数理解析研究所講究録
第 428 巻 1981 年 152-168



# 変分不等式の解の support の評価

神戸大・理　山田直記

## 1. 序

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界 $\Gamma$ を持つ有界領域とし，次の変分不等式を考える．

$$-\Delta u + \alpha u \leqq f, \qquad u \leqq 0,$$

(V.I.) $$u(-\Delta u + \alpha u - f) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad (\alpha \geqq 0),$$

$$u = \phi \qquad \text{on } \Gamma.$$

$f \in L^\infty(\Omega)$, $\phi \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ に対して解 $u$ が一意的に存在し $u$ は $\bar{\Omega}$ で連続になることが知られている（H. Brezis [3]）．以下考える変分不等式の解はすべて連続であるとする．

解 $u$ によって，$\Omega$ は次の二つの領域に分割される：

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\} \qquad (\textit{coincidence set}),$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid -\Delta u + \alpha u = f\} \qquad (\textit{continuation set}).$$

$S = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ とすると (V.I.) の解 $u$ は形式的に次の自由境界問題をみたす．

$$-\Delta u + \alpha u = f \quad \text{in } \Omega_2,$$

$$u(x)=\phi \quad \text{on } \Gamma\cap\partial\Omega_2,$$
$$u = \partial u/\partial n = 0 \quad \text{on } S,$$

ここで $\partial u/\partial n$ は $u$ の外向法線方向の微分をあらわす．従って $\Omega_1$（もしくは $\Omega_2$）を評価することにより，自由境界 $S$ の評価が得られると考えられる．ここでは A. Bensoussan, H. Brezis and A. Friedman [1] による次の定理を出発点としてこれを精密化すること，他の境界条件の下での評価および放物型変分不等式に対する類似の結果を紹介する．

定理1．正数 $\gamma, \delta$ に対して $f \geqq \gamma$ in $\Omega$，$\phi \geqq -\delta$ on $\Gamma$ が成立するならば

$$\{x\in\Omega \mid \mathrm{dist}(x,\Gamma) \geqq (2N\delta/\gamma)^{1/2}\} \subset \Omega_1.$$

2．Dirichlet 境界条件に対する結果．

定理1は次の様に精密化される．

定理2．$x_0\in\overline{\Omega}$，$r_1 \geqq 0$ が存在して

$$\text{(F)}\quad \begin{aligned} f &\geqq 0 && \text{in } \Omega\cap B(x_0, r_1) \\ f &\geqq \gamma && \text{in } \Omega\setminus B(x_0, r_1) \end{aligned}$$

が成立するとする．ここで $B(x_0, r_1) = \{x\in\mathbb{R}^N \mid |x_0 - x| < r_1\}$，$\gamma > 0$．

$r_2 \geqq 0$ が存在して

$$\text{(D)}\quad \begin{aligned} \phi &= 0 && \text{on } \Gamma\cap B(x_0, r_2+\mathrm{dist}(x_0,\Gamma)), \\ \phi &\geqq -\delta && \text{on } \Gamma\setminus B(x_0, r_2+\mathrm{dist}(x_0,\Gamma)) \end{aligned}$$

がある $\delta > 0$ に対して成立するとする．このとき

$$r_1 \leqq r_2 + \mathrm{dist}(x_0, \Gamma) - (2N\delta/\gamma)^{1/2} \ (\equiv s_2)$$

ならば

$$u(x) = 0 \quad \text{in } \Omega \cap B(x_0, s_2)$$

が成立する．

注意．$r_1 = r_2 = 0$ とすると定理1が得られる．

3．他の境界条件に対する結果．

一般の境界条件を持つ次の変分不等式を考える．

$$-\Delta u + \alpha u \leqq f, \quad u \leqq 0,$$

$$u(-\Delta u + \alpha u - f) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$\partial u/\partial n - \psi \in \beta(-u|_\Gamma + \phi),$$

ここで $\beta \subset \mathbb{R}^2$ は $0 \in \beta(0)$ をみたす maximal monotone graph, $\partial u/\partial n$ は外法線方向の微分，$\alpha > 0$ とする．特に $\beta(r) = ]-\infty, +\infty[$, $r = 0$ のとき；$\beta(r) = \text{empty}$, $r \neq 0$ のとき；とすれば Dirichlet 境界条件となり定理2が成立する．いくつかの $\beta$ に対しても類似の結果が成立する．

