数理解析研究所講究録
第 426 巻 1981 年 30-43

無限次元回転群の表現について

広島大 理学部　　櫻井孝俊

1. 無限次元回転群 G のクラス 1 の既約ユニタリ表現に対して、McKean予想（[2]）が正しいことを示すことが、目的である。

H を実（又は複素）可分ヒルベルト空間とし、その正規直交基底を $\{\xi_j ; j=1,2,\cdots\}$ とする。この基底により代数的に張られる空間を E とし、最初の m 個 $\{\xi_1,\cdots,\xi_m\}$ により張られる空間を E_m とおくと、$E=\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ となる。故に E は核型空間である。H の等長写像で、有限個の j をのぞいて ξ_j を固定するもの全体からなる群を G とし、その部分群 G_m を $\{ g\in G ; g\xi_j=\xi_j,\ j=m+1,m+2,\cdots\}$ とおくと、$G=\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$ を得る。G は位相群である。$g\in G$ に対し $g\xi_j=\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\xi_i$ $(j=1,\cdots,m)$ とおくことにより g を $O(m)$（又は $U(m)$）の元 (g_{ij}) と同一視する。以下の議論は、この同一視のもとに行なわれる。

E^* を E の双対空間とすれば、

$$E^* \subset H \subset E$$

を得る。位相は右に行く程、弱くなっているものとする。

$\xi \in E$ に対し、$e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}$ は正定値ゆえ、Bochner-Minlos の定理([1])により E^* 上の確率測度 μ が存在し、

$$e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} = \int_{E^*} e^{\sqrt{-1}\langle x, \xi \rangle} d\mu(x) \qquad (x \in E^*)$$

と表わすことができる。明らかに μ は G 不変である。そこで、$f \in L^2(E^*, \mu)$ と $g \in G$ に対し、G のユニタリ表現を、

$$(\pi_*(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad a.e.\ x \in E^*$$

により定義する。

G_m のリー環を $\mathfrak{g}_m$ とし、その展開環を $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)$ とする。E_{ij} を (i,j) 成分だけが 1 で他の成分はすべて 0 である $m \times m$ 行列とし、$X_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $Y_{ij} = \sqrt{-1}(E_{ij} + E_{ji})$, $Y_{ii} = \sqrt{-1}\,E_{ii}$ とおく。$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)$ の元であるカシミール作用素を C_m とすれば、C_m は、H 及び E が実ベクトル空間、又は、複素ベクトル空間である場合に対し、それぞれ、

$$C_m = \frac{-1}{2(m-2)} \sum_{1 \le i < j \le m} X_{ij}^2 \qquad (O(m))$$

$$C_m = \frac{-1}{4m} \sum_{1 \le i < j \le m} (X_{ij}^2 + Y_{ij}^2) - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} Y_{ii}^2 \qquad (U(m))$$

と表わされる。

ξ_1 における G の等方部分群(即ち、$\{g \in G \,;\, g\xi_1 = \xi_1\}$)を K とする。以下の議論において、$(\pi, \mathfrak{H})$ と書けばいつでも G の既約ユニタリ表現を表わすことにする。

定義　$(\pi, \mathfrak{H})$がGのKに関するクラス１の表現とは，以下の(A.1)と(A.2)とを満足するときをいう。

(A.1)　$\pi(K)$不変ベクトル(即ち，$\pi(k)v=v$, $^{\forall}k\in K$)のなす空間の次元が１。

(A.2)　v_0を$\pi(K)$不変ベクトルとするとき，v_0は，$\pi(G_m)$有限であり，$\lim_{m\to\infty} d\pi(C_m)v_0$が存在する。(但し，$d\pi$は$G_m$の表現$\pi$の微分表現を表わす)

以下，クラス１の表現$(\pi, \mathfrak{H})$に関し，v_0で$\pi(K)$不変単位ベクトルを表わすことにする。このとき，G上の球関数ϕ_πを，

$$\phi_\pi(g)=(v_0, \pi(g)v_0)$$

で定義すれば次の命題１を得る。

命題１　$(\pi, \mathfrak{H})$, $(\pi', \mathfrak{H}')$をそれぞれクラス１の表現とする。このときπとπ'とが同値であるための必要十分条件は，$\phi_\pi=\phi_{\pi'}$である。

