数理解析研究所講究録
第 424 巻 1981 年 53-59

相対不変式とYoung図形

筑波大 数学系　木村達雄

§1. 一般論

G = reductive な代数群,(即ち G の任意の表現は既約表現の直和), V = 有限次元ベクトル空間, $\rho: G \to GL(V)$ を有理表現とし,すべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているとする。

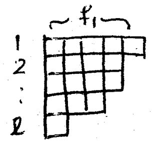
V 上の斉次多項式 $f(x)$ が,(G, ρ, V) の相対不変式であるとは,G の有理指標 $\chi: G \to \mathbb{C}^\times$ があって $f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x)$ $(x \in V, g \in G)$ が成り立つことである。本論の目的は,この相対不変式を構成する原理,及び実例を与える事である。

$S^r(V)$ = V 上の r 次斉次多項式全体,とすると群 G は $(\rho^{(r)}(g)\varphi)(x) = \varphi(\rho(g)^{-1}x)$ により(但し $\varphi \in S^r(V)$), $S^r(V)$ に作用する。ところが G は reductive ゆえ $\rho^{(r)}$ は既約表現の直和 $\rho^{(r)} = \bigoplus_i \rho_i^{(r)}$ に分解する。対応する $S^r(V)$ の分解を $S^r(V) = \bigoplus_i W_i^{(r)}$ とする。然らば,$f(x)$ が r 次の相対不変式である事と $f(x) \in {}^\exists W_i^{(r)}$ s.t. $\dim W_i^{(r)} = 1$ は同値である。

さて $\rho_i^{(r)}$ が $\rho_j^{(r_1)}\times\rho_k^{(r_2)}$ $(r_1+r_2=r)$ と分解する（記号で $\rho_i^{(r)}\sim\rho_j^{(r_1)}\times\rho_k^{(r_2)}$）とは，$\rho_i^{(r)}$ が $\rho_j^{(r_1)}$ と $\rho_k^{(r_2)}$ の symmetric tensor $S(\rho_j^{(r_1)}\otimes\rho_k^{(r_2)})$ の既約成分の一つである事とする。従って，この場合 $\varphi\in W_i^{(r)}$ は $\varphi=\sum_t \psi_t\theta_t$ $(\psi_t\in W_j^{(r_1)},\ \theta_t\in W_k^{(r_2)})$ と表わせる事を意味する。この表現の分解によって，相対不変式を構成しようというのである。特に $G=GL(n,\mathbb{C})$ の場合は，その既約表現とYoung図形(§2)が1対1に対応するから，この意味でYoung図形の分解，を定義する。

§2. Young図形

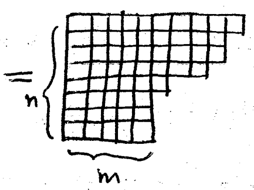
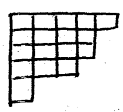
以下 $G=GL(n,\mathbb{C})$ とする。Y を次の様な図の集合とする。

$Y=\{$  $;\ l<n,\ 0\le f_l\le\cdots\le f_1\}$

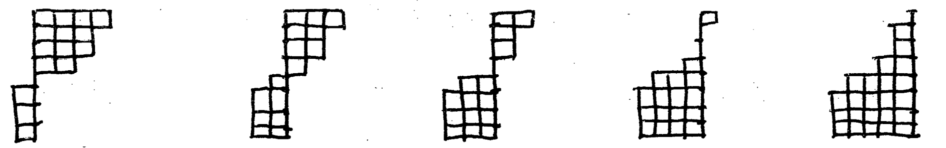
然らば，G の既約表現 ρ に対し唯1の整数 m が定まって $\tilde{\rho}(g)=(\det g)^{-m}\cdot\rho(g)$ $(g\in G)$ が Y の1つの図形と対応する。

そのとき $\tilde{\rho}$ に対応する図形を Y_1 とし，ρ に Y_2 を対応させる。

$m>0$ の場合

$Y_2=$  但し $Y_1=$ 

$m<0$ の場合は次のようにする。

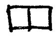


(m=−1)　(m=−2)　(m=−3)　(m=−4)　(m=−5)　etc.

