

実 rank 1 の半単純 Lie 群 G 上の

L^p -Fourier 解析

慶大・工 河添 健

実 rank 1 の半単純リー群 G 上の L^p -Fourier 解析を行なう。
すなわち G 上の P 乗可積分関数の Fourier 変換像の決定と
これに関連した幾つかの話題について述べる。

1. 記号 G を実 rank 1 の連結半単純リー群とし、その
中心は有限とする。 $G = KAN$ を岩沢分解, $P = MAN$ を極小
パラボリック部分群とする。また W により (G, A) に関するワイ
ル群を表わす。リー環はドイツ小文字を用いて表わし、任
意のベクトル空間 V に対し、 V_c, V^* をその複素化及び双対空
間とする。特に A のリー環 \mathfrak{a} の双対空間 \mathfrak{a}^* を \mathfrak{h} とし、その複素
化を \mathfrak{h}_c と省略して書く事にする。 Δ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$ のルートの
全体とし、 Δ^+ を N により決まるその正のルートの全体とす
る。 \mathfrak{a}^+ を Δ^+ により決まる正のワイル領域とし、 $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$ と
置く。以下 Δ^+ の唯一な reduced ルート α とし、 $H_0 \in \mathfrak{a}^+$ を
 $\lambda(H_0) = 1$ を満たす様にとる。 $\mathfrak{h}^+ = \{ \lambda + \mathfrak{h} : \lambda(H_0) > 0 \}$ とし、 \mathfrak{h}_c

の部分閉領域 $F(\varepsilon)$, $F_\delta^+(\varepsilon)$ ($\varepsilon, \delta > 0$) 及び積分路 F_δ ($\delta > 0$) を次の様に定める。

$$F(\varepsilon) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; | \operatorname{Im} \lambda(H_0) | \leq \varepsilon \rho(H_0) \}$$

$$F_\delta^+(\varepsilon) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; 0 \leq \operatorname{Im} \lambda(H_0) \leq \varepsilon \rho(H_0) \} \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda(H_0)| \leq \delta \}$$

$$F_\delta = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda(H_0)| \geq \delta \} \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda(H_0)| = \delta, \operatorname{Im} \lambda \leq 0 \}$$

ただし $\lambda = \operatorname{Re} \lambda + \sqrt{-1} \operatorname{Im} \lambda$ ($\operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Im} \lambda \in \mathbb{R}$), $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Delta^+} \beta$ であり, ε は $\varepsilon = \infty$ も許すものとあす。

2. τ -1) \mathbb{Z} 変換と逆変換 $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ を K の有限次元ヒルベルト空間 V 上の \mathbb{Z} -双対表現とあす。ここで V は Harish-Chandra [3, §8] の仮定を満すものとあす。この時 $\mathcal{C}(G, \tau)$ により G 上の V 値関数でも, τ , τ -spherical が急減少なものの全体を表わす。また $L_G = \mathcal{C}(G, \tau)$ によりそのカスゾ形式の全体, $\mathcal{C}_A(G, \tau)$ によりその wave packets の全体より成る閉部分空間を表わす。この時 $\mathcal{C}(G, \tau)$ は次の様に分解する事が知られてゐる。(see [3, §27])

$$(1) \quad \mathcal{C}(G, \tau) = \mathcal{C}^0(G, \tau) \oplus \mathcal{C}_A(G, \tau) \quad (\text{直和}).$$

$\tau_M \in \tau$ の M への制限とし, $L_M = \mathcal{C}(M, \tau_M)$ を同様に定義すればこの空間は $\phi \mapsto \phi(1)$ なる対応により $V^M = \{ v \in V ; \tau_1(m)v = v \tau_2(m) \quad (m \in M) \}$ なる空間と同型である。 L_G 及び L_M の正規直交基底をそれぞれ e_K ($1 \leq K \leq n'$), $\phi_{i,j}^{\pm}$ ($1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$) とあす。この選び方は前の論文 [5, 6] と同じである。

以下、簡単のため $W(\omega_j) = \{s \in W; s\omega_j = \omega_j\}$ ($1 \leq j \leq m$) は W に一致するものと仮定する。この時、(9.2) 上の Γ -1) 変換 F を次の様に定める。

$$(2) \quad F(f) = ((f, e_k))_{k=1}^{n'} \otimes \bigotimes_{j=1}^m (\hat{f}(\phi_i^j, v))_{i=1}^{n_j} \quad (v \in \mathcal{F}, f \in C(9.2))$$

ただし、 $\hat{f}(\phi_i^j, v) = (L^j)^{-1}(f, E(p; \phi_i^j: v: \cdot))$ である (cf [5.67])。 \mathcal{F} 上の普通の意味での急減少関数の空間を $C(\mathcal{F})$ で表わせば、 $F(f)$ は $C^{n'} \otimes C(\mathcal{F})^n$ ($n = \sum_{j=1}^m n_j$) に属する事わかる。 $C(\mathcal{F})_*^{n_j} \in C(\mathcal{F})^{n_j}$ の元 $d_j = (d_1^j, d_2^j, \dots, d_{n_j}^j)$ に対して、 Γ -1) 群に関する関数等式

$$(3) \quad d_j(sv)^t = \overline{c_{\text{PIP}}(s, s^{-1}v)} d_j(v)^t \quad (s \in W, v \in \mathcal{F})$$

を満すもの全体とある (cf. [57])。この時 $C(\mathcal{F})_*^n = \bigotimes_{j=1}^m C(\mathcal{F})_*^{n_j}$ とすれば 次の定理が成立する。

定理 1 ([67]). Γ -1) 変換 F は $C(9.2)$ と $C^{n'} \otimes C(\mathcal{F})_*^n$ の間の位相同型を与え、その逆変換は次の式で表わされる。

$$(4) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n'} (f, e_k) e_k(x) + \frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \int_{\mathcal{F}} \mu(\omega_j, v) E(p; \phi_i^j: v: x) \hat{f}(\phi_i^j, v) dv \quad (x \in \mathcal{G}).$$

3. Eisenstein 積分の展開に現われる特異点について 以下の結果を述べる前に

$$(5) \quad I(j, i; v: a) = \Phi_0(v: a) (c_{\text{PIP}}(1: v)^*)^{-1} \phi_i^j(1) \quad (v \in \mathcal{F}_0, a \in A^+)$$