証明　πとπ'とが同値(以下$\pi\sim\pi'$と書く)ならば，$\mathfrak{H}$から$\mathfrak{H}'$上への等長写像Uで，任意の$g\in G$に対し，$\pi'(g)U=U\pi(g)$となるものが存在する。Uは，$\pi(K)$不変ベクトルを$\pi'(K)$不変ベクトルに移すゆえ，(A.1)より$\phi_\pi=\phi_{\pi'}$を得る。

逆に $\phi_\pi = \phi_{\pi'}$ ならば、U を

$$U\left(\sum_i c_i \pi(g_i) v_0\right) = \sum_i c_i \pi'(g_i) v_0'$$

と定義すれば、$v = \sum_i a_i \pi(g_i) v_0$, $w = \sum_j b_j \pi(h_j) v_0$ に対し、

$$(Uv, Uw) = (v, w)$$

となることが容易に分かる。$(\pi, \mathfrak{H})$, $(\pi', \mathfrak{H}')$ の既約性から U は $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}'$ 上への等長写像に拡張できる。このとき、$U\pi(g) = \pi'(g)U$ となる。（証明終）

さて、v_0 を含む $\pi(G_m)$ 不変部分空間を $\mathfrak{H}_m$ とし、$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}_m$ 上への正射影を P_m で表わすことにする。このとき、$D_{d\pi(C)}$ を、

$$D_{d\pi(C)} = \{ v \in \mathfrak{H} ; \lim_{m\to\infty} d\pi(C_m) P_m v \text{ が存在する} \}$$

とし、$v \in D_{d\pi(C)}$ に対し、$d\pi(C)$ を、

$$d\pi(C)v = \lim_{m\to\infty} d\pi(C_m) P_m v$$

で定義する。π の既約性から、$D_{d\pi(C)}$ は $\mathfrak{H}$ で稠密となる。$d\pi(C_m)$ は $\mathfrak{H}_m$ 上対称作用素ゆえ、$d\pi(C)$ は対称作用素である。$d\pi(C)$ の随伴作用素 $d\pi(C)^*$ の定義域の元を w とすれば、$u \in \mathfrak{H}$ が存在して、任意の $v \in D_{d\pi(C)}$ に対し、

$$(d\pi(C)v, w) = (v, u)$$

となる。任意の正整数 m 及び、任意の $v \in \mathfrak{H}_m$ に対し、

$$(d\pi(C)v, w) = (d\pi(C_m) P_m v, w) = (v, d\pi(C_m) P_m w)$$

一方

$$(v, u) = (v, P_m u)$$

ゆえ、

$$d\pi(C_m) P_m w = P_m u$$

となる。よって、

$$\lim_{m\to\infty} d\pi(C_m) P_m w = u$$

を得る。これは、wが$D_{d\pi(C)}$に含まれることを示している。故に$d\pi(C)$は自己随伴作用素である。

命題2　$(\pi, \mathfrak{H})$をGのクラス1の表現とすれば、

$$d\pi(C)\pi(g) = \pi(g)d\pi(C)。$$

証明は、直接、計算を行なうことにより容易に得られる。Schurの補題より、$d\pi(C)$は、スカラー作用素となる。そこで、そのスカラー値を$\chi_\pi(C)$と書くことにする。Iを$\mathfrak{H}$の恒等写像とすれば、$d\pi(C) = \chi_\pi(C) I$　となる。

2．この章では、HとEは、ともに実ベクトル空間とする。非負整数kに対し、エルミート多項式

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

を考える。このとき、$H_k(t)$が以下の等式を満足している

ことは容易に分かる。

$$H_k''(t)-2tH_k'(t)+2kH_k(t)=0$$

$$H_k'(t)=2kH_{k-1}(t)$$

$$H_k(c_1t_1+\cdots+c_\ell t_\ell)=k!\sum_{k_1+\cdots+k_\ell=k}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{c_j^{k_j}}{k_j!}H_{k_j}(t_j)$$