これにより $G=GL(n,\mathbb{C})$ の既約表現と（上で一般化した）Young 図形が1対1に対応する。

（例1）  $\}\, l\,(\leq n)$ 　これは $V=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_l\leq n}\mathbb{C}\,u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_l}$ 上に自然にひきおこされる $G=GL(n,\mathbb{C})$ の表現に対応する。

（例2）  　これは $V=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})=\{X\in M_n(\mathbb{C})\,;\ \mathrm{tr}X=0\}$ に $\rho(g)X=gXg^{-1}$ $(g\in G,\ X\in V)$ で作用する表現に対応する。従って $n-1\{$  は $\rho'(g)X=(\det g)gXg^{-1}$ に対応する。

（例3）  は $V=\mathrm{Sym}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{C})\,;\ {}^tX=X\}$ に $\rho(g)X=gX\,{}^tg$ $(g\in G,\ X\in V)$ で作用する表現に対応する。
 は $\rho'(g)X={}^tg^{-1}Xg^{-1}$ なる ρ' に対応し，$n-1\{$  は $\rho''(g)X=(\det g)^2\cdot{}^tg^{-1}Xg^{-1}$ なる ρ'' に対応する。

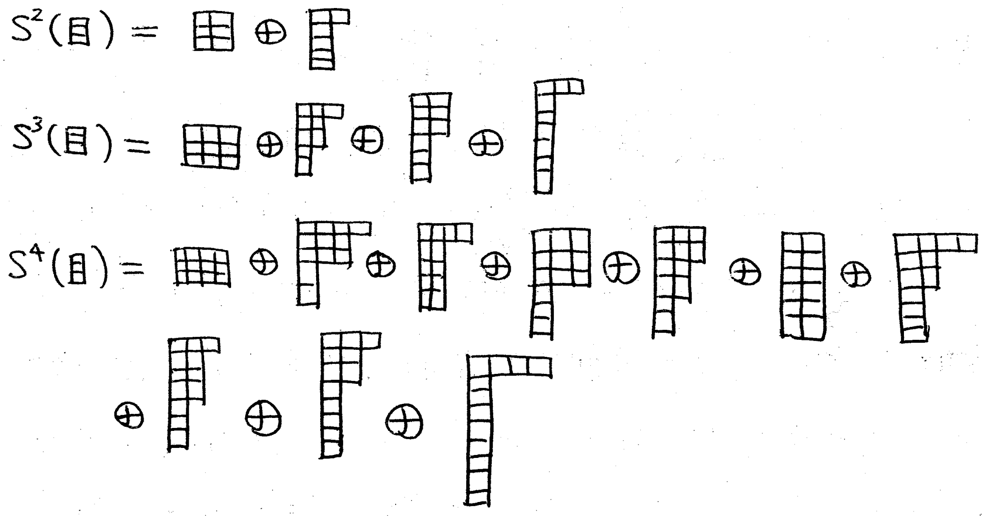
§3、佐藤幹夫先生の結果とその拡張

$(GL(6),\text{目},V(20))$, $(GL(7),\text{目},V(35))$, $(GL(8),\text{目},V(56))$ にはそれぞれ4次，7次，16次の相対不変式が存在する事は1960年頃，佐藤先生により確かめられ，その後も色々な人

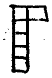
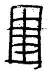
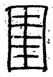
たちにより色々な方法でその次数は決定され，特に $G=GL(6)$ の場合は相対不変式の形についてもわかっている(佐藤幹夫，井草準一 etc.) 具体的な形といっても項数が多いので，色々な形で表わす可能性があるが，以下は佐藤先生が5,6年前に概均質ベクトル空間の短期共同研究の際，京大数研で話された内容である。 $V(20) \ni x = \sum_{1\leq i<j<k\leq 6} x_{ijk}\, u_i \wedge u_j \wedge u_k$ に対して $\textcircled{x} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial x}{\partial u_i}$ とおく。但し $y_1, \cdots, y_6$ は不定元である。然らば $x \wedge \textcircled{x} = \sum_{i,j=1}^{6} f_j^i(x)\, y_i\, v_j$，但し $v_j \wedge u_j = \omega\ (= u_1 \wedge \cdots \wedge u_6)$ と表わせて，$\varphi(x) = (f_j^i(x))$ とおくと，$\varphi(\rho(g)x) = (\det g)\, g\, \varphi(x)\, g^{-1}$ $(g \in GL(6,\mathbb{C}))$ が成り立つ。このとき $\mathrm{tr}\,\varphi(x) = 0$ が成り立つ。

