A6.

2) $xH(y \wedge z) = xHy \wedge xHz$.

3) $(x \wedge y)Hz \to xHz \wedge yHz$. 逆は不成立.

4) $xHy \vee xHz \to xH(y \vee z)$. 逆は不成立.

証. (2)を証明してみよう。A8 を使う.

$$xHy \wedge xHz = (xHy \wedge x)H(y \wedge z) \vee (xHz \wedge x)H(y \wedge z)$$
$$= (x \wedge y)H(y \wedge z) \vee (x \wedge z)H(y \wedge z)$$
$$= xH(y \wedge z) \vee xH(y \wedge z) = xH(y \wedge z).$$

§5. 直列化公式.

公理 A8 の如く、ANDで結ばれた左辺を、時間的順序について場合分けをした右辺で表わした公式を、直列化公式と呼ぼう。A8 は (2,2) 変数の直列化公式である。

<u>定理</u> 1) (3,2) 変数の直列化公式:

$$uHvHw \wedge xHy = (uHvHw \wedge x)H(w \wedge y) \vee (uHv \wedge x)H(v \wedge y)H(w \wedge y) \vee (u \wedge xHy)H(v \wedge y)H(w \wedge y).$$

2) (3,3) 変数の直列化公式:

$$uHvHw \wedge xHyHz = \text{計 6 項の和 (省略)}.$$

3) (4,2) 変数の直列化 --- 計4項の和.

4) (2,2,2) 変数の直列化 --- 計8項の和、

など任意の積を和の形に直すことができる。

証. (1) $uHvHw \wedge xHy = (uHv)Hw \wedge xHy$

として直列化公理A8を適用すれば証明できる。他も同様 ■

直列化公式を利用して証明される公式をいくつか挙げる。

定理 1) $xHy \to \overline{\bar{y}H\bar{x}}$

2) $xHy \wedge \bar{y}Hz \to xHz$.

3) $xHyHz \wedge zHyHx = yH(x \wedge z)$.

4) $xHyHz \wedge yHxHz = (x \wedge y)Hz$.

5) $xHuHy \wedge xHvHz \wedge \overline{xHy} \to xH(u \wedge v)Hy$.

証. (1) A8によって

$xHy \wedge \bar{y}H\bar{x} = (xHy \wedge \bar{y})H(y \wedge \bar{x}) \vee (\bar{y}H\bar{x} \wedge x)H(\bar{x} \wedge y)$ ※

$xHy \to y$ だから $xHy \wedge \bar{y} = false$. 同じく $\bar{y}H\bar{x} \wedge x = false$.

故に、※ $= false\, H(y \wedge \bar{x}) \vee false\, H(\bar{x} \wedge y)$

$= false$, by A4. 故に(1)が導かれる。

(2)も同様. (3)〜(5)は左辺に(3, 3)変数の直列化公式を適用すれば証明できる。

§6. 単項演算子E及びAと、様相論理の演算子◇及び□

定義. $Ex \stackrel{\text{def}}{=} xH\,true$ (自己保持回路モデルでの意味) … xがONになったことがある.

$Ax \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\bar{x}H\,true}$ … 今までずっと x ONであった.

定理 $A = \neg E \neg$, $E = \neg A \neg$,

$Ax \to x$, $x \to Ex$, $Ax \to Ex$,

$AA = A$, $EE = E$ などの公式が成り立つ。

証明は略す。なお、この結果は、Modal Logic の◇及び□の公式と比較すべきである。◇x =「xであることは可能である。」
□x =「xであることは必然である。」

定理　EとAに関する双対原理がなりたつ。つまり、
　$E \leftrightarrow A$，$\vee \leftrightarrow \wedge$，$true \leftrightarrow false$ という入れ替えをした等式も成り立つ。

定理．分配則が成り立つ。

$$E(x \wedge y) \to Ex \wedge Ey, \qquad Ax \vee Ay \to A(x \vee y),$$
$$E(x \vee y) = Ex \vee Ey, \qquad A(x \wedge y) = Ax \wedge Ay.$$

定理　直列化公式：$Ex \wedge Ey = E(Ex \wedge y) \vee E(x \wedge Ey)$.

定理．1) $xHy \to Ex$　　2) $Ex \wedge Ay \to E(x \wedge Ay)$.

証．(2)を証明する。公理A9を使うのがミソである。

$$Ex = xH\,true \qquad [\text{A9での}\bar{x}\text{を}Ax\text{と置いて}]$$
$$= xH(true \wedge Ay) \vee (xH\,true \wedge \overline{Ay})H\,true \quad ※$$

※第1項 $= (x \wedge Ay)H(Ay) \to E(x \wedge Ay)$.