（但し、$c_1^2+\cdots+c_\ell^2=1$, $k_j\geqq 0$ とする）

さて、非負整数 n に対し、$\mathcal{B}_n$ を

$$\mathcal{B}_n=\left\{\left(\prod_{j=1}^{\infty}n_j!\,2^{n_j}\right)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{\infty}H_{n_j}\left(\frac{\langle x,\xi_j\rangle}{\sqrt{2}}\right);\ \sum_{j=1}^{\infty}n_j=n,\ \ n_j\geq 0\right\}$$

とおき、$\mathcal{H}_n$ を $\mathcal{B}_n$により張られる閉部分空間とすれば、$L^2(E^*,\mu)$ のWiener-Itô分解

$$L^2(E^*,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\mathcal{H}_n \qquad ([1])$$

を得る。各$\mathcal{H}_n$は、$\pi_*(G)$不変ゆえ、$(\pi_*,\ L^2(E^*,\mu))$の部分表現$(\pi_n,\mathcal{H}_n)$を得る。そこで、任意の正整数 i に対し、

$$\Phi_i^n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!\,2^n}}H_n\left(\frac{\langle x,\xi_i\rangle}{\sqrt{2}}\right) \qquad x\in E^*$$

とおく。このとき、Φ_1^nは、$\pi_n(K)$不変単位ベクトルである。

補題１　$\mathcal{H}_n$の任意の$\pi_n(K)$不変ベクトルvは、定数 c が存在して、$v=c\Phi_1^n$ となる。

証明　まず、Φ_1^nはπ_n の巡回ベクトルゆえ、$\mathcal{H}_n$の$\pi_n(G)$不変ベクトルは、$n\neq 0$ならば、0ベクトルにかぎることを、注意しておく。さて、vを任意の$\pi_n(K)$不変ベクトルとすれ

ば、vは、

$$v = \sum_{n_1+n_2+\cdots=n} C_{n_1 n_2 \cdots} \prod_j H_{n_j}\left(\frac{\langle x, \xi_j \rangle}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= f_0 + \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell \Phi_1^\ell$$

と表わすことができる。但し、各f_ℓは$\langle x, \xi_1 \rangle$を含まない。

明らかに、各f_ℓは、$\pi_n(K)$不変ベクトルゆえ、先の注意から、$f_0 = \cdots = f_{n-1} = 0$ となり、$v = C\,\Phi_1^n$ を得る。

（証明終）

補題２　$(\pi_n, \mathcal{H}_n)$は、既約ユニタリ表現である。

証明　Wを$\mathcal{H}_n$における任意の$\pi_n(G)$不変閉部分空間とし、P_Wを$\mathcal{H}_n$から、W上への正射影とすれば、任意の$k \in K$に対し、

$$P_W \Phi_1^n = P_W \pi_n(k) \Phi_1^n = \pi_n(k) P_W \Phi_1^n$$

を得る。故に補題１により、定数Cが存在して、

$$P_W \Phi_1^n = C\,\Phi_1^n$$

となる。Φ_1^nは巡回ベクトルゆえ、I_nを$\mathcal{H}_n$の恒等写像とすれば

$$P_W = C\,I_n$$

を得る。故に、$W = \{0\}$ 又は $W = \mathcal{H}_n$ となる。

（証明終）

命題３　$(\pi_n, \mathcal{H}_n)$はGのクラス１の表現である。

証明　(A.2)を示せばよい。明らかにΦ_1^nは、任意の正整数mに対し、$\pi_n(G_m)$有限である。次に、$x_i = \langle x, \xi_i \rangle$ とおくことにより、$\pi_n(G_m)\Phi_1^n$により張られる空間の元は全て、$x_1, \cdots, x_m$の関数と見なすことができる。特に、Φ_1^nはx_1だけの関数ゆえ、

$$d\pi_n(C_m)\Phi_1^n = \frac{-1}{2(m-2)}\left\{\left(\sum_{j=2}^{m} x_j^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (m-2)x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}\Phi_1^n$$

となる。ここで、大数の強法則

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\langle x, \xi_j\rangle^2 = 1 \qquad a.e.\ x \in E^*$$

を用いると、

$$\lim_{m\to\infty} d\pi_n(C_m)\Phi_1^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Phi_1^n$$
$$= \frac{n}{2}\Phi_1^n$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

命題４　$\phi_{\pi_n}(g) = \langle \xi_1, g\xi_1 \rangle^n \qquad g \in G$.