3.1．Neumann 境界条件．

$\beta$ を，すべての $r \in \mathbb{R}$ に対して $\beta(r) = 0$，と選べば境界条件は $\partial u/\partial n = \psi$ となり Neumann 境界条件になる．

<u>定理3</u>．定理2の条件(F)が成立するとする．

$r_3 \geqq 0$ が存在して

(N) $$\psi = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \cap B(x_0, r_3 + \mathrm{dist}(x_0, \Gamma)),$$
$$\psi \geqq -\delta \quad \text{on} \quad \Gamma \setminus B(x_0, r_3 + \mathrm{dist}(x_0, \Gamma))$$

がある $\delta > 0$ に対して成立するとする．

$n(x)$ を $x \in \Gamma$ における外法線とし，次の量を導入する．

$$\theta(x_0, r_3) = \begin{cases} \inf\{\cos(n(x), x - x_0) \mid x \in \Gamma\}, & x_0 \in \Omega \text{ のとき}, \\ \inf\{\cos(n(x), x - x_0) \mid x \in \Gamma,\ |x - x_0| \geqq r_3\}, & x_0 \in \Gamma \text{ のとき}. \end{cases}$$

$\theta(x_0, r_3) > 0$ と仮定する．例えば $x_0 \in \Omega$ で $\Omega$ が凸ならば $\theta(x_0, r_3) > 0$，また $x_0 \in \Gamma$ で $\Omega$ が真に凸ならば $\theta(x_0, r_3) > 0$ となる．

以上の仮定の下で，

$$r_1 \leqq r_3 + \mathrm{dist}(x_0, \Gamma) - N\delta / \gamma\theta(x_0, r_3) \ (\equiv s_3)$$

ならば

$$u(x) = 0 \quad \text{on} \quad \Omega \cap B(x_0, s_3)$$

が成立する．

## 3.2、混合境界条件

$k > 0$ とし $\beta(r) = kr$ とする．$\phi \equiv 0$ ととれば境界条件は $\partial u / \partial n + k u|_\Gamma = \psi$ となる．

定理4、定理2の条件（F）が $x_0 \in \overline{\Omega}$ と $r_1 \geqq 0$, $\gamma > 0$ に対して成立し，定理3の条件（N）が $r_4 \geqq 0$ と $\delta > 0$ につい

で成立つとする．$\theta\equiv\theta(x_0,r_4)>0$ と仮定する．このとき

$$r_1\leqq r_4+\mathrm{dist}(x_0,\Gamma)-\left(\frac{\theta^2}{k^2}+\frac{2N\delta}{\gamma k}\right)^{1/2}+\frac{\theta}{k}\ (\equiv s_4)$$

ならば

$$u(x)=0 \qquad \text{on}\ \ \Omega\cap B(x_0,s_4)$$

が成立する．特に，$k\to 0$ とすれば $s_4\to s_3$ となる．

3.3. Signorini 境界条件．

非線型の境界条件を考えよう．$\beta$ を

$$\beta(r)=\begin{cases}0 & r>0 \text{ のとき},\\ ]-\infty,0[ & r=0 \text{ のとき},\\ \text{empty} & r<0 \text{ のとき}\end{cases}$$

と選ぶ．対応する境界条件は

$$u|_\Gamma\leqq\phi,\quad \partial u/\partial n\leqq\psi,\quad (\phi-u|_\Gamma)(\psi-\partial u/\partial n)=0$$

となる．この境界条件は Signorini 境界条件と呼ばれている．

定理5. 条件（F）が $x_0\in\overline{\Omega}$ と $r_1\geqq 0$, $\gamma>0$ について成立し，条件（D）が $r_5\geqq 0$ と $\delta_1>0$ について，条件（N）が $r_5\geqq 0$ と $\delta_2>0$ について各々成立しているとする．$\theta\equiv\theta(x_0,r_5)>0$ と仮定する．このとき，

$$r_1\leqq r_5+\mathrm{dist}(x_0,\Gamma)-\max\left\{\left(\frac{2N\delta_1}{\gamma}\right)^{1/2},\ \frac{N\delta_2}{\gamma\theta}\right\}\ (\equiv s_5)$$

ならば

$$u(x)=0 \qquad \text{on}\ \ \Omega\cap B(x_0,s_5)$$

である．

4. 証明の方針.