なる有理型関数の特異点について調べる。この関数は $e^{p(\log a)}$ $E(p; \phi_i^j: v: a)$ ($a \in A^+$) の Harish-Chandra 展開に現われる第一項

に $e^{(k-A\nu)(\log u)} \mu(\omega_j, \nu)$ を掛けたものである。十分小さな正数 δ に対し、 $F_\delta^+(00)$ に有限個の極 ($a \in A^+$ に非従属しない。) を持つ事が知られている。今、これを $\xi_i^\delta(t)$ ($1 \leq i \leq T_\delta^+$) とし、その位数を $m_i^\delta(t)$ で表わす。 $|\xi_i^\delta(t_1)| < |\xi_i^\delta(t_2)|$ ($1 \leq t_1 < t_2 \leq T_\delta^+$) が成立する様に番号を付ける事にする。任意の正数 ε に対し、 $T_\delta^+(\varepsilon) = \max \{ t; \xi_i^\delta(t) \in F_\delta^+(\varepsilon) \}$ と置く。明らかに $T_\delta^+(\varepsilon_1) \leq T_\delta^+(\varepsilon_2)$ ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$)、 $T_\delta^+(00) = T_\delta^+$ である。こゝで S_ε を G 上の次の様な関数全体の集合とする。

$$(6) \quad D^m(\xi_i^\delta(t)) E(p: \phi_i^\delta: \nu: x) \quad 0 \leq m \leq m_i^\delta(t) - 1, \quad 1 \leq i \leq T_\delta^+(\varepsilon), \quad 1 \leq i \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq m$$

ただし $D^m(\xi) = \frac{d^m}{d\nu^m} |_{\nu=\xi}$ を意味する。また S_ε の部分集合として、 ε -一次独立な元から成る最大のものを S_ε^0 とする。今、この S_ε^0 の元を

$$(7) \quad E_p(x) = D^{m(p)}(\xi_{i(p)}^{j(p)}(t(p))) E(p: \phi_{i(p)}^{j(p)}: \nu: x) \quad (1 \leq p \leq r_\varepsilon)$$

と書く事にする。以後簡単のため $D^{m(p)}(\xi_{i(p)}^{j(p)}(t(p)))$ を D_p 、 $\phi_{i(p)}^{j(p)}$ を $\phi(p)$ と書く。明らかに $S_{\varepsilon_1}^0 \subset S_{\varepsilon_2}^0$ ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) と仮定して一般性を失ふおない。こゝで S_∞^0 の各元は G 上の実解析的な関数であり、その並び方から一次独立である。よって G 上のコンパクトな台をもつ (∞ 台 ε -spherical 関数 h_p ($1 \leq p \leq r_\infty$)) によって次の性質を満たすものが取れる。

$$(8) \quad (h_p, E_q) = \delta_{pq} \quad (1 \leq p, q \leq r_\infty)$$

補題 2 ([6])

$A_{p,k} = (h_p, e_k)$ ($1 \leq p \leq r_0$, $1 \leq k \leq n'$) とおけば, これら h_p ($1 \leq p \leq r_0$) の取り方には従属しない。

4. 主要結果

まず $0 < p \leq 2$ なる正数 p に対し G 上の τ -spherical, 急減少 p 乗可積分関数より成る空間 $e^p(G, \tau)$ を定義する。 $\Xi(x)$, $\sigma(x)$ ($x \in G$) を次の式によつて定義される G 上の球関数とする。

$$(9) \quad \begin{aligned} \Xi(x) &= \int_K e^{-p(H(xk))} dk, \\ \sigma(x) &= \sigma(K \exp X) = \|X\|^k, \end{aligned}$$

ただし $H(xk)$ は XK を岩沢分解した時の A 成分の \log , $x = K \exp X$ は X のカルタン分解を意味し, $\|\cdot\|$ は \mathfrak{g} 上のキリリング形式により定まるノルムである。この二つの球関数を用いて $e^p(G, \tau)$ は次の様に定義される。 G 上の τ -spherical, V 値, C^∞ 関数 f であつて, 任意の正整数 m , \mathcal{O}_τ の展開環 (G 上の微分作用素と同一視する) $U(\mathfrak{g}_\tau)$ の元 g_1, g_2 , V 上の単ノルム $S(V)$ の元 s に対し,

$$(10) \quad \mu_{m, g_1, g_2, s}^p(f) = \sup_{x \in G} |f(g_1(x)g_2)|_s \Xi(x)^{-\frac{2}{p}} (1 + \sigma(x))^m$$

を有限とするもの全体を $e^p(G, \tau)$ とする。この時 $\mu_{m, g_1, g_2, s}^p$ は単ノルム系を成し, これにより $e^p(G, \tau)$ は F - τ - S 空間となる。

また明らかに $e^2(G, \tau) = e(G, \tau)$, $C_c^\infty(G, \tau) \subset e_{p_1}(G, \tau) \subset e_{p_2}(G, \tau)$ ($0 < p_1 < p_2 \leq 2$) が成立する。

$\varepsilon = 3\varepsilon'$ として $e_1, e_2, \dots, e_{n'}$ は $\mathcal{O}(G, \mathbb{C})$ の基底であらうから、以後、
 $e_1, e_2, \dots, e_{i_p} \in \mathcal{O}^p(G, \mathbb{C}), e_{i_p+1}, \dots, e_{n'} \in \mathcal{O}^p(G, \mathbb{C})$ なる i_p が取れる
 様に順番を決めておこう。 $\mathcal{O}(G, \mathbb{C})$ の元はそれぞれの離散系列の
 表現の成分関数であるから依りて、その減少度が決定される
 事に注意する (cf. [7, 8])。

次に $\mathcal{O}^p(G, \mathbb{C})$ の Γ -リニア変換像とある空間 $H_p^{\mathbb{C}}$ を定義する。 $\varepsilon =$
 $\frac{2}{p}-1$ とし、 $\zeta(\Gamma)$ により Γ 上の対称環 (Γ 上の微分作用素 \mathcal{D} を
 含む。) を表わす。この時 $H_p^{\mathbb{C}}$ により、次の4つの性質を満
 足する $\mathbb{C}^{n'} \oplus (\Gamma)_{*}^{n'}$ の元 $(a_k)_{k=1}^{n'} \oplus \bigoplus_{j=1}^m (\alpha_j^i(v))_{i=1}^{n_j}$ の全体を表わす。

