

## 数値的方法による Laplace 逆変換の 高精度アルゴリズム

日大 理工 細野 敏夫

1. はしがき 関数  $f(t)$  の Laplace 変換と逆変換は次式で定義される。

$$\text{正変換} \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1)$$

$$\text{逆変換} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (2)$$

本文では、像関数  $F(s)$  に次の条件を仮定する。

(i)  $\operatorname{Re} s > 0$  で正則

(ii)  $\operatorname{Re} s > 0$  で  $|\Delta| \rightarrow \infty \Rightarrow F(s) \rightarrow 0$

(iii)  $\operatorname{Re} s > 0$  で  $F^*(s) = F(s^*)$

条件 (i) は座標の移動で常に可能である。条件 (ii) は  $|\arg s| < \pi/2$  という条件より強いが、条件 (ii) に反する像関数を見出すことは困難である ( $f(t)$  が超関数の場合を除き)。

条件 (iii) は  $f(t)$  が実関数ということである。

式 (2) の操作をコンピュータを用いて数値的に行うとき、 $\gamma$

レゴリズムの良さの判定基準として次の項目が考えられる。

- (a) 予備知識の必要程度
- (b) プログラム作成の難易
- (c) 計算速度の大小
- (d) 使用するメモリーの大きさ
- (e) 誤差の評価の難易
- (f) 誤差の制御の難易
- (g) 適用できる問題範囲の大小

従来提案された方法は、上の基準のいすれかに抵触し、実用性が低かった。例えば Bellman et al. [1966] の方法は (e), (f), (g) の点からほとんど実用性がなく、Dubner-Abate 法を改良した Durbin [1974] の方法も、誤差が  $F(s)$  のオーダーに敏感で、 $1/\sqrt{s+1}$  や  $1/\log s$  などは困難である。しかも打ち切り誤差の判定が難かしいので (c), (e), (g) に抵触する。

本文の方法は (a) ~ (g) のすべての点から満足のゆくもので、その一つの結果として、YHP-97, TI-59, CASIO FX-502P, SHARP PC-1211 などのポケット・コンピュータでも充分実用性のある問題が扱える。

本法の要旨は次の通りである。

- (i) 逆変換 (2) 中の  $e^{st}$  を  $e^{\sigma_0}/2 \cosh(\sigma_0 - st)$  で近似し、積分を無限級数に変換する。

(ii) 無限級数を Euler 変換により効率よく計算する。

2. 指数関数の近似 たとえば、次の関数を考えてみよう

$$E_{ec}(\lambda, \sigma_0) \triangleq e^{\sigma_0} / 2 \cosh(\sigma_0 - \lambda), \quad \sigma_0 > 0 \quad (3)$$

この関数を2通りに書換えてみる。

$$E_{ec}(\lambda, \sigma_0) = e^{\lambda} - e^{-2\sigma_0} e^{3\lambda} + e^{-4\sigma_0} e^{5\lambda} - \dots \quad (4)$$

$$E_{ec}(\lambda, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{\lambda - [\sigma_0 + i(n - 0.5)\pi]} \quad (5)$$

式(4)から、 $\sigma_0 \gg \operatorname{Re} \lambda$  のとき、 $E_{ec}(\lambda, \sigma_0)$  は指数関数  $e^{\lambda}$  のよい近似であり、式(5)から、 $E_{ec}(\lambda, \sigma_0)$  の極はすべて  $\lambda$  軸で  $\lambda = \sigma_0$  という直線上に等間隔で列が、留数は  $i(-1)^n \times (e^{\sigma_0}/2)$  であることがわかる。

