数理解析研究所講究録
第424巻 1981年 90-98

Brauerの「selection of p-regular classes」の応用

熊本大 理 渡辺アツミ

Gを有限群, pを素数, KをGの任意の部分群に対して分解体となっている有限次代数数体とする. Kにおける(p)の素イデアル因子の一つを$\mathfrak{p}$とし, Kの$\mathfrak{p}$-整数の全体を$\mathfrak{o}$とする. また $\mathfrak{o}$の極大イデアルを$\mathfrak{p}$で表わすことにし, 剰余体$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$を$F$と置く.

$C_1, C_2, \cdots, C_k$ をGのp-regular classの全体とし, その代表元を $x_1, x_2, \cdots, x_k$ とする. なお, p-regular class C_νに対し, 群環$\mathfrak{o}G$, FGにおける元の和もC_νで表わす. また C_νの defect group, defect をそれぞれ$D(C_\nu)$, d_νで表わす. $\chi_1, \chi_2, \cdots \cdots \chi_h$ をGの通常既約指標の全体, $Bl(G)$をGのp-blockの全体とする, $Bl(G)=\{B_1, B_2, \cdots, B_t\}$. p-block B_τに対し, B_τの通常既約指標の個数をk_τ又は$k(B_\tau)$, B_τの modular 既約指標の個数をl_τ又は$l(B_\tau)$で表わす. E_τ, $\overline{E_\tau}$をそれぞれ$\mathfrak{o}G$, FGのB_τに対応する中心原始巾等元とする.

R. Brauer は [2] で次の事実を announce した。

$C_1, C_2, \cdots, C_k$ を次の 1), 2) を満たすように $B_1, B_2, \cdots, B_t$ に associate させることができる。

1) 各 p-regular class C_ν は one and only one B_τ に associate される。

2) 各 B_τ には l_τ 個の p-regular class が associate され，それらを $C_{\tau_1}, C_{\tau_2}, \cdots, C_{\tau_{l_\tau}}$ $(1 \leqq \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{l_\tau} \leqq k)$ とするとき，$(\chi_i(x_{\tau_\nu}))_{\substack{\chi_i \in B_\tau \\ 1 \leqq \nu \leqq l_\tau}}$ の p-rank は l_τ に等しい。

このことを selection of p-regular classes という。Brauer は [4] で上の事実の証明を与えているが，さらにそのとき，B_τ に対応する Cartan matrix の単因子が p^{d_ν} $(\nu = 1, 2, \cdots, l_\tau)$ に等しいことを示している。上の 2) について，M. Osima は [12] において，2) は次の 2') でおきかえてよいことを示した。

2') 各 B_τ には l_τ 個の p-regular class が associate され，それらを $C_{\tau_1}, C_{\tau_2}, \cdots, C_{\tau_{l_\tau}}$ $(1 \leqq \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{l_\tau} \leqq k)$ とするとき，$C_{\tau_\nu} E_\tau$ $(\nu = 1, 2, \cdots, l_\tau)$ は一次独立である。

一般の conjugacy class を block に associate させることについても，Brauer は [3] で言及し，[5] で証明をしている。このことに関して K. Iizuka [7], [8], K. Iizuka - Y. Ito [9], M. Broué [6], J. B. Olsson [11] 等で取り扱われて

いる．いずれも，M. Osima [12] の方法及びそれを一般の conjugacy class へ拡張した K. Iizuka の方法によって研究されていると言える．

ここでは selection of p-regular classes 及びその応用について述べる．

Q を G の p-部分群とし，$m(B_\tau, Q)$ を一つの selection of p-regular classes において B_τ に associate された p-regular class のうち defect group が Q であるものの個数とする．$m(B_\tau, Q)$ は selection に無関係に一意的に決まる．実際 $X(Q)$ を $\{C_\nu \mid 1 \leqq \nu \leqq r,\ D(C_\nu) \underset{G}{=} Q\}$ で張られる FG の中心 $Z(FG)$ の部分空間とし，

$$V(Q) = \sum_{P<Q} X(P) \quad , \quad \tilde{V}(Q) = \sum_{S \leqq Q} X(S)$$

とおくとき，

(1) $$m(B_\tau, Q) = \dim_F (V(Q)\bar{E}_\tau / \tilde{V}(Q)\bar{E}_\tau).$$

特に $Q \triangleleft G$ のとき

(2) $$m(B_\tau, Q) = \dim_F (X(Q)\bar{E}_\tau)$$

$Bl(N(Q), B_\tau)$ を Brauer hommomorphism で B_τ に associate される $N(Q)$ の p-block の全体とするとき，