※第2項 $= (xH\,true \wedge E\bar{y})H\,true \to E\bar{y}$

$$\therefore (xH\,true \wedge \overline{Ay})H\,true \wedge Ay \to E\bar{y} \wedge Ay = false.$$

故に $Ex \wedge Ay \to E(x \wedge Ay)$ ▮

定理．1) $EAx \to AEx$，但、逆は成立せず。$EA \neq AE$.
2) $AEA = EA$.　その双対 $EAE = AE$ が成り立つ。
従ってまた、$EAEA = EA$，$AEAE = AE$ である。

3) EとAからなる長さ1以上のシーケンスは、

E, A, EA, AE の4つだけである。

証明は略すが、(1)は $EAx \wedge EA\bar{x} = false$ を直列化公式によって言うのがポイントである。

§7. 保存定理

Conservation Theorem (CTと略)

$$\begin{cases} \text{Forward} & \begin{cases} \text{Weak} \\ \text{Strong} \end{cases} \\ \text{Backward} & \begin{cases} \text{Weak} \\ \text{Strong} \end{cases} \end{cases}$$

ある種の形をした一群の公式を扱う。ある条件 c のもとである性質 p が保存されるという意味のものである。前向きのものと後向きのものとがある。前向きのものはある性質が一旦成り立てばある条件下で以後も成り立つというもの。後向きのものとは、ある性質が現在成り立っているなら、ある条件下で過去にさかのぼっても成りたっていた筈だ、というものである。

1) Weak Forward CT.　$pHc \rightarrow p$ という形のもの。

2) Strong Forward CT.　$pHc = p$　〃　pは fixed point.

3) Weak Backward CT.　$sHc \wedge p \rightarrow (s \wedge p)Hc$ という形

4) Strong Backward CT.　$sHc \wedge p = (s \wedge p)H(c \wedge p)$　〃

<u>定理</u>　Forward Conservation の例。

1) $(xHy)Hy = (xHy)$,

2) $(Ex)H\,true = Ex$,　$(Ex)Hy \rightarrow Ex$,

3) $(Ax)Hx = (Ax)$,

4) $\overline{(xHy)}\,H\,\overline{(x\wedge y)} = \overline{(xHy)}$

④は自己保持回路モデルでは、「発火条件の $x\wedge y$ が OFF という条件は xHy OFF という性質を前向きに強保存する」という意味である。証明は略する。

Backward Conservation の一例をあげる。

<u>定理</u>　$uHv \wedge Ax = (u\wedge Ax)H(v\wedge Ax)$.

自己保持回路モデルでは Ax は「今までずっと x ON であった」ことを意味する。現在 Ax が成立するなら過去のすべての時点で Ax であった筈である。上の定理はそういう自明のことを述べている。証明は A9 を用いるのがポイントである。

保存定理に関係していくつかの演算子を導入しその性質を述べよう。証明はすべて省略する。

<u>定義</u>.　xPy　自己保持回路モデルにおける意味：「x は y より早く始まった」

$$xPy \overset{\text{def}}{=} x\wedge y\wedge \bar{y}Hx.$$

<u>定理</u>　1) 推移律.　$xPy\wedge yPz \to xPz$.

2) Forward Conservation.　$(xPy)H(x\wedge y) = xPy$.

3) Backward Conservation.

$$uH(x\wedge y)\wedge xPy = (u\wedge xPy)H(x\wedge y\wedge xPy).$$

<u>定義</u>.　$xSy \overset{\text{def}}{=} x\wedge y\wedge \neg(xPy)\wedge\neg(yPx)$.

モデルでの意味：「x と y は同時に始まった」

<u>定理</u>　1) 推移律.　$xSy\wedge ySz \to xSz$.

2) 結合律 $x S (y S z) = (x S y) S z$.

3) Forward Conservation. $(x S y) H (x \wedge y) = x S y$.

4) Backward Conservation.

$$u H (x \wedge y) \wedge x S y = (u \wedge x S y) H (x \wedge y \wedge x S y).$$

<u>定義</u> 単項演算 $F x$. モデルでの意味:「x は始めて ON になった。」

$$F x \stackrel{\mathrm{def}}{=} x \wedge \neg (x H \mathit{true} H \bar{x} H \mathit{true} H x)$$

<u>定理</u>. 1) 射影演算子 $FF = F$.

2) Forward Conservation $(F x) H x = F x$.