同じような性質をもつ近似式としては

$$E_{cc}(\lambda, \sigma_0) \triangleq \cosh \sigma_0 / \cosh(\sigma_0 - \lambda) \quad (6)$$

$$E_{es}(\lambda, \sigma_0) \triangleq e^{\sigma_0} / 2 \sinh(\sigma_0 - \lambda) \quad (7)$$

$$E_{oc}(\lambda, \sigma_0) \triangleq \sinh \sigma_0 / \cosh(\sigma_0 - \lambda) \quad (8)$$

$$E_{so}(\lambda, \sigma_0) \triangleq \sinh \sigma_0 / \sinh(\sigma_0 - \lambda) \quad (9)$$

$$E_{co}(\lambda, \sigma_0) \triangleq \cosh \sigma_0 / \sinh(\sigma_0 - \lambda) \quad (10)$$

などがある。

3. 数値変換の理論式 Bromwich 積分(2)中の  $e^{st}$  の代わりに  $E_{ec}(st, \sigma_0)$  を代入した関数を定義する。

$$f_{ec}(t, \sigma_0) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) E_{ec}(st, \sigma_0) ds \quad (11)$$

式(4), (5) を使って書直すと, 条件(i), (ii), (iii) により

$$f_{ec}(t, \sigma_0) = f(t) - e^{-2\sigma_0} f(3t) + e^{-4\sigma_0} f(5t) - \dots \quad (12)$$

$$f_{ec}(t, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Im} F\left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)\pi}{t}\right) \quad (13)$$

式(12)は  $f_{ec}(t, \sigma_0)$  が,  $\sigma_0 \gg 1$  のとき,  $f(t)$  のよい近似であることを示し, また近似誤差の評価式として使える。(13)は  $f_{ec}(t, \sigma_0)$  を求めるアルゴリズムを与える理論式である。

4 数値変換の計算式 数値計算を行なう場合, 原理的には(13)を適当な項数  $N$  で打ち切ればよいが, 単純な打ち切りでは  $N$  をかなり大きくとらないと誤差が大きくなり, 実用的でない。大雑把に考えると,  $s \rightarrow \infty$  のとき  $F(s) = C/s^n$  のとき有効数字  $m$  桁が欲しいとすれば, 打ち切り項数は

$$N \doteq (t/\pi) \times (C \times 10^m)^{1/n} \quad (14)$$

で与えられる。例えば, 有効数字  $m=4$  とし,  $F(s) = (s+1)^{-2}$  に対して  $f(10)$  を求めようとするとき  $N \doteq 30,000$  の程度となる。これは Dubner-Abate-Darbin 法と同程度である。

幸いなことに, 式(13)の級数は, 実用的に重要なほとんどの場合に, 交代級数であるかまたは交代級数に直せるので,

Euler 変換を使って収束を速めることができる。

$$F_n \triangleq (-1)^n I_m F\left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)\pi}{t}\right) \quad (15)$$

と定義すると, Euler 変換は次の条件が成立するときには有効である。

(a) 適当な整数  $k \geq 1$  が存在し,  $n \geq k$  のとき  $F_n$  の符号が交代する。

(b)  $n \geq k$  のとき  $1/2 < |F_{n+1}/F_n| < 1$

条件 (a), (b) が満足されているとき, 級数を次のように書き換える。

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{k-1} F_n + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+1}} D^n F_k + R_p(k) \quad (16)$$

ここに,  $R_p(k)$  は打ち切り誤差で, 次式で与えられる。

$$R_p(k) \triangleq 2^{-p} (D^p F_k + D^p F_{k+1} + D^p F_{k+2} + \dots) \quad (17)$$

上式で  $D^n F_k$  は次式で定義される  $n$  階差である。

$$D^0 F_k \triangleq F_k, \quad D^{n+1} F_k \triangleq D^n F_k + D^n F_{k+1} \quad (18)$$

コンピュータで計算するときには式 (18) を逆に使って  $D^n F_k$  を  $F_n$  で表わし

$$\sum_{n=0}^{p-1} 2^{-(n+1)} D^n F_k = 2^{-p} \sum_{g=0}^{p-1} A_{pg} F_{k+g} \quad (19)$$