(1) 各 $\alpha_j^i(v)$ ($v \in \Gamma$) は $\Gamma(v)$ ($\Gamma(v)$ の内部) 上の正則関数に振
 張られる。

(2) 任意の正整数 l , $\zeta(\Gamma)$ の元 u に対し、

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{n'} | \alpha_k^i(v; u) | (1+|v|)^k < \infty$$

である。ただし $|v| = |v(H_0)|$ である。

(3) ε の Eisenstein 積分の関数写式

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{t=1}^{T_j^i(v)} \sum_{r=1}^{m_j^i(t)-1} A(j, i, t, r) D^r(\zeta_j^i(t)) ECP: \alpha_j^i(v; x) = 0 \quad (x \in G)$$

($A(j, i, t, r) \in \mathbb{C}$) が存在すれば $\alpha_j^i(v)$ ($1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$) を同じ関数
 写式を満たす。すなわち

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{t=1}^{T_j^i(v)} \sum_{r=1}^{m_j^i(t)-1} A(j, i, t, r) D^r(\zeta_j^i(t)) \alpha_j^i(v) = 0.$$

(4) a_k ($1 \leq k \leq n'$) の内、 a_k ($1 \leq k \leq i_p$) は次の式により $\alpha_j^i(v)$ に
 より決定される。

$$(12) \quad a_k = \sum_{q=1}^{r_\varepsilon} A_{q,k} D_q \alpha(q) \quad (1 \leq k \leq p)$$

ただし $\alpha(q) = \alpha_{\varepsilon(q)}^{(q)}$ ($1 \leq q \leq r_\varepsilon$) である。

ここで $p=2$ ($\varepsilon=0$) の場合は上の4つの条件は無いものと見なす。この様にして H_p^ε を定義すれば、この論文の主な結果は次の様に述べる事ができる。

定理3. $0 < p \leq 2$ なる正数 p に対し、 $H \in P(\varepsilon = \frac{2}{p} - 1)$ があつての f, ω に対して $\mathcal{F}_\omega^\varepsilon(T_\omega^\varepsilon(f))$ と一致しなるとする。この時、7-1)E 変換 F は $\mathcal{C}^p(G, \mathbb{C})$ と H_p^ε の間の同型を与える。

今、 \bar{H}_0^ε なる空間を次の様に定義する。 $\mathbb{C}^m \oplus \mathcal{C}(+)_*^m$ の元 $(a_k)_{k=1}^m \oplus \bigoplus_{j=1}^m (d_j^\nu)_{\nu=1}^{q_j}$ とも、 ε 、前の条件 (C1), (C3), (C4) を $\varepsilon = \infty$ として、満足し、さらに次の条件 (C2)' を満たすもの全体を \bar{H}_0^ε とする。

(C2)' ある正数 R が存在し、任意の自然数 N に対して次の不等式を満す定数 C_N が取れる。

$$(13) \quad |d_j^\nu(\omega)| < C_N (1 + |\omega|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im} \nu|} \quad (\nu \in \Gamma_c)$$

この様に \bar{H}_0^ε を定義すれば次の結果はあつて得られている。

定理4 (161) (G上の Paley-Wiener 型の定理)

7-1)E 変換 F は $\mathcal{C}_c^\infty(G, \mathbb{C})$ と \bar{H}_0^ε の間の同型を与える。

5. 定理3の証明. 記号はすべて今までの通りとする。定理の証明に入る前に以後何回か用いる重要な不等式を列挙する。

(i) ある正数 c_1, r_1 が存在し,

$$(14) \quad e^{-P(\log a)} \leq \Xi(a) \leq c_1 (1+\sigma(a))^{r_1} e^{-P(\log a)} \quad (a \in A^+).$$

(ii) ある正数 r_0 が存在し,

$$(15) \quad \int_G \Xi(x) (1+\sigma(x))^{-r_0} dx < \infty.$$

(iii) 任意の $g_1, g_2 \in U(\mathcal{G}_c)$, $u \in S(\mathcal{T})$, $s \in S(V)$ に対し, ある正数 c_1, c_2 が存在し, $L_M = \mathcal{C}(M, \mathcal{Z}_M)$ の元 ϕ に対し

$$(16) \quad |E(\phi: \phi: v; u; g_1; x; g_2)|_s \leq c_2 \|\phi\|_2 |(\nu, x)|^{r_2} \Xi(x)^{-\varepsilon+1}$$

($x \in G$, $v \in \mathcal{T}(\varepsilon)$) が成立する。ただし $|(\nu, x)| = (1+|\nu|)(1+\sigma(x))$, $\|\cdot\|_2$ は L^2 -ノルムを表わす。

以下 $0 < p \leq 2$, $\varepsilon = \frac{2}{p} - 1$ を固定し定理3の証明を行なう。まず $f \in \mathcal{C}^p(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ とした時, その \mathcal{T} -1変換像 $F(f)$ が H_p^2 に属する事を示す。亦ち (f, e_k) ($1 \leq k \leq n'$), $\hat{f}(\phi_j^s, \nu)$ ($1 \leq s \leq n_j, 1 \leq j \leq m$) が空間 H_p^2 の4つの条件を満足する事を示す。

(c1): 上の不等式 (ii), (iii) に注意すれば, $f \in \mathcal{C}^p(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ に対し

$$\begin{aligned} |f(\phi, \nu)| &\leq (c^2 r)^{-1} \int_G |f(x)|_s |E(\phi: \phi: \nu: x)|_s dx \quad (s \in S(V)) \\ &\leq (c^2 r)^{-1} \int_{\mathcal{R}_{2+r_0, 1, 1, s}}^p (f) \int_G \Xi(x)^{\frac{2}{p}} (1+\sigma(x))^{-r_0-r_2} \\ &\quad \times c_2 \|\phi\|_2 |(\nu, x)|^{r_2} \Xi(x)^{-\varepsilon+1} dx \\ &= (c^2 r)^{-1} \int_{\mathcal{R}_{2+r_0, 1, 1, s}}^p (f) (c_2 \|\phi\|_2 (1+|\nu|)^{r_2}) \int_G \Xi(x) (1+\sigma(x))^{-r_0} dx \\ &< \infty \quad (\phi \in L_M, \nu \in \mathcal{T}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