証明は、直接の計算により容易に得られる。

さて、Gのクラス１の表現$(\pi, \mathcal{H})$において、G_2の部分群Aを、

$$A = \{ g \in G_2 \ ; \ \det g = 1 \}$$

により定義しておくと、Gの Cartan分解 $G = KAK$ を得る。

$a_\theta \in A$ を

$$a_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくことにより、A を $SO(2)$ と同一視することにする。このとき、球関数 ϕ_π は、K 両側不変ゆえ、A 上の関数と見なすことができる。そこで、

$$F_\pi(\theta) = \phi_\pi(a_\theta)$$

により、A 上の関数 F_π を定義しておく。

定理 1　$(\pi, \mathfrak{H})$ をGのクラス1の表現とする。このとき、$2\chi_\pi(C)$ は非負整数であり、$(\pi, \mathfrak{H}) \sim (\pi_n, \mathcal{H}_n)$ となる。(但し、$n = 2\chi_\pi(C)$ である。)

証明

$$\chi_\pi(C) F_\pi(\theta) = (v_0 , \pi(a_\theta) d\pi(C) v_0)$$
$$= \lim_{m\to\infty} (v_0, \pi(a_\theta) d\pi(C_m) v_0)$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{-1}{2(m-2)} \sum_{j=2}^{m} (v_0, \pi(a_\theta) d\pi(X_{1j}^2) v_0)$$

ここで、

$$Ad(a_\theta)^{-1} X_{2j} = \cos\theta\, X_{2j} - \sin\theta\, X_{1j} \quad (j = 3, \cdots, m)$$

$$[Ad(a_\theta)^{-1} X_{2j} \ , \ X_{2j}] = \sin\theta\, X_{12} \quad (j = 3, \cdots, m)$$

であることに注意すれば、

$$X_{1j}^2 = \operatorname{cosec}^2\theta\,(\mathrm{Ad}(a_\theta)^{-1}X_{2j})^2 - \cot\theta\,\operatorname{cosec}\theta\{2(\mathrm{Ad}(a_\theta)^{-1}X_{2j} - \sin\theta\,X_{12}\} + \cot^2\theta\,X_{2j}^2 \qquad (j=3,\cdots,m)$$

を得る。よって

$$\chi_\pi(C)F_\pi(\,) = \lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2(m-2)}\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}F_\pi(\theta)+(m+2)\cot\theta\frac{d}{d\theta}F_\pi(\theta)\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}\cot\theta\frac{d}{d\theta}F_\pi(\theta)$$

となる。この微分方程式は、$F_\pi(0)=1$, $F_\pi\in C^\infty(A)$ に注意すれば、$2\chi_\pi(C)$ が非負整数であり、

$$F_\pi(\theta) = \cos^n\theta \qquad (n=2\chi_\pi(C))$$

なる解を持つことが分かる。

一方、命題4において、$g=ka_\theta k'$ ($k,k'\in K$, $a_\theta\in A$) とおくと、

$$\phi_{\pi_n}(g) = \cos^n\theta$$

となり、$\phi_\pi = \phi_{\pi_n}$ を得る。故に、命題1により、

$$(\pi,\mathfrak{H}) \sim (\pi_n,\mathcal{H}_n)$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

3. この章では、HとEは、ともに複素ベクトル空間とする。非負整数 p,q に対し、複素エルミート多項式

$$H_{p,q}(t,\bar{t}) = (-1)^{p+q}e^{t\bar{t}}\frac{\partial^{p+q}}{\partial\bar{t}^p\partial t^q}e^{-t\bar{t}} \quad .\ t\in\mathbb{C}$$