とする方がよい。ここに,  $A_{pg}$  は次式で定義される係数である。

$$A_{pp} \triangleq 1, A_{p,q-1} \triangleq A_{pq} + \binom{p+1}{q} \quad (20)$$

例えば、実用的な  $p=5, 6$  の場合は次となる。

$$\sum_{n=0}^4 \alpha^{-(n+1)} D^n F_k = (31F_k + 26F_{k+1} + 16F_{k+2} + 6F_{k+3} + F_{k+4})/32 \quad (21)$$

$$\sum_{n=0}^5 \alpha^{-(n+1)} D^n F_k = (63F_{k+1} + 57F_{k+2} + 42F_{k+3} + 22F_{k+4} + 7F_{k+5} + F_k)/64 \quad (22)$$

結局、 $f_{cc}(t, \sigma_0)$  の  $N$  項打ち切り近似を次式で計算する。

$$f_{cc}^{k,p}(t, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0}}{t} \left( \sum_{n=1}^{k-1} F_n + \frac{1}{2^p} \sum_{q=0}^{p-1} A_{pq} F_{k+q} \right) \quad (23)$$

5 誤差解析 式(23)を用いて  $\alpha^{-1}F(s)$  の値を求める

ときの誤差は

- (i) コンピュータの有限桁数による“丸め誤差”
  - (ii) 項数打ち切りによる“打ち切り誤差”
  - (iii) 指数関数を  $E_{cc}(s, \sigma_0)$  に近似したことによる“近似誤差”
- から成立つ。

(i) 本法では打ち切り項数  $N$  が比較的小さいので、桁数 10 桁程度のコンピュータを使えば、実用上、丸め誤差は無視できる。

(ii) 打ち切り誤差については、 $F(s)$  が有理関数その他次の条件

(c)  $F_n = \phi(n)$  と書けて、 $\phi(x)$  の  $p$  階微係数  $\phi^{(p)}(x)$  が  $x$

の正值に対して定符号で、 $x$  の増加と共に単調に減少する。  
が成立つ場合には、次の評価式が使える。

$$|R_p(k)| < \frac{1}{2^p} |F_k + \binom{p}{1} F_{k+1} + \binom{p}{2} F_{k+2} + \dots + F_{k+p}| \quad (24)$$

(iii) 近似誤差は式(12)より

$$f(t) - f_{ec}(t, \sigma_0) = e^{-2\sigma_0} f(3t) - e^{-4\sigma_0} f(5t) + \dots \quad (25)$$

で与えられる。従って、大雑把に言えば相対誤差が  $e^{-2\sigma_0}$  ということになる。数値的には表1の通りであるが、これを見ると、有効桁数がほぼ  $\sigma_0$  の値に等しいという興味深い結果に

表1. 相対近似誤差のオーダー  $e^{-2\sigma_0}$

$\sigma_0$	3	4	5	6
$e^{-2\sigma_0}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-4}$	$4.5 \times 10^{-5}$	$6.1 \times 10^{-6}$

なっている。

6 数値実験例 誤差の考察のための例題として、 $F(s) \equiv 1/(s^2+1)$  を採り上げる。このとき  $f(t) = \sin t$  であるから、式(25)から

(i)  $t$  が  $\pi/2$  の奇数倍のとき ( $f(3t) = \pm 1, f(5t) = \mp 1, \dots$ )

$$|f(t) - f_{ec}(t, \sigma_0)| = e^{-2\sigma_0} / (1 - e^{-2\sigma_0})$$

(ii)  $t$  が  $\pi$  の整数倍のとき ( $f(3t) = 0, f(5t) = 0, \dots$ )

$$|f(t) - f_{ec}(t, \sigma_0)| = 0$$

表2に  $\sigma_0 = 3$ , 打ち切り項数  $(13 + 0.4t)$ , Euler 変換項数  $p = 5$  の場合の結果を示す。打ち切り誤差の評価(式334)と