実際 $f_i^i(x)\,\omega = x \wedge \frac{\partial x}{\partial u_i} \wedge u_i$ ゆえ Euler's identity により，$\mathrm{tr}\,\varphi(x)\cdot\omega = x \wedge \left(\sum_{i=1}^{6} u_i \wedge \frac{\partial x}{\partial u_i}\right) = x \wedge (3x) = 0$ となるから。

更に $\varphi(x)^2$ は non-zero な scalar 行列 $\varphi(x)^2 = f(x)\cdot I_6$ となり，$f(x)$ が $f(\rho(g)x) = (\det g)^2\cdot f(x)$ なる相対不変式である事がすぐわかる。($\varphi(x)^2$ が scalar 行列になる証明は $(GL(6), \Box, V(20))$ が概均質ベクトル空間である事を使えばすぐできる。) 佐藤先生は更に $GL(7)$ の場合でも，$x \wedge \textcircled{x} \wedge \textcircled{x} = \left(\sum_{i,j=1}^{7} f^{ij}(x)\, y_i y_j\right)\omega$ から得られる7次の対称行列 $\varphi(x) = (f^{ij}(x))$ が $\varphi(\rho(g)x) = (\det g)\, g\, \varphi(x)\, {}^t g$ $(g \in GL(7))$ と変化する事を示し，rank φ などが orbits の不変量として使えるだろうと述べられた。これ等の現象には根拠があり，それは次の事実に基づく。



（これらは S^r(目)の次元と右辺の次元を $n=1,2,\cdots$ と順に計算して比べていけば得られるが，$r=4$ で既にかなり面倒である。）

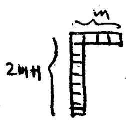
$n=6$ の場合，S^2(目)の表現の成分に  が表われるという事は $V(20)$ 上の２次多項式たちを要素とする $\mathrm{trace}=0$ の６次行列 $\varphi(x)$ で $\varphi(\rho(g)x)=\det g\cdot g\varphi(x)g^{-1}$ $(g\in GL(6))$ をみたすものが存在する事を意味する（§2，例(2)参照）。また，S^4(目) に  が表われる事は，４次の斉次多項式 $f(x)$ で $f(\rho(g)x)=(\det g)^2\cdot f(x)$ をみたすものの存在を意味している。$\varphi(x)^2=f(x)\cdot I_4$ は§1で述べた意味で  の分解  〜  ×  を表わしていると考えられる。更に $n=7$ の場合，S^4(目) に  が表われる事は，４次斉次多項式たちを要素とする７次対称行列 $\varphi^*(x)$ で $\varphi^*(\rho(g)x)=(\det g)^2\cdot {}^tg^{-1}\varphi^*(x)g^{-1}$ なるものの存在を意味している（§2の(例3)参照）。佐藤先生は $\mathrm{tr}\,\varphi(x)\varphi^*(x)$ が non-zero で，これが $(GL(7),$目$)$ の７次の相対不変式を与えると予想され

た。実際に $\varphi^*(x)$ は 分解  に基づいて次の様に構成できる。$x\wedge \textcircled{x} = \sum_{i,j,k} f^{i}_{jk}(x)\, y_i\, v_{jk}$, $v_{jk}\wedge u_j\wedge u_k = \omega\ (=u_1\wedge\cdots\wedge u_7)$ に対し，$\varphi^*_{ij}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k,l} f^{k}_{il}(x)\, f^{l}_{kj}(x)$, $\varphi^*(x) = (\varphi^*_{ij}(x))$ とおけばよい。このとき $\varphi(x)\varphi^*(x)$ は non-zero scalar 行列になり，$\varphi(x)\varphi^*(x) = f(x)\cdot I_7$ で相対不変式 $f(x)$ が得られる。(ここは筆者による)

これらの結果を次の様に一般の n について拡張しよう。

$V \ni x = \sum_{i<j<k} x_{ijk}\, u_i\wedge u_j\wedge u_k$, $\textcircled{x} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial x}{\partial u_i}$ と同様において

