数理解析研究所講究録
第 429 巻 1981 年 73-84

GDデザインについて

広島大・学校教育　景山三平
廿日市高校　田中立造

"目的"　Group Divisible 型の PBIBD (略して GDD) のいくつかの新しい系列と，既知の GDD に対する新しい non-isomorphic solution を与える。

"定義と準備"

GDD$(v, b, r, k, m, n, \lambda_1, \lambda_2)$ は $v = mn$ 個の処理の間に 2-associate association scheme (group divisible association scheme = m groups of n treatments each) をもつ PBIBD のことで，その incidence matrix $N_{v\times b}$ は 次を満たす：

$$NN' = \begin{bmatrix} A & B & \cdots & B \\ B & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B \\ B & \cdots & B & A \end{bmatrix}, \quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} r & & \lambda_1 \\ & \ddots & \\ \lambda_1 & & r \end{bmatrix}}_{n}, \quad B = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{n}$$

λ_1個のブロックで同時に生起する処理は 1st associates であるといい，λ_2個のブロックで同時に生起する処理は 2nd associates であるという。特に $\lambda_1=\lambda_2$ のときは BIBD になる。GDD は次の3つの場合に分類されている：

- singular GDD $\Leftrightarrow$ $r-\lambda_1=0$
- semi-regular GDD $\Leftrightarrow$ $r-\lambda_1>0$, $rk-v\lambda_2=0$
- regular GDD $\Leftrightarrow$ $r-\lambda_1>0$, $rk-v\lambda_2>0$.

GDD の色々な族が知られている。最近 Bush (1979) はアダマール行列を用いていくつかの GDD の族を構成した。本稿では Bush の方法を一般化することより新しい GDD の族を与え，更に新しい non-isomorphic 解の発見へと導く。

"記号"

J は適当な大きさの行列で要素がすべて +1 のもの。$A=(a_{ij})$ に対して $A\otimes B=(a_{ij}B)$ と定義する。m次のアダマール行列 $H_m=(h_{ij})$ $\Leftrightarrow$ $h_{ij}=\pm1$, $H_mH_m'=mI$.

以下 5つの構成法を示しながら論ずる。

構成法 I

A を a normalized H_{4f} whose first row is deleted とする.

B を a normalized H_{4t} whose first column is deleted とする. このとき

$\frac{1}{2}\{J + A \otimes B\}$ ($=K$ とおく) は semi-regular

GDD ($v = 4t(4f-1)$, $b = 4f(4t-1)$, $r = 2f(4t-1)$, $k = 2t(4f-1)$, $m = 4f-1$, $n = 4t$, $\lambda_1 = f(4t-2)$, $\lambda_2 = f(4t-1)$) となる。

これは KK' を計算することにより確かめられる。なお association は 最初の $4t$, 次の $4t$, …, 最後の $4t$ による処理が 1st associates と決める.

(注意) ◎ K' も semi-regular GDD となり そのパラメータは 上記で t と f を交換したものとなる.

◎ $f=1$ と $t=1$ のとき それぞれ Bush (1979) の定理 1 と 定理 2 に対応する.

構成法 II

N を BIBD ($v^* = 2k^*$, b^*, r^*, k^*, λ^*) の incidence matrix とするとき

$$\left[\begin{array}{c:c} N & N \\ \hdashline N & J-N \end{array}\right]$$ は semi-regular GDD ($v=2v^*$, $b=2b^*$, $r=2r^*$, $k=2k^*$, $m=2$, $n=v^*$, $\lambda_1=2\lambda^*$, $\lambda_2=r^*$) となる。

これは最初の v^*, 次の v^* をそれぞれ group と見れば $\lambda_1=\lambda^*+(b^*-2r^*+\lambda^*)=2\lambda^*$, $\lambda_2=\lambda^*+(r^*-\lambda^*)=r^*$ より明らかである。

(構成法Ⅱの応用)

H_{4t} が存在すれば BIBD ($v^*=2t$, $b^*=4t-2$, $r^*=2t-1$, $k^*=t$, $\lambda^*=t-1$) が存在するので [cf. Hedayat and Wallis (1978)], 今の構成法より semi-regular GDD ($v=4t$, $b=8t-4$, $r=4t-2$, $k=2t$, $m=2$, $n=2t$, $\lambda_1=2t-2$, $\lambda_2=2t-1$) が存在する。これは Bush (1979) の定理5そのものである。

$v^*=2k^*$ なる BIBD は色々と知られているが, 特に Preece (1967) は $r^*\leqq 15$ の範囲で 61 個の BIBD をそれらの non-isomorphic solutions も含めて調べている。これを今の構成法に適用することより多くの新しい

non-isomorphic semi-regular GDD を与えることができる.