表2  $f^{-1}/(\delta^2 + 1)$ ,  $\sigma_0 = 3$ ,  $p = 5$

$t/(\pi/2)$	$f_{ec}^{kp}(t, \sigma_0)$	式(24)右辺	項数 $N$	$ f - f_{ec} $
1	1.002483	$2.37E-6$	13	$2.5E-3$
2	$-3.455E-6$	$5.11E-6$	13	0
3	1.002491	$8.68E-6$	13	$2.5E-3$
4	$-2.105E-6$	$3.20E-6$	15	0
5	1.002482	$4.69E-6$	15	$2.5E-3$
6	$-4.549E-6$	$6.81E-6$	15	0

近似誤差の評価(式534)が非常に良くなっていることがわかる。

## 7. 条件を満足しない場合

7.1  $\text{Re } s > 0$  に特異点をもつ場合 適当な正数  $a$  を選

ぶ  $G(s) \triangleq F(s+a)$  が  $\text{Re } s > 0$  で正則になるようにする。

これに対応して  $g_{ec}(t, \sigma_0)$  を本法で求め  $f_{ec}(t, \sigma_0) = e^{at} g_{ec}(t, \sigma_0)$  とすればよい。正数  $a$  はなるべく小さく選ぶのがよい。

例として  $F(s) = 1/(\delta^2 - 1)$  とする。  $a = 1$  とし、

$G(s) = 1/(\delta^2 + 2\delta)$  をうる。  $\sigma_0 = 5$ ,  $p = 5$ , 項数 13 で

$e^t g_{ec}^{kp}(t, \sigma_0)$  を求めた結果を表3に示す。このように、特



表3  $\delta^{-1}/(\delta^2-1)$ ,  $a=1$ ,  $\sigma_0=5$ ,  $p=5$ ,  $k=8$ 

$t$	$\sinh t$	$e^t g_{ec}^{kp}(t, \sigma_0)$	
1	1.1752	1.1751	相対誤差の評価
2	3.6269	3.6265	$e^{-2\sigma_0} = 4.5 \times 10^{-5}$
3	10.018	10.017	
4	27.290	27.287	

異性の条件は問題とならない。

7.2  $f(t)$  が超関数の場合 例えは,  $F(\delta) = \sqrt{\delta}$  とする

$$f(t) = d(u(t)/\sqrt{\pi t})/dt = \delta(t)/\sqrt{\pi t} - u(t)/(2\sqrt{\pi} t^{3/2})$$

となり ( $u(t)$  は単位段関数,  $\delta(t)$  は Dirac 関数)  $f(t)$  は超関

数である。これは,  $\lim_{|\delta| \rightarrow \infty} F(\delta) = 0$  の条件を満足せず、理

論的には本法の適用外である。所が、式(23)により強引に

計算した結果は表<sup>4</sup>の如くである。  $t > 0$  なる限り、普通の場合

と同じように適用できることがわかる。これは、 $F(\delta)$  が

表4  $\delta^{-1}\sqrt{\delta}$ ,  $\sigma_0=5$ ,  $p=5$ ,  $k=2(\delta+0.2t)$ 

$t$	$1/(2\sqrt{\pi} t^{3/2})$	$f_{ec}^{kp}(t, \sigma_0)$	式(24)右辺
1	.28212	.28209	$-4.3E-5$
2	.099743	.099735	$-1.5E-5$
3	.054293	.054289	$-8.4E-6$
4	.035265	.035261	$-5.4E-6$
5	.025232	.025231	$-2.4E-6$

解析関数であることと、Euler変換の性質から正さげることが出来る。注意としては、Euler変換の項数を $F(s)$ の次数よりなるべく大きくとることである。 $F(s) = \sqrt{s}$  という場合は従来の方法では全く不可能と思われ、本法の適用範囲の広さが理解できる。