を考える。$H_{p,q}(t,\bar{t})$は、次の等式を満足している。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial \bar{t}} H_{p,q}(t,\bar{t}) - \bar{t}\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}} H_{p,q}(t,\bar{t}) + q H_{p,q}(t,\bar{t}) = 0 \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \bar{t}\,\partial t} H_{p,q}(t,\bar{t}) - t\dfrac{\partial}{\partial t} H_{p,q}(t,\bar{t}) + p H_{p,q}(t,\bar{t}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} H_{p,q}(t,\bar{t}) = p H_{p-1,q}(t,\bar{t}) \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{t}} H_{p,q}(t,\bar{t}) = q H_{p,q-1}(t,\bar{t}) \end{cases}$$

$$H_{p,q}\left(\sum_{j=1}^{\ell} a_j t_j\,,\ \sum_{j=1}^{\ell} \bar{a}_j \bar{t}_j\right) = p!\,q! \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_\ell=p \\ q_1+\cdots+q_\ell=q}} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{a_j^{p_j}\,\bar{a}_j^{q_j}}{p_j!\,q_j!} H_{p_j,q_j}(t_j,\bar{t}_j)$$

（但し、$\sum_{j=1}^{\ell} |a_j|^2 = 1$，$p_j \geq 0$，$q_j \geq 0$ とする。）

非負整数 p, q に対し、$\mathcal{B}_{p,q}$ を

$$\mathcal{B}_{p,q} = \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p_j!\,q_j!}} H_{p_j,q_j}(\langle z, \xi_j\rangle, \overline{\langle z, \xi_j\rangle})\ ;\ \sum_{j=1}^{\infty} p_j = p,\ \sum_{j=1}^{\infty} q_j = q,\ p_j \geq 0,\ q_j \geq 0 \right\}$$

とおき、$\mathcal{H}_{p,q}$ を $\mathcal{B}_{p,q}$ により張られる閉部分空間とすれば、$L^2(E^*, \mu)$ の Wiener-Itô 分解

$$L^2(E^*, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 0}} \oplus \mathcal{H}_{p,q} \qquad ([1])$$

を得る。$\mathcal{H}_{p,q}$ は、$\pi_*(G)$ 不変ゆえ、$(\pi_*, L^2(E^*, \mu))$ の部分表現 $(\pi_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ を得る。そこで、正整数 i に対して、

$$\Phi_i^{p,q}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{p!\,q!}} H_{p,q}(\langle z, \xi_i\rangle, \overline{\langle z, \xi_i\rangle}) \qquad z \in E^*$$

とおくと、$\Phi_1^{p,q}$ は $\pi_{p,q}(K)$ 不変単位ベクトルとなり、2章と同様に、以下の補題，命題を得る。

補題３　$\mathcal{H}_{p,q}$ の $\pi_{p,q}(K)$ 不変ベクトル v は、定数 C が存在して、$v = C\,\Phi_1^{p,q}$ となる。

補題４　$(\pi_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ は既約ユニタリ表現である。

命題５　$(\pi_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ は、G のクラス１の表現である。

証明　(A.2) を示せばよい。$z \in E^*$ に対し、$z_i = \langle z, \xi_i \rangle$ とおけば、$\pi_{p,q}(G_m)\Phi_1^{p,q}$ により張られる空間の元は、$z_1, \cdots, z_m, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m$ の関数と見なすことができる。特に、$\Phi_1^{p,q}$ は $z_1, \bar{z}_1$ だけの関数ゆえ、

$$d\pi_{p,q}(C_m)\Phi_1^{p,q} = \Big\{ \frac{1}{2}\Big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big) + \frac{1}{2m}\Big(z_1^2\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \bar{z}_1^2\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1^2}\Big) - \frac{1}{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}|z_j|^2\Big)\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} \Big\}\Phi_1^{p,q}$$