である。よって $\hat{f}(\phi, \nu)$ は $f(z)$ と定義すれば、明らかに $\hat{f}(z)$ は正則関数になる。

(2): 任意の $u \in S(\Gamma)$, 正整数 k に対し ν , ある $g_{1,i}, g_{2,i} (1 \leq i \leq k)$ を $u(g_i)$ から選ぶ。

$$|\hat{f}(\phi, \nu; u)| (1+|v|)^k < \sum_{i=1}^k \left| \int_{\Gamma} f(x) E(\phi; \nu; g_{1,i}(x); g_{2,i}(x)) dx \right|$$

 $(v \in \Gamma(i))$ が成立する様にできる。(see [9, Th 3.5.3]) よって条件

(1) を満たす時と同様の方法により, ν_2 が ν_1 に従属している事から, $\sup_{v \in \Gamma(i)} |\hat{f}(\phi, \nu; u)| (1+|v|)^k$ は有限である事がわかる。

(3): 任意の正整数 m , $\xi \in \Gamma(i)$ に対して (1) より

$$D^m(\xi) \hat{f}(\phi, \nu) = (c_\nu)^{-1} (\xi, D^m(\xi) E(\phi; \nu; \cdot; \cdot)) \quad (v \in \Gamma(i), \phi \in L_M)$$

が成立する事に注意する。よって Eisenstein 積分が関数等式 (7.2) 内での) を満たす時、同じ関数等式 $\hat{f}(\phi, \nu)$ が満たす事は明らかである。

(4): この条件を満たす事を証明するのはかなり大変である。上の Paley-Wiener 型の定理の証明で用いた特異点を消去する方法をここでも用いる。つまり

$$(17) \quad F(x) = f(x) - \sum_{q=1}^{r_E} c_q h_q(x) \quad (x \in \Gamma)$$

と置く。ここで $c_q = D_q \hat{f}(\phi[\eta], \nu) (1 \leq q \leq r_E)$ であり、この c_q は定理の仮定及び ν が満たす条件 (1) を用いる事により定義される。 $h_q (1 \leq q \leq r_E) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ であるから明らかに F は $C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ に属する。

補題 5 $D^m(\xi_2^j(t)) \hat{F}(\phi_2^j, \nu) = 0$ かつ $\forall \nu$ の $0 \leq m \leq m_2^j(t) - 1$,

$1 \leq t \leq T_2^j(\epsilon)$, $1 \leq i \leq n_j$, $1 \leq j \leq m$ に対して成立する。

(証明) m, t, i, j を固定する。 $S_\epsilon = \{E_q \mid 1 \leq q \leq r_\epsilon\}$ は S_ϵ の一次独立な元から成る最大部分集合であるから S_ϵ の元は \mathbb{C} の一次結合で書けるから

$$\begin{aligned} D^m(\xi_2^j(t)) E(\rho; \phi_2^j; \nu; x) &= \sum_{q=1}^{r_\epsilon} a_q E_q(x) \quad (a_q \in \mathbb{C}) \\ &= \sum_{q=1}^{r_\epsilon} a_q D_q E(\rho; \phi(q); \nu; x) \end{aligned}$$

が成立する。 $\epsilon = 3$ の $F \in \mathcal{C}^p(\mathcal{G}_2)$ に対して示した条件 (3)

を用いる事にし

$$D^m(\xi_2^j(t)) \hat{F}(\phi_2^j, \nu) = \sum_{q=1}^{r_\epsilon} a_q D_q \hat{F}(\phi(q), \nu)$$

が成立する事がわかる。 $\epsilon = 2$ の $(\epsilon^2) D_q \hat{h}_q(\phi(q), \nu) = (h_q', D_q E(\rho; \phi(q); \nu; \cdot)) = (h_q', E_q) = \delta_{q,q}$ ($1 \leq q, q' \leq r_\epsilon$) に注意すれば

$$D_q \hat{F}(\phi(q), \nu) = D_q \hat{f}(\phi(q), \nu) - \sum_{q'=1}^{r_\epsilon} c_{q'} D_q \hat{h}_{q'}(\phi(q'), \nu) = c_q - \sum_{q'=1}^{r_\epsilon} c_{q'} \delta_{q,q'} = 0$$

かつ $\forall \nu$ の $1 \leq q \leq r_\epsilon$ に対して成立する。 よって $D^m(\xi_2^j(t)) \hat{F}(\phi_2^j, \nu) = 0$ である。
q.e.d.

次に F を (4) により $F = F_0 + F_1$ ($F_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_2)$, $F_1 \in \mathcal{C}_A(\mathcal{G}_2)$) と分解し

た時、 F_1 が $\mathcal{C}^p(\mathcal{G}_2)$ に属する事を示す。 マルコフ定理 1 により

$$(48) \quad F_1(x) = \frac{1}{|\omega|} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \int_{\Gamma} \rho(\omega_j, \nu) E(\rho; \phi_2^j; \nu; x) \hat{F}(\phi_2^j, \nu) d\nu \quad (x \in \mathcal{G})$$

と書ける事に注意する。 $\epsilon = 2$ の展開を用いる。

Eisenstein 積分の Harish-Chandra 展開: 唯一に決まる $\text{End}(L_m)$ 値

有理型関数 $C_{PIP}(s; \nu)$ ($s \in W, \nu \in \Gamma_0$) 及び有理関数 $P_{nd}(\nu)$ ($n \in \mathbb{Z}^+, \nu \in \Gamma_0$) が存在し, $\phi \in LM$ に対し,

$$(19) \quad e^{P(\log a)} ECP: \phi: \nu: a = \sum_{s \in W} \Phi(s; \nu: a) C_{PIP}(s; \nu) \phi(1) \quad (a \in A^+)$$

が成立する。ただし $\Phi(\nu: a) = e^{F(\nu: \log a)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} P_{nd}(\nu: n) e^{-n a(\log a)} = e^{F(\nu: \log a)} \Phi_0(\nu: a)$ である。 Γ_0 でも, 上の有理型関数 $C_{PIP}(s; \nu)$ 及び P_{nd} が正則となる Γ_0 の開領域を表わす (see [10, p228, Th 9.1.4.1]).