(3) $$m(B_\tau, Q) = \sum_{b \in Bl(N(Q), B_\tau)} m(b, Q) \quad .$$

$P_1, P_2, \cdots, P_s$ を G の p-部分群の共役類の代表系とする．

(4) $$l_\tau = \sum_{j=1}^{s} m(B_\tau, P_j) .$$

命題　π を G の p-element とする．$\mathcal{S}_j = \{ P_j^x \cap C(\pi) \mid P_j^x \ni \pi, x \in G \}$ とおき，$\mathcal{S}_j$ の maximal member の全体を $\mathcal{S}_j^{(0)}$ で表わす．B を G の p-block，B の defect group を D とする．$C_G(\pi) = C(\pi)$ の p-subgroup Q に対して次の不等式が成立する．

(5) $$\sum_{\substack{j \\ \mathcal{S}_j^{(0)} \ni Q}} m(B, P_j) \leqq \sum_{b \in Bl(C(\pi), B)} m(b, Q) ,$$

(6) $$\sum_{\substack{j \\ \mathcal{S}_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \subseteq_G D}} m(B, P_j) \leqq \sum_{\substack{b \in Bl(C(\pi), B) \\ D(b) \supseteq_{C(\pi)} Q}} m(b, Q) ,$$

但し $Bl(C(\pi), B)$ は $Z(FG)$ から $Z(FC(\pi))$ への Brauer homomorphism により B に associate される $C(\pi)$ の p-block の全体を，$D(b)$ は b の defect group を表わす．

証明　$\pi \in Q$ としてよい．従って $QC_G(Q) \subset C(\pi) \cap N_G(Q) \subset N_G(Q)$．$H = C(\pi) \cap N_G(Q)$ とおき，φ を $Z(FG)$ から $Z(FH)$ への Brauer homomorphism とする．E を B に対応する $Z(\mathfrak{o}G)$ の原始巾等元とし，$\varphi(\bar{E}) = e_1 + e_2 + \cdots$ を $\varphi(\bar{E})$ の $Z(FH)$ における原始巾等元分解とする．また e_σ に対応する H の p-block を b_σ とする．(5) を証明する．$V = \sum_{\substack{j \\ \mathcal{S}_j^{(0)} \ni Q}} V(P_j)$ とおく．

$$\dim_{\bar{F}} (\varphi(V\bar{E})) = \sum_{\substack{j \\ \mathfrak{f}_j^{(0)} \ni Q}} m(B, P_j)$$

が成立することがわかる．また $\mathfrak{f}_j$ 及び $\mathfrak{f}_j^{(0)}$ の定義より，$\varphi(V)$ は defect group が Q であるような H の p-regular class の class sum の $\bar{F}$ー一次結合の全体 $\tilde{X}(Q)$ に含まれることがわかる．従って $\varphi(V\bar{E}) \subseteq \sum_{\sigma} \varphi(V) e_{\sigma} \subset \sum_{\sigma} \tilde{X}(Q) e_{\sigma}$．(2) より

$$\sum_{\substack{j \\ \mathfrak{f}_j^{(0)} \ni Q}} m(B, P_j) \leqq \sum_{\sigma} m(b_{\sigma}, Q).$$

$(b_{\sigma}^{C(\pi)})^G = b_{\sigma}^G = B$ であることに注意し，$C(\pi)$ と $b_{\sigma}^{C(\pi)}$ に (3) を適用することにより (5) が得られる．(6) を証明する．$V' = \sum_{\substack{j \\ \mathfrak{f}_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \subsetneqq D}} V(P_j)$ とおく．$\dim_{\bar{F}} (\varphi(V'\bar{E})) = \sum_{\substack{j \\ \mathfrak{f}_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \subsetneqq D}} m(B, P_j)$ を示すことができる．