3) Backward Conservation $(u \wedge x) H v \wedge F x = (u \wedge F x) H (v \wedge F x)$

次に色々な保存定理の間の関係を示す定理を証明なしで言う。

<u>定理</u>. $p H c = p$ iff $p H c \rightarrow p$ and $p \rightarrow c$.

<u>定理</u>. 次の3つの条件は同値である。1) $p H c \rightarrow p$.

2) $(p H c \wedge \bar{p}) H c = \mathit{false}$ 3) $p H c = p H (c \wedge p)$.

<u>定理</u>. $s H c \wedge p \rightarrow (s \wedge p) H c$ --- Weak Backward

且つ $p H c \rightarrow p$ であるなら、 --- Weak Forward

$s H c \wedge p = (s \wedge p) H (c \wedge p)$ である。--- Strong Backward.

<u>定理</u>. $\bar{p} H c \rightarrow \bar{p}$ ならば --- $\bar{p}$ の Weak Forward

$s H c \wedge p = (s \wedge p) H (c \wedge p)$ である。--- p の Strong Backward.

<u>定理</u> $s H c \wedge p = (s \wedge p) H (c \wedge p)$ ならば --- Strong Backward

$s H c \wedge p \rightarrow (s \wedge p) H c$ である。 --- Weak Backward.

<u>定理</u>. もし $p_1 H c \rightarrow p_1$ 且つ $p_2 H c \rightarrow p_2$ ならば、

$$(p_1 \wedge p_2) H c \to p_1 \wedge p_2, \quad (p_1 \vee p_2) H c \to p_1 \vee p_2.$$

2) もし $pHc_1 \to p$ 且つ $pHc_2 \to p$ ならば、

$$pH(c_1 \wedge c_2) \to p.$$

3) もし $p_1 H c_1 \to p_1$ 且つ $p_2 H c_2 \to p_2$ ならば

$$(p_1 \wedge p_2) H (c_1 \wedge c_2) \to p_1 \wedge p_2$$

$$(p_1 \vee p_2) H (c_1 \wedge c_2) \to p_1 \vee p_2.$$

強保存についても同様な公式が成立する。

§8. Hの双対演算子I.

定義 $x I y \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\bar{x} H \bar{y}}$. 従って $x H y = \overline{\bar{x} I \bar{y}}$.

定理. 双対原理が成り立つ。つまり、

$$H \leftrightarrow I, \quad \wedge \leftrightarrow \vee, \quad \mathit{true} \leftrightarrow \mathit{false}$$

という入れ替えを行った等式も成立する。

§9. Hに関する公理系の無矛盾性・完全性・独立性

(1) 無矛盾性。公理系が無矛盾であることを言うには、何でもよい1つの式がその公理系から出て来ないことを言えばよい。言うまでもなく矛盾した公理系からはすべての命題が導けるからである。我々の公理系A1～A9からは例えば交換則「$xHy = yHx$」が導けない。証明は、公理系のモデルでこの式が成り立たないものが存在することを示せばよいが、自己保持回路モデルがそれであることは明らかである。

定理 公理系A1～A9は無矛盾である。

(iii) 完全性 — 未解決。公理系A1〜A9のモデルは唯一ではない。たとえば xHy として $x \wedge y$ をとるとすべての公理を満たす。しかし $x \wedge y$ は交換則という公理系から導けない公式を満す。完全性を次のように定義する。Hとブール演算子からなる式

$$f(x, y, \cdots, \wedge, \vee, \neg, H) = g(x, y, \cdots, \wedge, \vee, \neg, H)$$

の集合を考える。xHy として自己保持回路モデルを取るときに成立する筈のすべての等式が、Hに関する公理系から導かれるとき、その公理系は完全である、と呼ぶことにする。我々の公理系A1〜A9がこの意味で完全であるか否か — これは未解決である。また独立性も open problem である。

§10. H式の表現能力の限界.

xHy が flip-flop にあたるものだからこれで何もかも作れる筈だと思うのは誤りである. infix operator という制限をもっている。その制限を最もよく示すのが次の定理である.