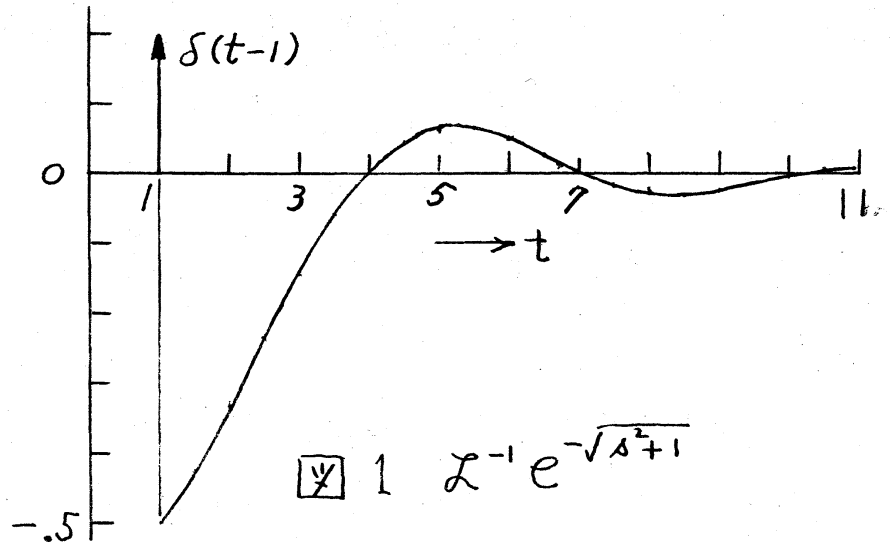
### 7.3 $F_n$ の符号が交代しない場合

例1  $F(s) = e^{-\sqrt{s}}$  :  $F_n$ の符号はランダムに変わるが、 $\sum F_n$ が絶対収束するので、交代級数に対するプログラムをそのまま用いて良い結果がえられる。数値例を表5に示す

表5  $s^{-1} e^{-\sqrt{s}}$ ,  $\sigma_0 = 5$ ,  $p = 5$ ,  $k = 2(4 + 0.2t)$

$t$	$(2\sqrt{\pi} t^{3/2} e^{1/4t})^{-1}$	$f_{ec}^{kp}(t, \sigma_0)$	式(24)右辺
1	.2197	.2196	1.2 E-4
2	.08802	.08805	-5.1 E-5
3	.04995	.04998	-5.6 E-5
4	.03313	.03315	-4.6 E-5
5	.02400	.02401	-1.5 E-5

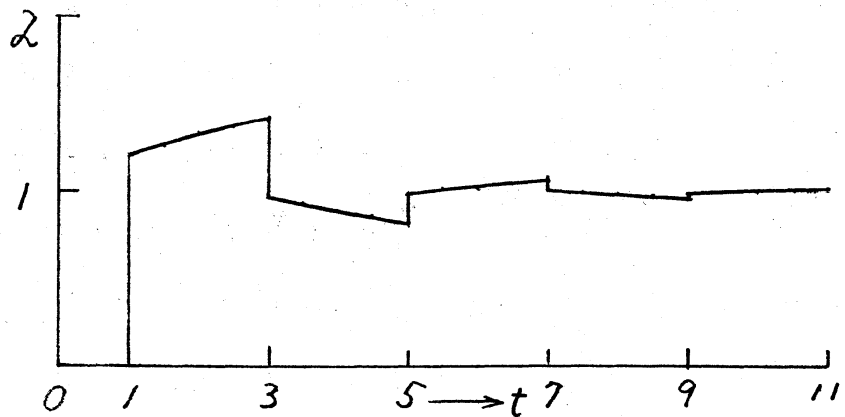
例2  $F(s) = e^{-\sqrt{s^2+1}}$  : 導波管やプラズマ中の波動伝播で現われる式である。直接本法を適用すると打ち切り誤差が極めて大きい。時間軸を1単位づらして  $G(s) = e^{s - \sqrt{s^2+1}}$  によって本法を適用すれば良好な結果をうる。 $G(s)$ は交代条件を満足する。計算例を図1に示す。



例3  $F(s) = (s \cosh \sqrt{s^2+1})^{-1}$ : 有限長  $L, C, R$  伝送線路のステップ応答に現われる式である。このまゝでは具合が悪いが

$$F(s) = 2 \left( \frac{e^{-k}}{s} - \frac{e^{-3k}}{s} + \frac{e^{-5k}}{s} - \dots \right), \quad k \triangleq \sqrt{s^2+1}$$