構成法 III

N を BIBD$(v^*, b^*=3r^*-2\lambda^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ の incidence matrix とするとき 次の手続きで semi-regular GDD$(v=2m,\ b=4(r^*-\lambda^*),\ r=2(r^*-\lambda^*),\ k=m,\ m=m,\ n=2,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=r^*-\lambda^*)$ が $1 \leqq m \leqq v^*$ なる任意の m で存在する. 手続 "N から任意の m 行を先ず選び その中で 1 を $\binom{1}{0}$ で 0 を $\binom{0}{1}$ で置き換え, 更に元の BIBD N に すべて 1 からなる s 列をつけ加えたのち 同様に置き換える". このとき association は最初の 2 つ, 次の 2 つ, …, 最後の 2 つ をそれぞれ 1st associates の group と見ればよい.

このときパラメータは $v=2m$, $b=b^*+s$, $k=m$,

$$r=\begin{cases} r^*+s \\ b^*-r^* \end{cases},\quad \lambda_1=0,\quad \lambda_2=\begin{cases} s+\lambda^* \\ r^*-\lambda^* \\ b^*-2r^*+\lambda^* \end{cases}$$

となり $s=b^*-2r^*$, $b^*=3r^*-2\lambda^*$ とすればパラメータは valid になる.

(構成法 III の応用)

$4t+1$ が素数または素数巾のとき BIBD($v^*=4t+1$, $b^*=8t+2$, $r^*=4t$, $k^*=2t$, $\lambda^*=2t-1$) が存在する [cf. Raghavarao (1971)] ので 今の構成法より semi-regular GDD($v=2m$, $b=4(2t+1)$, $r=2(2t+1)$, $k=m$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2t+1$, $1\leq {}^\forall m\leq 4t+1$) が存在する. これは多くの新しい non-isomorphic 解を与える. たとえば $t=1$ のとき

(I) GDD($v=2m$, $b=12$, $r=6$, $k=m$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $1\leq m\leq 5$)

$t=2$ のとき

(II) GDD($v=2m$, $b=20$, $r=10$, $k=m$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$, $1\leq m\leq 9$)

なる series が得られるが 特に (I) で $m=5$, (II) で $m=5, 6, 7, 8, 9$ のときそれぞれ新しい non-isomorphic 解を与えている。それらは Clatworthy (1973) の記号で云えば SR53, SR55, SR70, SR83, SR93, SR101 である。

H_{4t} が存在 $\Longleftrightarrow$ SBIBD($v^*=b^*=4t-1$, $r^*=k^*=2t-1$, $\lambda^*=t-1$) より今の構成法を用いると semi-regular GDD($v=2m$, $b=4t$, $r=2t$, $k=m$, $m=m$, $n=2$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=t$) の存在が $1\leq m\leq 4t-1$ で云えるが これは Bush (1979) の定理6である. 更に $m=2t$ とおくと symmetric semi-regular GDD をうる.

H_{4t} が存在すれば $H_{(4t)^2}$ も存在するので 今の構成法

より semi-regular GDD ($v=2m$, $b=16t^2$, $r=8t^2$, $k=m$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=4t^2$, $m=m$, $n=2$) が $1 \leqq m \leqq 16t^2-1$ に対して存在する。 Bush (1980) は $m=16t^2-1$ のときを証明している。

構成法 IV

A を a normalized H_{4t} whose first row and first column are deleted とする。

B を regular H_{4f^2} とする。 このとき

$$\frac{1}{2}\{J + B \otimes A\}$$ は regular GDD

($v=b=4f^2(4t-1)$, $r=k=f[2f(4t-1)-1]$, $\lambda_1=f[(4t-2)f-1]$, $\lambda_2=f[(4t-1)f-1]$, $m=4f^2$, $n=4t-1$) となる。

これを構成法 I のときと同様に regular H_{4f^2} の性質を用いて示される。

$f=1$ のとき Bush (1979) の定理4 となる。

"定義" SBIBD ($v=4t-1$, $k=2t-1$, $\lambda=t-1$) N が skew $\Longleftrightarrow$ $N+N'=J-I$

構成法Ⅱ

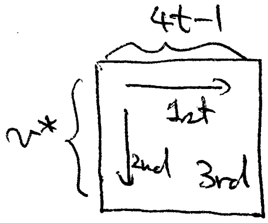
N を skew SBIBD とする.