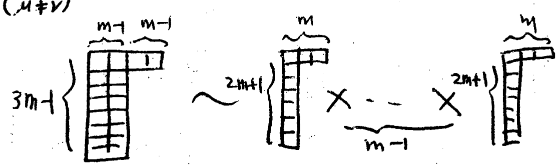
$$\underbrace{x\wedge\textcircled{x}\wedge\cdots\wedge\textcircled{x}}_{m} = \sum f^{i_1\cdots i_{m-1}}_{j_{2m+2}\cdots j_n}(x)\, y_{i_1}\cdots y_{i_{m-1}}\, v_{j_{2m+2}\cdots j_n},$$

$v_{j_{2m+2},\cdots,j_n}\wedge u_{j_{2m+2}}\wedge\cdots\wedge u_{j_n} = \omega\ (=u_1\wedge\cdots\wedge u_n)$ によって m 次の斉次多項式 $f^{i_1\cdots i_{m-1}}_{j_{2m+2}\cdots j_n}(x)$ を構成する。これらの多項式の存在は S^m(目) の既約分解に  が表われる事を意味する。

さて $n=3m$ $(m\geq 2)$ とし $m(m-1)$ 次の斉次多項式 $F^{i_1\cdots i_{m-1}}_{j_1\cdots j_{m-1}}(x)$ を

$$F^{i_1\cdots i_{m-1}}_{j_1\cdots j_{m-1}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\substack{i^{\mu}_{\nu}\\ (\mu\neq\nu)}} f^{i^1_1\cdots i^1_{m-1}}_{i^2_1\cdots i^{m-1}_1 j_1}\, f^{i^2_1\cdots i^2_{m-1}}_{i^1_2 i^3_2\cdots i^{m-1}_2 j_2}\cdots f^{i^{m-1}_1\cdots i^{m-1}_{m-1}}_{i^1_{m-1}\cdots i^{m-2}_{m-1} j_{m-1}}$$

とおくと

これは分解  に対応する。そして

☆ $f(x) = \sum_{\substack{i_1\cdots i_{m-1}\\ j_1\cdots j_{m-1}}} F^{i_1\cdots i_{m-1}}_{j_1\cdots j_{m-1}}(x)\cdot F^{j_1\cdots j_{m-1}}_{i_1\cdots i_{m-1}}(x)$ は $\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^{3m}$ 上の相対不変式を与える。即ち

Proposition 1. $(GL(3m), 目, \overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^{3m})$ は $2m(m-1)$ 次の相対不変式 $f(x)$ が存在し☆で与えられる。($m=2$ が $GL(6)$ に相当する.)

同様に(GL(6), 目, $\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^6$)の相対不変式の存在から(GL(7), 目, $\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^7$)の相対不変式を構成した方法は次の様に一般化される。

Proposition 2. (GL(2m), 目, $\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^{2m}$)が r 次の相対不変式をもてば $k=\frac{3r}{2m}\in\mathbb{Z}$ である。更に $k\equiv 0 \bmod (m-1)$ ならば(GL(2m+1), 目, $\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^{2m+1}$)は $r'=\frac{2m+1}{2m-2}r$ 次の相対不変式をもつ。
($m=3$, $r=4$, $r'=7$ がもとの場合である)

実は(GL(8), 目, $\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^8$)の16次の相対不変式も構成できる。これも次の様に一般化される。

Proposition 3. (GL(2m+1), 目, $\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^{2m+1}$)が r 次の相対不変式をもてば $k=\frac{r}{2m+1}\in\mathbb{Z}$ である。更に $k\equiv 0 \bmod (m-2)$ ならば(GL(2m+2), 目, $\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^{2m+2}$)は $r'=\frac{2(m^2-1)}{(2m+1)(m-2)}$ 次の相対不変式をもつ。
(GL(7), 目は7次の相対不変式をもつから, $m=3$, $r=7$ とすると $r'=16$ となり(GL(8), 目)が16次の相対不変式をもつ事がわかる。) 詳しい証明は[1]を参照のこと。

参考文献

[1] T. Kimura, Remark on some combinatorial construction of relative invariants, to appear

[2] H. Weyl, Classical Groups, Princeton Univ. Press 1964

[3] M. Sato & T. Kimura, A classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants, Nagoya Math. J、Vol 65 (1977), 1～155頁