$D(b_{\sigma}) = Q$ であれば，$\tilde{X}(Q) e_{\sigma} = \bar{F} e_{\sigma}$．$V'\bar{E}$ の，したがって $\varphi(V'\bar{E})$ の各元は nilpotent であるから $\varphi(V') e_{\sigma} = \{0\}$．故に $\varphi(V'\bar{E}) \subset \sum_{\substack{\sigma \\ D(b_{\sigma}) \neq Q}} \varphi(V') e_{\sigma} \subset \sum_{\substack{\sigma \\ D(b_{\sigma}) \neq Q}} \tilde{X}(Q) e_{\sigma}$．$D(b_{\sigma}) \neq Q$ ならば，$D(b_{\sigma}^{C(\pi)}) \underset{C(\pi)}{\neq} Q$ であるから，(5) と同様にして (6) を得る．

以下系4まで命題の記号の下に述べる．命題からただちに次の系1が得られる．

系1　$\pi \in Q$ のとき

(7) $$m(B,Q) \leqq \sum_{b \in Bl(C(\pi),B)} m(b,Q).$$

さらに $Q \underset{G}{\subsetneqq} D$ のときは

(8) $$m(B,Q) \leqq \sum_{\substack{b \in Bl(C(\pi),B) \\ D(b) \underset{C(\pi)}{\ni} Q}} m(b,Q).$$

注意　(7) は M. Fujii も証明している．(8) は M. Fujii [10], Theorem の一般化である．

系2　n_j を $\mathfrak{f}_j^{(0)}$ に $C(\pi)$ の元を共役により作用させたときの orbit の個数とする．このとき

(9) $$\sum_{j=1}^{\hat{s}} m(B,P_j)n_j \leqq \sum_{b \in Bl(C(\pi),B)} l(b),$$

(10) $$\sum_{\substack{j \\ P_j \underset{G}{\subsetneqq} D}} m(B,P_j)\,n_j \leqq \sum_{b \in Bl(C(\pi),B)} (l(b)-1).$$

証明　$Q_1, Q_2, \cdots, Q_{s'}$ を $C(\pi)$ の p-subgroup の共役類の代表系とする．(5) 及び (4) より

$$\sum_{k=1}^{\hat{s}'} \sum_{\substack{j \\ \mathfrak{f}_j^{(0)} \ni Q_k}} m(B,P_j) \leqq \sum_{k=1}^{\hat{s}'} \sum_{b \in Bl(C(\pi),B)} m(b,Q_k) = \sum_{b \in Bl(C(\pi),B)} l(b).$$

左辺は $\sum_{j=1}^{\hat{s}} m(B,P_j)n_j$ に一致する．故に (9) が得られる．

$m(b,D(b))=1$ と (6) 及び (4) より

$$\sum_{k=1}^{s'} \sum_{\substack{j \\ \mathfrak{I}_j^{(0)} \ni Q_k \\ P_j \underset{G}{\subsetneqq} D}} m(B,P_j) \leqq \sum_{k=1}^{s'} \sum_{\substack{b \in Bl(C(\pi),B) \\ D(b) \underset{C(\pi)}{\gtrsim} Q_k}} m(b,Q_k) = \sum_{b \in Bl(C(\pi),B)} (l(b)-1) .$$

左辺は $\sum_{\substack{j \\ P_j \underset{G}{\subsetneqq} D}} m(B,P_j)\, n_j$ に一致する．故に (10) が得られる．

系3　D は abelian と仮定する．m_j を P_j の元の $N_G(P_j)$−共役類の個数，s_B を B に associate される subsection の共役類の個数とする．このとき

$$(11) \qquad k(B) \geqq \sum_{\substack{j \\ P_j \underset{G}{\subsetneqq} D}} m(B,P_j)\, m_j + s_B .$$

証明　$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k, \cdots$ を G の p-element の conjugacy class の代表系とする．命題における π として π_k を取ったときの $\mathfrak{I}_j, \mathfrak{I}_j^{(0)}$, n_j をそれぞれ $\mathfrak{I}_{jk}, \mathfrak{I}_{jk}^{(0)}, n_{jk}$ と書く．系2より

$$(12) \qquad \sum_{k} \sum_{\substack{j \\ P_j \underset{G}{\subsetneqq} D}} m(B,P_j)\, n_{jk} \leqq \sum_{k} \sum_{b \in Bl(C(\pi),B)} (l(b)-1) = k(B) - s_B .$$