定理1－5を証明するには

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 0 & |x-x_0| < s \text{ のとき} \\ -h(|x-x_0|-s) & |x-x_0| \geqq s \text{ のとき} \end{cases}$$

なる形の比較関数を用いて，比較定理を用いる．ここで $h$ は適当な関数，$s$ は適当な定数である．上に述べた定理1－5の証明では $h(r) = (\gamma/2N)r^2$ と選べばよい．

もっと別の $h$ を取って定理1－5の評価を精密にすることができる（T. Nagai [5]，The author [7]）．今，その idea を述べる．$w(r)$ が $x$ の半径 $r=|x|$ の関数であるとすると

$$-\Delta w + \alpha w = -w'' - ((N-1)/r)w' + \alpha w$$

であるから，$h(r)$ として初期値問題

$$w'' + ((N-1)/r)w' - \alpha w = \gamma,$$

$$w(0) = w'(0) = 0$$

の解を選べばよいことがわかる．この解は

$$w(r) = \frac{\gamma}{\alpha}\left\{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\alpha}\,r}{2}\right)^{1-\frac{N}{2}} I_{\frac{N}{2}-1}(\sqrt{\alpha}\,r) - 1\right\}$$

$$= \frac{\gamma}{\alpha}\left\{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma\left(\frac{N}{2}+m\right)}\left(\frac{\sqrt{\alpha}\,r}{2}\right)^{2m} - 1\right\}$$

と表わされる，ここで $I_\nu$ は変形 Bessel 関数，$\Gamma(r)$ は gamma 関数である．この $w$ について次の補題が成立する（T. Nagai [5]）．

補題. 次の性質を持つ $R_\alpha > 0$ が存在する．

(i) $\omega(R_\alpha) = \delta$,

(ii) $R_\alpha < (2N\delta/\gamma)^{1/2}$,

(iii) $R_\alpha \nearrow (2N\delta/\gamma)^{1/2}$, $\alpha \searrow 0$ のとき

(iv) $R_\alpha \searrow 0$, $\alpha \nearrow \infty$ のとき.

この補題を用いて，定理2が $(2N\delta/\gamma)^{1/2}$ を $R_\alpha$ に代えても成立することが証明できる．定理3-5についても類似の補題を証明することができて，定理を精密化することができる．

5. 定理2の別証明.

A. Bensoussan, H. Brezis and A. Friedman [1] は定理1を4節で述べたように比較定理を用いて証明したあと Remark としてこの定理が確率論的手法でも証明できると述べている．ここで，$\alpha = 0$ の場合に定理2の確率論的証明を述べておく.

$B(t)$ を $N$次元 Brown運動とし，確率微分方程式

$$dy = \sqrt{2}\, dB(s), \quad y(0) = x \in \mathbb{R}^N$$

の解を $y_x$ と表わす．$T$ を $y_x$ に関する $\Omega$ からの脱出時刻，$\tau$ を $\tau \leq T$ なる stopping time とし，cost function

$$J_x(\tau) = E\left[\int_0^\tau f(y_x(t))\,dt + \chi_{\tau=T}\,\phi(y_x(T))\right]$$

を考える，ただし $\chi_{\tau=T} = 1$, $\tau=T$ のとき；$= 0$, $\tau<T$ のとき.

A. Bensoussan et J. L. Lions [2] によって変分不等式 (V. I.)

の解 $u$ は

$$u(x) = \inf_{\tau \leqq T} J_x(\tau)$$

と与えられることが知られている（$\alpha = 0$ としている）.