を得る。大数の強法則

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|\langle z, \xi_j \rangle|^2 = 1 \qquad \text{a.e. } z \in E^*$$

を用いることにより、

$$\lim_{m\to\infty} d\pi_{p,q}(C_m)\Phi_1^{p,q} = \frac{1}{2}\Big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - 2\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}\Big)\Phi_1^{p,q} = \frac{p+q}{2}\Phi_1^{p,q}$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

命題６　$\phi_{\pi_{p,q}}(g) = \langle \xi_1, g\xi_1 \rangle^p \overline{\langle \xi_1, g\xi_1 \rangle}^q \qquad g \in G$

さて、Gのクラス1の表現$(\pi, \mathfrak{H})$において、Gの部分群Tを、T = G で定義し、Aを、2章と同じにとると、GのCartan分解 $G=KTAK$ を得る。$t_\varphi \in T$ を

$$t_\varphi = (e^{\sqrt{-1}\varphi})$$

とおくことにより、TとU(1)とを同一視する。$\hat{T}$ をTの指標群とし、$\eta \in \hat{T}$ に対し、$\hat{T}$ から $\mathbb{Z}$ への同形写像αを、

$$\eta(t_\varphi) = e^{\sqrt{-1}\alpha(\eta)\varphi} \qquad (t_\varphi \in T)$$

により定義する。

$t_\varphi \in T$, $k \in K$ に対し、

$$\pi(k)\pi(t_\varphi)v_0 = \pi(t_\varphi)\pi(k)v_0$$
$$= \pi(t_\varphi)v_0$$

ゆえ、(A.1)より、定数 $\eta_\pi(t_\varphi)$ が存在して、$\pi(t_\varphi)v_0 = \eta_\pi(t_\varphi)v_0$ となる。明らかに、η_πはTの指標である。

定理2 $(\pi, \mathfrak{H})$をGのクラス1の表現とする。このとき、$2\chi_\pi(C)$ は非負整数であり、さらに $|\alpha(\eta_\pi)| \leqq 2\chi_\pi(C)$ ならば、$(\pi, \mathfrak{H}) \sim (\pi_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ となる。(但し、$p+q = 2\chi_\pi(C)$, $p-q = \alpha(\eta_\pi)$ である。)

証明 $g = k t_\varphi a_\theta k'$ ($k, k' \in K$, $t_\varphi \in T$, $a_\theta \in A$), $l = \alpha(\eta_\pi)$ とおくと、

$$\phi_\pi(g) = e^{-\sqrt{-1}\,l\varphi}\,\phi_\pi(a_\theta)$$

を得る。そこで、$F_\pi(\theta) = \phi_\pi(a_\theta)$ とおくと、又章の定理1と同様な計算を行なうことにより、$F_\pi(\theta)$ は微分方程式

$$\chi_\pi(C)\,F_\pi(\theta) = -\frac{1}{2}\cot\theta\,\frac{d}{d\theta}F_\pi(\theta)$$

を満足することが分かる。故に $2\chi_\pi(C)$ は非負整数であり、

$$\phi_\pi(g) = e^{-\sqrt{-1}\,l\varphi}\cos^n\theta \qquad (n = 2\chi_\pi(C))$$

を得る。さらに、$|\alpha(y_\pi)| \leqq 2\chi_\pi(C)$ ならば、$p+q = 2\chi_\pi(C)$, $p-q = \alpha(y_\pi)$ なる p, q が存在する。このとき、$(\pi_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ に対し、命題6より、球関数 $\phi_{\pi_{p,q}}$ は

$$\phi_{\pi_{p,q}}(g) = e^{-\sqrt{-1}(p-q)\varphi}\cos^{p+q}\theta$$

となる。故に命題1より $(\pi, \mathfrak{H}) \sim (\pi_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ を得る。

（証明終）

参考文献

[1] T. Hida, Brownian motion, Springer-Verlag (1980)

[2] H.P. McKean, Geometry of differential space, Ann. Probability (1973), 197-206

[3] H. Matshushima, K. Okamoto and T. Sakurai, On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group I, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 181-193