$P_j \underset{G}{\subsetneqq} D$ なる P_j に対して P_j は abelian であるから任意の k に対して $\mathfrak{I}_{jk}^{(0)} = \mathfrak{I}_{jk} = \{P_j^x \mid P_j^x \ni \pi_k,\ x \in G\} = \{P_j^x \mid P_j \ni \pi_k^{x^{-1}},\ x \in G\}$ となる．明らかに n_{jk} と $\{\pi_k^{x^{-1}} \mid \pi_k^{x^{-1}} \in P_j,\ x \in G\}$ の元の $N_G(P_j)$−共役類の個数は一致する．従って (12) の左辺は $\sum_{\substack{j \\ P_j \underset{G}{\subsetneqq} D}} m(B,P_j)\, m_j$ と一致する．以上より系3が得られる．

G_p を G の p-element の全体とする．G_p の二元 x, y はそれらにより生成される群 $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ が G の元で共役であるとき，

同値であるとする．そのときの同値類の代表系を $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_w$ とし，命題及び系 2 の π として π_k を取ったときの n_j を n_{jk} で表わすことにする．

系 4　B の通常既約指標の p-conjugate character の family の個数を f_B とする．このとき

(13)
$$f_B \geqq \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{w} n_{jk}\, m(B, P_j).$$

特に p^e を D の exponent, p^{e_j} を P_j の exponent とおけば

(14)
$$f_B \geqq \ell(B) + \sum_{j=1}^{s} e_j m(B, P_j) \geqq \ell(B) + e.$$

証明　(7) より各 k ($k = 1, 2, \cdots, w$) に対して

$$\sum_{j=1}^{s} m(B, P_j)\, n_{jk} \leqq \sum_{b \in Bl(C(\pi_k), B)} \ell(b).$$

一般分解定数の行列に permutation lemma ([1, §6]) を適用することにより，π_k の取り方から，少なくとも $\sum_{k=1}^{w} \sum_{b \in Bl(C(\pi_k), B)} \ell(b)$ 個の p-conjugate character の family がある．故に (13) が得られる．
明らかに $\sum_{k=1}^{w} n_{jk} \geqq e_j + 1$ である．故に (4) 及び (13) より

$$f_B \geqq \sum_{j=1}^{s} (e_j + 1)\, m(B, P_j) = \ell(B) + \sum_{j=1}^{s} e_j m(B, P_j).$$

$m(B, D) = 1$ であるから (14) が得られる．

注意　(14) は R. Brauer [1, Theorem 8] の一般化である．

文　献

[1] R. Brauer: On the connection between the ordinary and modular characters of groups of finite order, Ann. of Math., 42(1941), 926-935.

[2] ――――――: On the arithmetic in a group ring, Proc. Nat. Acad. Sci., 30(1944), 109-114.

[3] ――――――: On blocks of characters of groups of finite order, I, Proc. Nat. Acad., 32(1946), 182-186.

[4] ――――――: Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, Math. Zeit., 63(1956), 406-444.

[5] ――――――: Defect groups in the theory of representations of finite groups, Illinois J. Math., 13(1968), 53-73.

[6] M. Broué: Brauer coefficients of p-subgroups associated with a p-block of a finite group, J. of Alg., 56(1979), 365- 383.

[7] K. Iizuka: Note on blocks of group characters, Kumamoto J. of Sci. Ser. A, 2(1956), 309-321.

[8] ―――――― : A note on blocks of characters of a finite group, J. of Alg., 20(1972), 196-201.

[9] K. Iizuka - Y. Ito: A note on blocks and defect groups of a finite group, Kumamoto J. Sci.(Math.), 9(1972), 25-32.

[10] M Fujii: On determinants of Cartan matrices of p-blocks, Proc. Japan Acad., 56(1980), 401-404.

[11] J. B. Olsson: Lower defect groups, Com. in Alg., 8(3)(1980), 261- 288.

[12] M. Osima: Notes on blocks of group characters, Math. J. Okayama Univ., 4(1955), 175-188.