補題　$B(t)$ を $N$ 次元 Brown 運動，$\tau$ を $\tau \geqq t$ なる $B(t)$ に関する stopping time とするならば

$$E|B(\tau) - B(t)|^2 = N E[\tau - t].$$

証明．$B(t)$ が 1 次元 Brown 運動ならば A. Friedman [4] 定理4.4.2、によって

$$E|B(\tau) - B(t)|^2 = E\left[\int_t^\tau 1\, dB(s)\right]^2 = E\int_t^\tau 1^2\, ds$$
$$= E[\tau - t].$$

次に $B(t) = (B_1(t), \cdots, B_N(t))$ を $N$ 次元 Brown運動とする．

$$E|B(\tau) - B(t)|^2 = \sum_{i=1}^N E|B_i(\tau) - B_i(t)|^2$$
$$= N E[\tau - t]. \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

$\mathcal{F}^t$ を $\{B(s);\, 0 \leqq s \leqq t\}$ を可測にする最小の $\sigma$-field，

$\mathcal{F}^\tau$ を；$A \in \mathcal{F}^\tau \Leftrightarrow A \cap \{\tau \leqq t\} \in \mathcal{F}^t,\ \forall t \geqq 0$ ；で定義される $\sigma$-field，

$$p(\xi, A, t) = \int_A \frac{1}{(4\pi)^{N/2}\, t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|\xi - \lambda|^2}{4t}\right) d\lambda$$

を $y_x(t)$ の推移確率関数とする．

定理2の証明．　$x \in \Omega \cap B(x_0, s_2)$ とする．任意の stopping time $\tau$ に対して　$J_x(\tau) \geqq 0$ を示せば　$u(x) \leqq 0$ と合わせて定理が証明できる．

仮定から

$$f(x) \geq \gamma\, \chi_{B^c(x_0,\nu_1)}(x),$$

$$\phi(x) \geq -\delta\, \chi_{B^c(x_0,\nu)}, \quad \nu \equiv \nu_2 + dist(x_0, \Gamma)$$

であるから

$$J_x(\tau) \geq \gamma E\int_0^\tau \chi_{B^c(x_0,\nu_1)}(y_x(t))dt - \delta E[\chi_{\tau=T}\cdot \chi_{B^c(x_0,\nu)}(y_x(T))],$$

ここで，$\chi_{B^c(x_0,\rho)}$ は $B^c(x_0,\rho)$ の定義関数．$\hat{\tau}_1$ を $y_x(t)$ に関する $B^c(x_0,\nu_1)$ の脱出時刻とする．$\nu_1 < \nu$ であるから

$$J_x(\tau) \geq \gamma E[\int_0^{\tau\wedge\hat{\tau}_1} 1\, dt] - \delta E[\chi_{\tau\wedge\hat{\tau}_1=T}\cdot \chi_{B^c(x_0,\nu)}(y_x(T))]$$

$$= \gamma E[\tau\wedge\hat{\tau}_1] - \delta E[\chi_{\tau\wedge\hat{\tau}_1=T}\cdot \chi_{B^c(x_0,\nu)}(y_x(T))]$$

ただし，$\tau\wedge\hat{\tau}_1 = \min\{\tau, \hat{\tau}_1\}$．右辺第二項を計算する．

$$E[\chi_{\tau\wedge\hat{\tau}_1=T}\cdot \chi_{B^c(x_0,\nu)}(y_x(T))]$$

$$= E[E[\chi_{\tau\wedge\hat{\tau}_1=T}\cdot \chi_{B^c(x_0,\nu)}(y_x(T)) \mid \mathcal{F}^{\tau\wedge\hat{\tau}_1}]]$$

$$= E[P(\tau\wedge\hat{\tau}_1=T,\ |y_x(T)-x_0| \geq \nu \mid \mathcal{F}^{\tau\wedge\hat{\tau}_1})]$$

$$= E[P(y(\tau\wedge\hat{\tau}_1)\in\Omega^c,\ |y_x(T)-x_0| \geq \nu \mid \mathcal{F}^{\tau\wedge\hat{\tau}_1})]$$

$$= E[p(x, \Omega^c\cap B^c(x_0,\nu), \tau\wedge\hat{\tau}_1)]$$

$$= \int dP(\omega)\, p(x, \Omega^c\cap B^c(x_0,\nu), \tau\wedge\hat{\tau}_1)\cdot \chi_{B^c(x_0,\nu-s_2)}(y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1))$$

$$+ E[\chi_{B(x_0,\nu-s_2)}(y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1))\cdot p(x, \Omega^c\cap B^c(x_0,\nu), \tau\wedge\hat{\tau}_1)]$$