この展開 (19) を前の (18) に代入する。ただし, 上の展開が $\nu = 0$ で定義されるかどうか解らなりので, 有界コーシーの定理を用いて (18) の積分路 γ を γ_0 (γ_0 は十分小さな正数) とし, その上で (19) を代入する。よって $\nu(\omega_j, \nu) C_{PIP}(s; \nu)^* C_{PIP}(s; \nu) = 1$ なる関係式を用いれば, $a \in A^+$ に対し

$$(20) \quad \begin{aligned} |\omega| e^{P(\log a)} F_1(a) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \int_{\gamma_0} \sum_{s \in W} \Phi(s; \nu: a) C_{PIP}(s; \nu)^* \phi_i^j(1) \hat{F}(\phi_i^j, \nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{s \in W} \int_{s(\gamma_0)} \Phi(\nu: a) C_{PIP}(1; \nu)^* \phi_i^j(1) \hat{F}(\phi_i^j, \nu) d\nu \end{aligned}$$

を得る。ただし最後の変形には $\hat{F}(\phi_i^j, \nu)$ が (3) を満たす事を用いた。以下, (20) の被積分関数 $\Phi(\nu: a) C_{PIP}(1; \nu)^* \phi_i^j(1) \hat{F}(\phi_i^j, \nu) \in I(\phi_i^j; \nu: a)$ と書く事にする。

ここで $\hat{F}(\phi_i^j, \nu)$ が ν に示した条件 (C1) により $\overset{\circ}{\gamma}_0^+(\varepsilon)$ で正則であり, かつ補題 5 により $\Phi_0(\nu: a) C_{PIP}(1; \nu)^* \phi_i^j(1)$ ($a \in A^+$) の $\overset{\circ}{\gamma}_0^+(\varepsilon)$ における $m_i^j(t)$ 位の極 $\gamma_i^j(t)$ 及び $m_i^j(t)$ 位の零点を持つ事に注意すれば $I(\phi_i^j; \nu: a)$ ($a \in A^+$) は $\overset{\circ}{\gamma}_0^+(\varepsilon)$ において正則である事がわかる。よって次の不等式を満足する。

補題 6 $A_0^+ = \{ a \in A^+; \log a - H_0 \in \mathcal{O}^+ \}$ とする。この時任意の $u \in S(\Gamma)$, $s \in S(V)$, $r \in \mathbb{Z}^+$, $v \in U(\mathcal{O}_c)$ (1 \mathcal{O}_c により生成される $U(\mathcal{O}_c)$ の部分環) に対して、ある定数 $C_{u,v,s,r}$ が存在し

$$(21) \quad |I(j, i; v; u; a; v)|_s \leq C_{u,v,s,r} (1+|v|)^{-r}$$

が $v \in \mathcal{F}_\delta^+(\mathcal{E})$, $a \in A_0^+$ に対して成立する。

(証明) D を Γ の虚軸方向に有界な開領域とする。この時 [4. 3] の結果により、ある定数 $C, r_4 > 0$ が存在し、

$$\|C_{PIP}(s; v)^{-1}\| \leq C (1+|v|)^{r_4} \quad (v \in D, s \in W)$$

が成立する。ここで $\|\cdot\|$ は作用素ノルムである。また [4. Lemma 2.3] を用いれば、ある正定数 $M, r_4 > 0$ が存在し、

$$\|P_{na}(\sqrt{v}-p)\| \leq M (1+|v|)^{r_4} e^{na(\frac{H_0}{2})} \quad (n \in \mathbb{Z}^+, v \in D)$$

である事がわかる。よって $a \in A_0^+$ とすれば

$$\begin{aligned} \|I_0(v; u)\| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \|P_{na}(\sqrt{v}-p)\| e^{-na \log a} \\ &\leq M (1+|v|)^{r_4} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} e^{-na(\log a - \frac{H_0}{2})} \leq M' (1+|v|)^{r_4} \end{aligned}$$

と押えられる事がわかる。ただし $M' = M \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} e^{-na(\frac{H_0}{2})}$ であり $a \in A_0^+$ には従属しない。以上の不等式と $\bigvee I(j, i; v; a)$ が $\mathcal{F}_\delta^+(\mathcal{E})$ で正則で $\hat{f}(j, i; v)$ が急減衰し、ある事を示せば補題の明らかである。 q. e. d.

よって Γ の F_1 が $e^{\mathcal{P}(\mathcal{G}, \mathcal{L})}$ に属する事を示す。すなわち任意の $g_1, g_2 \in U(\mathcal{O}_c)$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $s \in S(V)$ に対して

$$(22) \quad \sup_{x \in G} |F_1(g_1(x); g_2)|_s \equiv (x)^{-\frac{2}{p}} (1 + \sigma(x))^m$$

が有限に存在する事を言えれば良い。つまり (22) の両側の微分作用素を片側に移す。すなわち ある $a_1, \dots, a_t \in U(\mathfrak{g}_L)$ と定数 c が存在し

$$|F_1(g_1(x); g_2)|_s \leq c \sum_{k=1}^t |F_1(x; a_k)|_s \quad (x \in G)$$

と書ける (see [11, p344, Lemma 3])。次に F_1 が 2-spherical である事から, $G = K \mathcal{U}(A^+) K$ なるカウチン分解を用いる事により, 上の不等式は本質的に $\mathcal{U}(A^+)$ 上で示せば良い事がわかる。この時各 a_k ($1 \leq k \leq t$) に対してある $b_{k,l}, c_{k,l} \in U(\mathfrak{g}_L)$ 及び $|f_{k,l}(a)|_s \leq e^{-p(\log a)}$ なる $C^\infty(A^+)$ の元 $f_{k,l}$ ($1 \leq l \leq m_k$) が存在し

$$|F_1(a; a_k)|_s \leq \sum_{l=1}^{m_k} \{ |F_1(a; b_{k,l})|_s + |f_{k,l}(a)| |F_1(a; c_{k,l})|_s \}$$

($a \in \mathcal{U}(A^+)$) が成立する。以上から $A_1^+ = \{a \in A_0^+; \text{ある } k, l \text{ に対して } |f_{k,l}(a)|_s \leq 1\}$ とすれば, ある $b_1, b_2, \dots, b_w \in U(\mathfrak{g}_L)$ が存在し

$$(23) \quad \begin{aligned} & \sup_{x \in KA_1^+K} |F_1(g_1(x); g_2)|_s \equiv (x)^{-\frac{2}{p}} (1 + \sigma(x))^m \\ & \leq c \sup_{a \in A_1^+} \sum_{h=1}^w |F_1(a; b_h)|_s e^{\frac{2}{p} p(\log a)} (1 + \sigma(a))^{m+r_1} \end{aligned}$$