M を BIBD$(v^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ とする. このとき

$$M \otimes N + (J - I) \otimes I \quad (= P \text{ とおく})$$

は rectangular association scheme をもつ 3-associate PBIBD となり 各パラメータは $v = v^*(4t-1)$, $k = v^* + 2k^*(t-1)$, $b = b^*(4t-1)$, $r = b^* + 2r^*(t-1)$, $\lambda_1 = r^*(t-1)$, $\lambda_2 = b^* - 2r^* + 2\lambda^* t$, $\lambda_3 = r^* + \lambda^*(t-2)$ である.

association scheme は



となる。このとき PP' を N の skewness と N, M の balanced property を用いて計算することにより題意が示される。

(構成法Ⅱの応用)

M として BIBD$(v^* = b^* = 3,\ r^* = k^* = 1,\ \lambda^* = 0)$ を特に取れば

次のことが云える：『skew-SBIBD が存在すれば symmetric regular GDD ($v=b=3(4t-1)$, $r=k=2t+1$, $\lambda_1=t-1$, $\lambda_2=1$) が存在する』。これは Bush (1979) の定理7そのものである。

最後に構成法Ⅴで作られた 3-associate PBIBD の reduction を考えることより GDD を作ることを考える。3つの reduction の可能性がある。

① $\lambda_1=\lambda_2$ (1st associate class と 2nd associate class の combine)： この場合は もし可能であれば L_2 association scheme に reducible であるが パラメータの関係式を用いて この場合の BIBD の不存在性が示せる。

② $\lambda_2=\lambda_3$ ： この場合は GD に reducible であるが それは 次の2つに限ることが示される。

(i) semi-regular GDD ($v=b=9$, $r=k=3$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$)

(ii) semi-regular GDD ($v=12$, $b=18$, $r=6$, $k=4$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$)

これら2つ共に既知のものである。

(注意) (i), (ii) のとき $t=1$ となるが skew-SBIBD ($v'=b'=3$, $r'=k'=1$, $\lambda'=0$) は $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ で存在する。

③ $\lambda_1=\lambda_3$：このとき $t=2$ となる。更に skew SBIBD $(v'=b'=7,\ r'=k'=3,\ \lambda'=1)$ も存在する

			1		1	1
1				1		1
1	1				1	
	1	1				1
1		1	1			
	1		1	1		
		1		1	1	

association の combine は古い 2nd association を新しい 1st association と呼び、古い 1st, 3rd association を新しい 2nd association と呼ぶことにより GD association scheme となる。よって この場合 構成法V を次を導く。

[構成法V′]

BIBD $(v^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ が存在すれば regular GDD $(v=7v^*,\ b=7b^*,\ r=b^*+2r^*,\ k=v^*+2k^*,\ \lambda_1=b^*-2r^*+4\lambda^*,\ \lambda_2=r^*,\ m=7,\ n=v^*)$ が存在する。

(注意) original が symmetric BIBD のときには symmetric regular GDD が作れる。これは多くの新しい series を与える。

本稿の詳細な議論等については 論文
S. Kageyama and T. Tanaka
"Some families of group divisible designs"
(1981, Journal of Statistical Planning and Inference, to appear)
を参照されたい。

参考文献

K.A. Bush (1979). Families of Hadamard group divisible designs. JSPI 3, 387–394

K.A. Bush (1980). Construction of certain balanced and partially balanced incomplete block designs. Submitted.

W.H. Clatworthy (1973). Tables of Two-associate-class Partially Balanced Designs. NBS Applied Math. Ser. No. 63.

A. Hedayat and W.D. Wallis (1978). Hadamard matrices and their applications. Ann. Statist. 6, 1184–1238.

D.A. Preece (1967). Incomplete block designs with $v=2k$. Sankhyā 29, 305–316.

D. Raghavarao (1971). Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments. John Wiley & Sons, Inc., New York.