ここで，$\chi_{B^c(x_0,\nu-s_2)}(y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1)) = 1$ は $|y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1) - x| < \nu - s$ と同値で，$|x-x_0| \leq s_2$ であるから $|y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1) - x_0| < \nu$ である．

このとき，

$$p(x, \Omega^c\cap B^c(x_0,\nu), \tau\wedge\hat{\tau}_1) = P(y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1)\in\Omega^c\cap B^c(x_0,\nu)) = 0.$$

ゆえに，上式の右辺第二項＝0 となる．

$$y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1) - x = \sqrt{2}\, B(\tau\wedge\hat{\tau}_1)$$

であるから，補題を用いて

$$E[\,|y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1) - x|^2\,] = 2E[\,|B(\tau\wedge\hat{\tau}_1)|^2\,] = 2N\,E[\tau\wedge\hat{\tau}_1].$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&\int dP(\omega)\, p(x, \Omega^c\cap B^c(x_0,\ell), \tau\wedge\hat{\tau}_1)\cdot \chi_{B^c(x_0,\ell-s_2)}(y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1))\\
\leqq &\int dP(\omega)\, \chi_{B^c(x_0,\ell-s_2)}(y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1))\\
= &\; P(\,|y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1) - x| \geqq \ell - s_2)\\
\leqq &\; \frac{1}{(\ell-s_2)^2}\, E[\,|y_x(\tau\wedge\hat{\tau}_1) - x|^2\,]\\
= &\; \frac{2N}{(\ell-s_2)^2}\, E[\tau\wedge\hat{\tau}_1].
\end{aligned}$$

以上まとめて

$$\begin{aligned}
J_x(\tau) &\geqq \left(\gamma - \frac{2N\delta}{(\ell-s_2)^2}\right) E[\tau\wedge\hat{\tau}_1]\\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る． (Q.E.D.)

## 6．放物型変分不等式

放物型変分不等式の解の support についても類似の評価が成立する．次の放物型変分不等式を考える．

$$\partial u/\partial t - \Delta u \leqq f, \qquad u \leqq 0$$

$$u(\partial u/\partial t - \Delta u - f) = 0 \quad \text{in } \Omega\times]0,T[,$$

$$u(x,t) = \phi(x,t) \quad \text{on} \quad \Gamma \times ]0,T[,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{on} \quad \Omega.$$

これの解 $u$ に対して，次の評価が成立する．

<u>定理6</u>. 次の条件を仮定する：

(1) $\gamma > 0$ が存在して $f \geq \gamma$ in $\Omega \times ]0,T[$.

(2) $\delta > 0$ が存在して $u_0 \geq -\delta$ on $\Omega$.

(3) $t_0 \in ]\delta/\gamma, T[$, $\varepsilon \geq 0$ が存在して $\Gamma \times ]0,t_0[$ 上で

$$\phi(x,t) \geq -\varepsilon C(t) + \frac{\delta}{t_0}(t - t_0)$$

が成立する．ここで，$C(t)$ は

$$0 \leq C(t) \leq \frac{1}{2N}\left(\gamma - \frac{\delta}{t_0}\right), \quad C'(t) \geq 0 \quad t \in ]0,t_0[$$

をみたす $C^1$-級関数である．

このとき，$\mathrm{dist}(x_0, \Gamma) \geq \sqrt{\varepsilon}$ ならば $u(x_0,t_0) = 0$ が成立する．

注意. 定理6から，形式的な議論ではあるが，定理1を導くことができる： $t_0 \geq \delta/\gamma$, $\varepsilon_0 > 0$, $p \geq 1$ に対して

(*) $$\phi(x,t) \geq -\varepsilon_0 t^p + \frac{\delta}{t_0}(t - t_0)$$

が成り立っているとする．このとき，定理によれば，

(**) $$\mathrm{dist}(x_0, \Gamma) \geq \left(2N t_0^{p+1} \varepsilon_0 / (\gamma t_0 - \delta)\right)^{1/2}$$

ならば $u(x_0,t_0) = 0$ である．実際，

$$C(t) = \frac{\gamma t_0 - \delta}{2N t_0^{p+1}} t^p, \quad \varepsilon = \frac{2N t_0^{p+1} \varepsilon_0}{\gamma t_0 - \delta}$$

ととればよい.