と展開し、例2にならって各項を別々に逆変換する。たとえ



□ 2  $\mathcal{L}^{-1} (s \cosh \sqrt{s^2+1})^{-1}$

は次の項は時間軸を5単位づらせて  $e^{5(\delta-k)}$  /  $\delta$  に本法を適用する。計算結果を図2に示す。

8 斉次連立微分方程式 外力を受けない線形システムの微分方程式 ( $A$  は定数行列,  $x_0$  は定数ベクトル)

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (26)$$

を本法で解くには式(13)の  $I_m F$  の代わりに

$$I_m Z_n \triangleq [(\sigma \mathbf{1} - A)^2 + \omega_n^2 \mathbf{1}]^{-1} x_0 \quad (27)$$

$$\sigma \triangleq \sigma_0/t, \quad \omega_n \triangleq (n-0.5)\pi/t$$

を用いたベクトル

$$\{ x_{ec}(t, \sigma_0) \triangleq \frac{e^{\sigma_0 t}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_m Z_n \quad (28)$$

を計算すればよい。これは BASIC の MAT 命令で効率的に実行できる。

9. 公式の系39  $\delta$  に指数関数の近似式を6示した。 $\delta$  の近似を使うかにより、公式も変わってくる。以下公式だけを示すと、表2式(7)に対応して

$$f_{ec}(t, \sigma_0) = f(t) + e^{-2\sigma_0 t} f(3t) + e^{-4\sigma_0 t} f(5t) + \dots \quad (29)$$

$$= \frac{e^{\sigma_0 t}}{t} \left[ \frac{1}{2} F\left(\frac{\sigma_0}{t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Re} F\left(\frac{\sigma_0 + in\pi}{t}\right) \right] \quad (39)$$

式(39)は Dubner et al. [ ] に出ているが、彼らはこの式に Euler 変換を使うことに気付かなかった。式(6)に対し

$$\begin{aligned} f_{cc}(\sigma_0, t) &= f(t) - e^{-2\sigma_0 t} [f(3t) - f(t)] + e^{-4\sigma_0 t} [f(5t) - f(3t)] - \dots \\ &= \frac{2 \cosh \sigma_0 t}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n F\left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)\pi}{t}\right) \quad (40) \end{aligned}$$

その他も大同小異である。

式(12)と(29)より

$$[f_{cc}(t, \sigma_0) + f_{co}(t, \sigma_0)]/2 = f(t) + e^{-\sigma_0 t} f(3t) + \dots \quad (41)$$

となるから、式(13)と(39)を使えば近似誤差が  $e^{-\sigma_0 t}$  の程度となる。この公式は特に高精度の結果が欲しいとき有用である。

10 むすび コンピュータの利用に適した新しい数値 Laplace 逆変換について原理、実施法、誤差解析、有用性について述べる。本法は大型コンピュータは勿論、マイクロ・コンピュータやポケット・コンピュータで実用的な問題が解ける(本文の例題はすべてポケット・コンピュータ SHARP-1211 で計算した)ので、適用範囲の広さとあわせて、理学、工学の各分野で利用できるのではなかろうか。

## 文献

- Bellman, R., Karaba, R., and Lockett, J. [1966]. Numerical Inversion of the Laplace Transform. American Elsevier, New York.
- Dubner, R. and Abate, J. [1968]. Numerical Inversion of Laplace Transform by Relating them to the Finite Fourier Cosine Transform, JACM, vol. 15, no. 1, pp. 115~123
- Bromwich, T. J. [1947]. An Introduction to the Theory of Infinite Series, 2d ed. The Macmillan Company, New York.
- 細野 [1979] 数値ラプラス変換, 電気学会論文誌, vol. 99, -A, no. 10, pp. 494~500
- Hosono, T. [1980]. Numerical Inversion of Laplace Transform and Some Applications to Wave Optics, International U.R.S.I. - Symposium 1980, 112 C/1~4