<u>補題</u>. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Boolean constants : true 及び false} \\ \text{Boolean variable } x. \\ \text{operator } \wedge, \vee, \neg, H \end{array} \right.$

によって作られる式の値は、x が十分多い回数だけ値を変えたあと究極的に (ultimately)、時間関数

$$\text{true}, \text{ 又は false}, \text{ 又は } x, \text{ 又は } \bar{x}$$

の値に一致するに到る。(証明は帰納法による。)

<u>定理</u>. Hの式で counter を作ることはできない。

式の表現能力を増やしたいと思うなら、別種の演算子、例えば　$C_2 x$: 時間 $t \geqq 0$ で x が ON になった回数を mod 2 で数える単項演算

を導入すればよかろう。本稿はこの問題には立ち入らない。

§11. 将来の経過を表わす演算子 $\widetilde{H}$

xHy は過去の経過を表わす。反対に、将来の経過を表わす演算子 $\widetilde{H}$ を考えよう。但、$\widetilde{H}$ は H から induce されるものではなく、全く別種の演算子である。$\widetilde{H}$ はもはや physical device には対応しない。$x\widetilde{H}y$ を次式で定義する。

<u>定義</u> $(x\widetilde{H}y)(t) \overset{\text{def}}{=} \exists s\,(t \leqq s \wedge x(s) \wedge y(s) \wedge \forall r(t \leqq r \leqq s \rightarrow x(r)))$.

xHy と $x\widetilde{H}y$ とは完全に時間軸上での関係を左右逆にしたものである。$\widetilde{H}$ に関しては、H に関する式を<u>左右対称</u>にしたものが成り立つ。

<u>定義</u>　$x\widetilde{H}y\widetilde{H}z \overset{\text{def}}{=} x\widetilde{H}(y\widetilde{H}z)$.

$$w\widetilde{H}x\widetilde{H}y\widetilde{H}z \overset{\text{def}}{=} w\widetilde{H}(x\widetilde{H}y\widetilde{H}z),\ etc.$$

$\widetilde{H}$ に関する公理系

$\widetilde{A}1$. If $x_1 \rightarrow x_2$ and $y_1 \rightarrow y_2$ then $x_1\widetilde{H}y_1 \rightarrow x_2\widetilde{H}y_2$.

$\widetilde{A}2$. $x\widetilde{H}y \rightarrow x$.

$\widetilde{A}3$. $x \wedge y \rightarrow x\widetilde{H}y$.

$\widetilde{A}4$. $x\widetilde{H}\,false = false$

$\widetilde{A}5$. $x\widetilde{H}y = x\widetilde{H}(x \wedge y)$

$\widetilde{A}6$. $x\widetilde{H}(y \vee z) = x\widetilde{H}y \vee x\widetilde{H}z$.

$\widetilde{A}7$. $(x\widetilde{H}y)\widetilde{H}z = x\widetilde{H}(x\widetilde{H}y \wedge z)$

$\tilde{A}8.$ $u\tilde{H}v \wedge x\tilde{H}y = (u\wedge x)\tilde{H}(u\tilde{H}v\wedge x) \vee (u\wedge x)\tilde{H}(x\tilde{H}y\wedge v)$

$\tilde{A}9.$ $x\tilde{H}y = (x\wedge z)\tilde{H}y \vee x\tilde{H}(x\tilde{H}y\wedge z)$.

次にHと$\tilde{H}$を共に含む式を変形してゆくために必要な公理$A\tilde{A}1$, $A\tilde{A}2$を述べる。

<u>定義</u> $xHy\tilde{H}z \stackrel{\mathrm{def}}{=} xHy \wedge y\tilde{H}z$.

<u>補題</u> $(w\wedge xHy)\tilde{H}z = w\wedge xHy\wedge(w\wedge y)\tilde{H}z$.

$A\tilde{A}1.$ $(s\wedge u\tilde{H}v)Hw = (sH(u\wedge w)\wedge v)Hw \vee sH(u\wedge w)\wedge u\tilde{H}v$.

$A\tilde{A}2.$ $u\tilde{H}(s\wedge vHw) = u\tilde{H}(v\wedge(u\wedge w)\tilde{H}s)\vee vHw\wedge(u\wedge w)\tilde{H}s$.

この2つの公理によって例えば次式のような場合分け公式が証明できる。なお上の2の公理で「十分」か否かは未解決である。

$$u\tilde{H}(vHwHx) = vHwHx\wedge u \vee vHw\wedge(u\wedge w)\tilde{H}x \vee u\tilde{H}(v\wedge u)\tilde{H}(w\wedge u)\tilde{H}x.$$

§12. 結語.

本稿は人間の持っている<u>時間</u>に関する直観のごく一部を形式化したものである。筆者は今後は<u>空間</u>認識を研究したい。

参考文献.

1. 杉原丈夫「時間の論理」早稲田大学出版部.
2. 内田種臣「様相の論理」 〃 〃
3. H. Takahashi, "An Automatic-Controller Description Language." IEEE Trans. Software Eng. Jan. 1980.