特別な場合として, $\phi$ が今, $t$ に依らないとする. $t=0$ の時の変分不等式の両立条件と $u_0$ に対する仮定によって $\phi(x) \geqq -\delta$ on $\Gamma$ が成立するが, これは (*) において $\varepsilon_0 = \delta/t_0$, $p=1$ とおけば得られる.

(**) において $\varepsilon_0 = \delta/t_0$, $p=1$ とおき, 形式的に $t_0 \to \infty$ とすると

$$\mathrm{dist}(x_0, \Gamma) \geqq (2N\delta/\gamma)^{1/2} \quad ならば \quad u(x_0, \cdot) = 0$$

が得られる.

## 7. Stefan問題への応用

前節に述べた放物型変分不等式の解の support の評価の idea は一次元一相 Stefan問題の自由境界の評価に応用できる.

補題. Stefan問題

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2 \qquad (0 < x < s(t),\ 0 < t)$$

$$u(0,t) = M > 0 \qquad (0 < t)$$

$$u(s(t),t) = 0 \qquad (0 < t)$$

$$\dot{s}(t) = -u_x(s(t),t) \qquad (0 < t)$$

$$s(0) = 0$$

の解 $(s(t), u(x,t))$ に対して

$$0 < s(t) \leqq (2Mt)^{1/2} \qquad (0 \leqq t)$$

が成立する．

<u>証明</u>．補題の Stefan 問題は，変換

$$\theta(x,t) = \int_0^t \tilde{u}(x,\tau)\,d\tau$$

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & 0<x<s(t),\ 0<t \text{ のとき，} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって，次の変分不等式に変換される：

$$\theta_t - \theta_{xx} + 1 \geqq 0, \qquad \theta \geqq 0,$$

$$\theta(\theta_t - \theta_{xx} + 1) = 0 \qquad 0<x,\ 0<t,$$

$$\theta(0,t) = Mt \qquad 0<t,$$

$$\theta(x,0) = 0 \qquad 0<x.$$

補題の結論を示すには，$x \geqq (2Mt)^{1/2}$ に対して $\theta = 0$ が示されればよい．比較関数 $w(x,t)$ を

$$w(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt{2Mt} - x)^2 & x < \sqrt{2Mt} \text{ のとき，} \\ 0 & x \geqq \sqrt{2Mt} \text{ のとき} \end{cases}$$

と選んで，比較定理を適用すればよい．　　　　(Q. E. D.)

次の Stefan 問題を考える：

$$\partial v/\partial t - \partial^2 v/\partial x^2 = 0 \qquad 0<x<s(t),\ 0<t \leqq T,$$

$$v(0,t) = g(t) \qquad 0<t \leqq T,$$

$$v(y(t),0) = 0 \qquad 0 \leqq t \leqq T,$$

$$v(x,0) = v_0(x) \qquad 0<x<l,$$

$$\dot{y}(t) = -v_x(y(t),t) \qquad 0<t<T,$$

$$y(0) = l .$$

このStefan問題の解に対して、次の評価が成立する。

$$\tilde{v}(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & 0<x<s(t),\ 0<t\leqq T \text{ のとき}, \\ 0 & s(t)\leqq x,\ 0<t\leqq T \text{ のとき} \end{cases}$$

とする。

<u>定理7</u>. 正数 $\mu, \nu$ が存在して

$$g(t) \leqq \mu \qquad 0<t\leqq T,$$

$$v_0(x) \leqq \nu \qquad 0<x<l$$

が成り立つとする。このとき、

(i) $$\tilde{v}(x,t) = 0 \qquad x \geqq l + (2t\max\{\mu,\nu\})^{1/2},\quad 0<t\leqq T$$