が成立する事がわかる。よって (20) に注意すれば, 各 h ($1 \leq h \leq w$) に対し F_0 上の双項式 P_h 及び $v_h \in U(\mathfrak{g}_L)$ が存在し

$$(24) \quad \begin{aligned} (23) & \leq c \sup_{a \in A_1^+} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{h=1}^w | \int_{\Gamma} U_{m_0}(e^{F_i v(\log a)}) P_h(F_i v) \\ & \quad \times I(j, i; v; a; v_h) dv |_s e^{(\frac{2}{p}-1)p(\log a)} \end{aligned}$$

と存在する。ここで U_{m_0} ($m_0 = m + r_1$) は $(1 + \sigma(a))^{m_0} \leq U_{m_0}(\sqrt{1 + \log a})$ ($a \in A^+$) を満たす $S(\Gamma)$ の元である。よって v に関する微分作用素を移す事ができる, あるいは $u_{1,q}, u_{2,q} \in S(\Gamma)$ ($1 \leq q \leq d$) が存在し

$$(24) = C \sup_{u \in A_1^+} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{k=1}^w \sum_{q=1}^d \int_{\Gamma} e^{F_1 v(\log u)} P_n(\sqrt{v}; u_{1,q}) \times I(j, i; v; u_{2,q}; u; v_n) dv \Big|_s e^{\varepsilon_P(\log u)}$$

となり。二二の定理により積分路を $\Gamma + F_1 \varepsilon_P \wedge \Gamma$ とする。

$$\begin{aligned} \text{也} \text{ 17. 上式} &= C \sup_{u \in A_1^+} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{k=1}^w \sum_{q=1}^d \int_{\Gamma + F_1 \varepsilon_P} e^{F_1 v(\log u)} P_n(\sqrt{v}; u_{1,q}) \\ &\quad \times I(j, i; v; u_{2,q}; u; v_n) dv \Big|_s e^{\varepsilon_P(\log u)} \\ &\leq C \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{k=1}^w \sum_{q=1}^d C_{u_{2,q}, v_n, s, d_{n,q}} \int_{\Gamma + F_1 \varepsilon_P} (1+|v|)^{-2} dv \end{aligned}$$

となり、これは有限である。ただし $d_{n,q} = 2 + \deg(P_n(\cdot); u_{1,q})$

であり、 $C_{u_{2,q}, v_n, s, d_{n,q}}$ は補題 6 により定まる定数である。

一方 $\mathcal{U}(A^+ - A_1^+)$ は Γ パートであるから、上の結果より (22) が有限となる事は明らかである。よって $F_1 \in \mathcal{E}^P(G, 2)$ が示された。

F は $\mathcal{E}^P(G, 2)$ に属したのて、上の事から $F_0 \in \mathcal{E}^P(G, 2)$ に属するわけである。 $F_0 = \sum_{k=1}^{i_p} (F_0, e_k) e_k + \sum_{k=i_p+1}^{n'} (F_0, e_k) e_k$ と書ける $e_k (1 \leq k \leq i_p)$ が $\mathcal{E}^P(G, 2)$ に属する事に注意すれば、 e_k の独立性により $(F_0, e_k) = (F, e_k) = 0 \quad (1 \leq k \leq i_p)$ となつて居る。よって (17) より $(f, e_k) = \sum_{q=1}^{r_e} C_q(h_q, e_k) = \sum_{q=1}^{r_e} D_q \hat{f}(\phi(q), v) A_{q,k} \quad (1 \leq k \leq i_p)$ が得られる。これは求めるべき条件 (4) の関係式にほかならない。

以上の事から $f \in \mathcal{E}^P(G, 2)$ の時その Γ -1) 変換像 $F(f)$ は H_P^2 に属する事がわかる。

$\mathcal{E}^P(G, 2) \subset \mathcal{E}(G, 2)$ であるから Γ -1) 変換 F が $\mathcal{E}^P(G, 2)$ 上で一対一である事は定理 1 により明らかである。よって上の写像である

事と示せば定理3の証明は完成する。

$d = (\alpha_k)_{k=1}^{n'} \oplus \bigoplus_{j=1}^m (\alpha_j^i(\nu))_{i=1}^{r_j} \in H_p^2$ の任意の元とし, $f = F^{-1}(d)$ と置く。

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k e_k(x) + \frac{1}{|w|} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{r_j} \int_T \mu(\omega_j, \nu) E(\nu: \phi_j^i: \nu=x) \alpha_j^i(\nu) d\nu \quad (x \in G)$$

である。明らかに $F(f) = d$ であるから $f \in C^p(G, \mathbb{R})$ と示せば良い。

前同様に $F(x) = f(x) - \sum_{q=1}^{r_\varepsilon} c_q h_q(x) \quad (x \in G)$ と置く。 $\varepsilon = \varepsilon'$ $C_p =$

$D_p d(P)(\nu) \quad (1 \leq p \leq r_\varepsilon)$ であり, 二れは d ~~及び F~~ が H_p^2 の元である

事より定義される。今 $F(F) = \beta$ と置けば, 前半の結果より,

$F(h_q) \in H_p^2 \quad (1 \leq q \leq r_\varepsilon)$ である事より $\beta \in H_p^2$ が容易にわかる。

以下前半と同様の議論を用いる事により $F \in (1)$ により $F_0 + F_1$ と分解した時, F_1 は $C^p(G, \mathbb{R})$ に属する事がわかる。よりに

β が条件 (4) を満たす事に注意すれば $1 \leq k \leq l_p$ なる k に対し

$$\begin{aligned} (F, e_k) &= (f, e_k) - \sum_{q=1}^{r_\varepsilon} c_q (h_q, e_k) \\ &= \alpha_k - \sum_{q=1}^{r_\varepsilon} D_q d(q)(\nu) A_{q,k} = 0 \end{aligned}$$

である事がわかる。よ, $F_0 = \sum_{k=l_p+1}^{n'} (F, e_k) e_k$ と取り替へ F_0 も

$C^p(G, \mathbb{R})$ の元である。故に $F = F_0 + F_1$ は $C^p(G, \mathbb{R})$ の元であり, h_q

$\in C^\infty(G, \mathbb{R}) \quad (1 \leq q \leq r_\varepsilon)$ より f 自身も $C^p(G, \mathbb{R})$ の元である。

以上の考察により定理3の証明は完成した。 q. e. d.

6. リーマン・ルベールの補題 G上の \mathbb{R} -spherical \mathbb{Z} が

$p \quad (0 < p \leq 2)$ 乗可積分関数全体を $L^p(G, \mathbb{R})$ と書く事にする。今

$f \in L^p(G, \mathbb{R})$ の元とした時, そのフーリエ変換 $\hat{f}(\phi, \nu) \quad (\phi \in L_M,$

$v \in \mathbb{T}$ の $|v| \rightarrow \infty$ とした時の様子を調べる。以下 $\phi \in L^1, \psi \in S(V)$ を固定する。 V 値関数の L^p ノルムを $\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ と定義する。

命題 7 $f \in L^1(G, \mathbb{C})$ の元とすると $\lim_{\substack{|v| \rightarrow \infty \\ v \in \mathbb{T}}} \hat{f}(\phi, v) = 0$ が成立する。

(証明) まずある定数 M_1 が存在し $|\mathcal{E}(\phi: v: x)|_S \leq M_1$ ($v \in \mathbb{T}, x \in G$) とする事に注意する。今、任意の正数 δ に対して $g \in C_c^\infty(G, \mathbb{C})$ ($L^1(G, \mathbb{C})$ の中で稠密) を $\|f - g\|_1 < \frac{\delta}{2M_1}$ を満たす様に取る。この時 $|\hat{f}(\phi, v) - \hat{g}(\phi, v)| < \frac{\delta}{2}$ ($v \in \mathbb{T}$) が容易に示される。一方 $g \in C_c^\infty(G, \mathbb{C})$ より、ある正数 N が存在し $|v| > N$ ならば $|\hat{g}(\phi, v)| < \frac{\delta}{2}$ とできる。よって $|v| > N$ に対して $|\hat{f}(\phi, v)| < \delta$ が成立する。 δ の任意性により求める結果は明らかである。 q.e.d.

命題 8 $f \in L^p(G, \mathbb{C})$ ($1 < p < 2$) の元とすると $\lim_{\substack{|v| \rightarrow \infty \\ v \in \mathbb{T}}} \hat{f}(\phi, v) = 0$ である。

以下の補題を証明する。

補題 9 $2 < p < \infty$ なる正数 p に対し、 $\sup_{v \in \mathbb{T}} \|\mathcal{E}(\phi: v: \cdot)\|_q$ は有限である。以下、この値を M_p と置く。

(証明) $\Xi(x)$ が (14) の不等式により急減少してゐる事から任意の $\alpha > 0, \beta > 0$ に対してある定数 $C_{\alpha, \beta} > 0$ が存在し、 $\Xi(x) (1+\sigma(x))^\beta \leq C_{\alpha, \beta} (1+\sigma(x))^{-\alpha}$ ($x \in G$) してゐる事に注意する。よ、こ

$$\begin{aligned} \sup_{v \in \Gamma} \int_G |E(\rho: \phi: v: x)|_S^q dx &\leq M_1^q \int_G \Xi(x)^q dx \\ &\leq M_1^q C_{q-2, 0} \int_G \Xi(x)^2 (1+\sigma(x))^{-2} dx < \infty \end{aligned}$$

である。たゞし $|E(\rho: \phi: v: x)|_S \leq M_1 \Xi(x)$ ($x \in G, v \in \Gamma$) なる事実を用いた。この事から補題は明らかである。 q. e. d.

(命題 8 の証明) 今 $q = \frac{p}{p-1}$ と置く。亦ち $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 2 < q < \infty$ である。任意の正数 δ に対して $g \in C_c^\infty(G, \mathbb{R})$ 且 $\|f - g\|_p < \frac{\delta}{2} M_q$ となる様に選ぶ。この時、ヘルツの不等式と上の補題を用ひれば

$$\begin{aligned} |f(\phi, v) - \hat{g}(\phi, v)| &\leq \int_G |f - g|_S |E(\rho: \phi: v: x)|_S dx \\ &\leq \|f - g\|_p \sup_{v \in \Gamma} \|E(\rho: \phi: v: x)\|_q < \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

($v \in \Gamma$) が成立する。よ、こ以下前と同様の方法により命題は示される。 q. e. d.

命題 10 $f \in L^p(G, \mathbb{R})$ ($1 \leq p < 2$) の元とし、 $\varepsilon = \frac{p}{2} - 1$ とする。この時任意の $0 \leq \varepsilon_0 < \varepsilon$ なる ε_0 に対してある f に従属しない定数 $l = l_{\varepsilon_0}$ が存在し、 $\lim_{|Re v| \rightarrow +\infty} \frac{\hat{f}(\phi, v)}{(1+|v|)^l} = 0$ が成立する。たゞし $\varepsilon_0 = 0$ の時は $l_0 = 0, \hat{f}(0) = f$ である。

(証明) 前の命題 7.8 により $\varepsilon_0 = 0$ の場合はすでに示されている。よって $\varepsilon_0 > 0$ と仮定する。こゝで前の不等式 (16) を用いる。おのれからある定数 $c, \lambda = \lambda_{\varepsilon_0}$ が存在し

$$|E(\varphi; \phi; \nu; x)|_3 \leq c(1+|\nu|)^{\lambda} (1+\sigma(x))^{\lambda} \Xi(x)^{-\varepsilon_0+1} \quad (\nu \in \mathcal{F}(\varepsilon_0))$$

が成立する。よって $q = \frac{p}{p-1}$ とすれば $-q\varepsilon_0 + q - 2 > -q\varepsilon_0 + q - 2 = 0$ に注意して

よって

$$\begin{aligned} \int_G |E(\varphi; \phi; \nu; x)|_3^q dx &\leq c^q (1+|\nu|)^{q\lambda} \int_G \Xi(x)^{-q\varepsilon_0+q} (1+\sigma(x))^{q\lambda} dx \\ &\leq c^q (1+|\nu|)^{q\lambda} C_{-q\varepsilon_0+q-2, q\lambda} \int_G \Xi(x) (1+\sigma(x))^{-\lambda_0} dx \\ &\leq N^q (1+|\nu|)^{q\lambda} \quad (\nu \in \mathcal{F}(\varepsilon_0)) \end{aligned}$$

となる。こゝで N は ν に従属しない定数である。よって任意

の正数 δ に対して $g \in C_c^\infty(G, \mathbb{C})$ 且 $\|1-g\|_p < \frac{\delta}{2N}$ とする様に選べば

$\nu \in \mathcal{F}(\varepsilon_0)$ に対し λ の不等式より $|f(\phi, \nu) - \hat{g}(\phi, \nu)|_{(1+|\nu|)^{\lambda}}$

$< \frac{\delta}{2}$ が成立する事がおのれから。以下前と同様の方法により

命題を示される。

q.e.d.