(ii) $\mu > \nu$ のとき

$$\tilde{v}(x,t) = 0 \qquad x \geqq l+(2t\nu)^{1/2},\quad 0\leqq t\leqq \frac{l^2\nu}{2(\mu-\nu)^2}$$

が成立する。

証明.

$$\theta(x,t) = \int_0^t \tilde{v}(x,\tau)\,d\tau$$

と変換すれば、$\theta$ は変分不等式

$$\theta_t - \theta_{xx} + \theta_0(x) \geqq 0,\qquad \theta\geqq 0,$$

$$\theta(\theta_t - \theta_{xx} + \theta_0(x)) = 0 \qquad 0<x,\quad 0<t\leqq T,$$

$$\theta(x,0) = 0, \qquad 0<x,$$

$$\theta(0,t) = \int_0^t g(s)\,ds, \qquad 0<t\leqq T,$$

をみたす。ただし、

$$\theta_0(x) = \begin{cases} v_0(x) & 0 < x < \ell, \\ -1 & \ell \leqq x. \end{cases}$$

(i) の証明． $s(T) < L$ なる $L > 0$ をとって $Q = ]0, L[ \times ]0, T[$ で考える． $M = \max\{\mu, \nu\}$ として， $w_1(x,t) = Mt$ とおく． $w_1$ は $Q$ 上で比較定理の条件をみたすことがわかるから

$$w_1 \geqq \theta \quad \text{in } Q$$

を得る．特に $x = \ell$ のとき $Mt \geqq \theta(\ell, t)$ を得る．

変分不等式を $]\ell, L[ \times ]0, T[$ に制限して補題を用いると

$$\theta = 0 \qquad x \geqq \ell + \sqrt{2Mt} \text{ のとき}$$

を得る．

(ii) の証明． $s(t)$ は真に単調増加で， $t \to \infty$ のとき $s(t) \to \infty$ だから， $Q_0 = \ell\nu/\mu-\nu$ とし $s(T_0) - \ell = Q_0$ となる $T_0$ をとる．

$$w_2(x,t) = -\frac{\mu-\nu}{\ell}xt + \mu t$$

とすると， $w_2$ は $]0, Q_0[ \times ]0, T_0[$ 上で比較定理の条件をみたす．従って， $w_2 \geqq \theta$ ．特に $x = \ell$ とすると

$$\theta(\ell, t) \leqq \nu t, \qquad 0 < t \leqq T_0$$

であり，補題を $]\ell, L[ \times ]0, T_0[$ で適用して

(*) $$s(t) \leqq \ell + \sqrt{2\nu t} \qquad 0 < t \leqq T_0$$

を得る．

最後に $T_0$ を評価する． $T_0'$ を

$$(\ell + \sqrt{2\nu T_0'}) - \ell = Q_0$$

なるものとする．すなわち

$$T_0' = \ell^2\nu / 2(\mu-\nu)^2 .$$

(*)より　$T_0 \geqq T_0'$ であるから結論を得る．　(Q.E.D.)

付記．定理7は，四ッ谷晶二氏の御教示によるものである．[8], Theorem 4.1 の改良になっている．

References

[1] A. Bensoussan, H. Brezis and A. Friedman, Estimates on the free boundary for quasi variational inequalities, Comm. Partial Differential Equations, 2 (1977), 297 - 321.

[2] A. Bensoussan et J. L. Lions, Problèmes de temps d'arrêt optimal et inequations variationnelles paraboliques, Applicable Anal., 3 (1973), 267 - 294.

[3] H. Brezis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51 (1972), 1 - 168.

[4] A. Friedman, Stochastic differential equations and applications, Vol. 1, Academic Press, 1975.

[5] T. Nagai, Estimates for the coincidence sets of solutions of elliptic variational inequalities, Hiroshima Math. J., 9 (1979), 335 - 346.

[6] N. Yamada, Estimates on the support of solutions of elliptic variational inequalities in bounded domains, Hiroshima Math., J., 9 (1979), 7 - 16.

[7] _____, Estimates on the support of solutions of elliptic variational inequalities in bounded domains II, Funkcial. Ekvac., 22 (1979), 339 - 350.

[8] _____, Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities in bounded cylindrical domains, Hiroshima Math. J., 10 (1980), 337 - 349.