7. 結合関数のフーリエ変換 こゝでは $C(G, \mathbb{C})$ の元 f, g の結

合関数 $f * g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy \quad (x \in G)$ のフーリエ変換 $\widehat{f * g}(\phi,$

$\nu) \quad (\phi \in L_M, \nu \in \mathcal{F})$ について調べる。 (1) の分解に従って $f = f_0 + f_1,$

$g = g_0 + g_1 \quad (f_0, g_0 \in C(G, \mathbb{C}), f_1, g_1 \in C_A(G, \mathbb{C}))$ と書く事がある。

補題 11 $f * g = f_0 * g_0 + f_1 * g_1$

(証明) f_0 がカス γ_0 形式である事から $(f_0)_v^{(p)} = \int_{AN} f_0(man) e^{(A \cdot v - \text{tr} \log a)} da dn$
 $= 0$ ($m \in M$) に注意する。よって [3, Lemma 8.2] より $f_0 * E(\phi: \phi: v: \cdot) = E(\phi: (f_0)_v^{(p)} * \phi: v: \cdot) = 0$ ($\phi \in L_M, v \in \mathfrak{F}$) である。この事から g_1 が wave packet の形で書ける事に注意して $f_0 * g_1 = 0$ を得る。同様に $f_1 * g_0 = 0$ を示す此補題は成立する。 q. e. d

カス γ_0 形式の空間 L_G, L_M はそれぞれ結合積で閉じているので。ある定数 $c_{KK'S}$ ($1 \leq K, K', S \leq n'$)、 $c_{i i' u}^{j j' u}$ ($1 \leq i, i' \leq n_j, 1 \leq i', i' \leq n_{j'}, 1 \leq u \leq n_u, 1 \leq j, j', u \leq m$) が存在して

$$e_K * e_{K'} = \sum_{S=1}^{n'} c_{KK'S} e_S$$

$$\phi_i^j * \phi_{i'}^{j'} = \sum_{u=1}^{n_u} \sum_{v=1}^{n_u} c_{i i' v}^{j j' u} \phi_v^u$$

と書ける事がわかる。

命題 12 $\hat{f} * \hat{g}(\phi_v^u, v) = (c^2 r)^{-1} \sum_{j, j'=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{i'=1}^{n_{j'}} c_{i i' v}^{j j' u} \hat{f}(\phi_i^j, v) \hat{g}(\phi_{i'}^{j'}, v)$
 $(f * g, e_S) = \sum_{K, K'=1}^{n'} c_{KK'S} (f, e_K) (g, e_{K'})$ ($v \in \mathfrak{F}$)

(証明) $f \in C(G, \mathbb{C})$ に対し $(f)_v^{(p)} = \sum_{i=1}^m \sum_{i'=1}^{n_{i'}} f(\phi_{i'}^{i'}, v) \phi_i^i$ ($v \in \mathfrak{F}$)、 $f_0 = \sum_{K=1}^{n'} (f_0, e_K) e_K$ と書ける事に注意する。 [3, Lemma 8.1] より $\hat{f} * \hat{g}(\phi, v) = (c^2 r)^{-1} (f * g, E(\phi: \phi: v: \cdot)) = (c^2 r)^{-1} ((f)_v^{(p)} * (g)_v^{(p)}, \phi) = (c^2 r)^{-1} ((f)_v^{(p)} * (g)_v^{(p)}, \phi)$ ($\phi \in L_M, v \in \mathfrak{F}$) とする事から前半の関係式は明らかである。後半は容易に得られる。 q. e. d.

系 13. $\mathcal{L}(G, \mathbb{C})$ が結合積に関して可換である必要十分条件は V^M が可換である事である。

(証明) $\mathcal{L}(G, \mathbb{C})$ に対して示せば十分である。 $\varepsilon = 3$ の前の命題 12 より結合積に関して可換であるためには L_M, L_G が可換である事が必要かつ十分である。 前の定理 4 に注意すれば $\mathcal{L}(G, \mathbb{C})$ の元の ε 成分は wave packet の部分の フーリエ変換により ε 決定される事がわかる ($\varepsilon = \infty$ の時の条件 (4))。 また、 ε ごとに L_M が可換ならば L_G は可換である。 また $L_M \cong V^M$ であり、この同型対応に対し、 $u * v(1) = u(1) \cdot v(1)$ ($u, v \in L_M$) が成立する事に注意する。 以上の事から系は明らかである。 q.e.d.

参考文献

- [1] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups I, J. of Functional Analysis 19 (1975), 104-204.
- [2] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups II, Invent. Math. 36 (1976), 1-55.
- [3] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. of Math. 104 (1976), 117-201.
- [4] K. D. Johnson, Paley-Wiener theorems on groups of split rank one, J. of Functional Analysis 34 (1979), 54-71.
- [5] T. Kawazoe, An analogue of Paley-Wiener theorem on rank one semisimple Lie groups I, Tokyo J. Math. 2 (1979), 397-407.

- [6] T. Kawazoe, An analogue of Paley-Wiener theorem on rank one semisimple Lie groups II, Tokyo J. Math. 2 (1979) 407-421.
- [7] D. Milićić, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of the discrete series, Duke Math. J. 44 (1977), 59-88.
- [8] P. C. Trombi and V. S. Varadarajan, Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group; The discrete spectrum, Acta Math. 129 (1972), 237-280.
- [9] P. C. Trombi and V. S. Varadarajan, Spherical transforms on semisimple Lie groups, Ann. of Math. 94 (1971), 246-303.
- [10] G. Warner, Harmonic analysis on Semi-Simple Lie Groups II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [11] V. S. Varadarajan, Harmonic Analysis on Real Reductive Groups, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. vol 576 (1977).