数理解析研究所講究録
第430巻 1981年 3-12

塑性問題における有限要素解の収束性について

熊本大.理学部　　三好 哲彦

§1.　等方硬化則の仮定のもとでの塑性振動の定式化

物体は平面上の有界領域Ωを占めているとし，この物体の平面内での振動を時間区間 $I=(0,T)$ にわたって観察するものとする。 x_i軸方向への変位をu_i，応力成分をσ_{ij}で表わすとすれば運動方程式は次のように与えられる。

(1.1)　$$\rho \ddot{u}_i - \sum_j \sigma_{ij,j} = b_i \quad \text{in } I\times\Omega \quad (\sigma_{21}=\sigma_{12})$$

ρは定数，b_iは与えられた関数で時間に関して区分的に解析的であると仮定する． $\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_1$ としΓ_0上でu_iはゼロ，Γ_1上で $\sum\sigma_{ij}\cos(n,x_j)=0$ (free) の条件を仮定する。初期条件としては，たとえば，u_iはゼロ，$\dot{u}_i=U$ (given) としUには以下の議論に必要な滑らかさ等を仮定する。 σ_{ij}をu_iで表わすためには次の諸関係が必要である。

(a)　ひずみ－変位関係式：　$u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ とし，

$$\varepsilon_{11}=u_{1,1}\ ,\ \varepsilon_{22}=u_{2,2}\ ,\ \varepsilon_{12}=u_{1,2}+u_{2,1}$$

以下では $\varepsilon=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12})$, $\sigma=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})$ とする。

(b) 降伏条件： $f^2(\sigma) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12} = F^2(\bar{\varepsilon}_p)$

i.e. Mises の条件を使う。$\bar{\varepsilon}_p$ は以下に定義する。

(c) 塑性ひずみ： ひずみは普通回復可能なものとそうでないものとあり，i.e. $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ と考えられ，ε_e 及び ε_p は

(1.2) $$\dot{\sigma} = D\,\dot{\varepsilon}_e \qquad \text{(Hooke の法則)}$$

(1.3) $$\dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{F'}\,\partial f \cdot \partial f^{*}\dot{\sigma}$$

で与えられる。ここで $\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}\right)$，$*$ はベクトルの内積を表わす。又 $F' = \frac{dF}{d\bar{\varepsilon}_p}$，$\bar{\varepsilon}_p = \int_0^t \frac{\|\dot{\varepsilon}_p\|}{\|\partial f\|}dt$（$\|\ \|$ はベクトルの長さ）である。関数 F として典型的なものは $c(a+\bar{\varepsilon}_p)^{\frac{1}{n}}$（$c$, a は定数，$n \geq 1$）であるが，その他のものも次の条件で通常は表わされる。

「F は連続かつ区分的に ~~滑らか~~ 解析的で，$F(0) > 0$，また微分できるところでは $F' > 0$，$F'' < 0$ とする。」

以上の条件を考慮すると，σ は次の関係式により ε と結びつけられる。

(1.4) $$\begin{cases} \dot{\sigma} = D\,\dot{\varepsilon} & \text{if } f(\sigma) < F(\bar{\varepsilon}_p) \quad (\text{elastic}) \\ \dot{\sigma} = \left(D - \dfrac{D\,\partial f\,\partial f^{*} D}{F' + \partial f^{*} D\,\partial f}\right)\dot{\varepsilon} & \text{if } f(\sigma) = F(\bar{\varepsilon}_p) \ \& \ \partial f^{*}\dot{\sigma} \geq 0 \\ & (\text{plastic}) \end{cases}$$

上式で $F' = F'(\bar{\varepsilon}_p)$ であるが，この式は $f(\sigma) = F(\bar{\varepsilon}_p)$ のときに使われるので $F' = F'(F^{-1}(f(\sigma)))$ と考えてもよい。従って $\frac{D\,\partial f\,\partial f^{*} D}{F' + \partial f^{*} D\,\partial f}$ は σ のみの関数と考えられるのでこれを $\bar{D}(\sigma)$ とおけば我々の問

題は次のようになる。

(1.5) $$\rho \ddot{u}_i - \sum_j \sigma_{ij,j} = b_i \qquad \text{in } T\times\Omega$$

(1.6) $$\begin{cases} \dot\sigma = D\dot\varepsilon & \text{if } f(\sigma) < F(\bar\varepsilon_p) \\ \dot\sigma = (D - \bar D(\sigma))\dot\varepsilon & \text{if } f(\sigma) = F(\bar\varepsilon_p) \ \& \ \partial f^* \dot\sigma \geqq 0 \end{cases}$$

ただし、$\dot\varepsilon = \varepsilon(\dot u)$, $\bar\varepsilon_p = \int_0^t \frac{\|\dot\varepsilon_p\|}{\|\partial f\|}dt$, $\dot\varepsilon_p = \frac{1}{F'}\partial f\cdot\partial f^*\dot\sigma$ 。

§2. 有限要素近似

我々は(1.5)~(1.6)の解の存在、一意性、その近似を問題にしたいのであるが、解の近似を作る事から始める。有限要素法を使うためΩを三角形に分割する。話を簡単にするためΩは多角形領域とするが、境界が病的に異常でない限り以下の話は多角形でない場合にも有効である。Pを三角形の頂点であってΓ_0上には含まれないもの全体とする。$P\ni p$にたいし$u^p(t) = (u_1^p(t), u_2^p(t))$を未知函数とし、

$$u^h(t,x) = \sum_{p\in P} u^p(t)\varphi_p(x) \qquad \{\varphi_p(x)\}: \text{piecewise linear basis}$$

を変位uの近似とする。このとき、通常の有限要素近似は

(2.1) $$\rho(\ddot u_i^h, \varphi_p) + \sum_j (\sigma_{ij}^h, \varphi_{p,j}) = (b_i, \varphi_p) \qquad {}^\forall p\in P$$

(2.2) $$\begin{cases} \dot\sigma^h = D\dot\varepsilon^h & \text{if } f(\sigma^h) < F(\bar\varepsilon_p^h) \\ \dot\sigma^h = (D - \bar D(\sigma^h))\dot\varepsilon^h & \text{if } f(\sigma^h) = F(\bar\varepsilon_p^h) \ \& \ \partial f^* \dot\sigma^h \geqq 0 \end{cases}$$

である。ただし、$\dot\varepsilon^h = \varepsilon(\dot u^h)$、初期条件は常識的に近似するとする。(2.1),(2.2)は形式的には(i.e. 各要素の"state"があるか

じめわかってあれば）次の形の連立準線形常微分方程式の初期値問題になる。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\ \dot{u}\\ \sigma\end{pmatrix} = X(t,\dot{u},\sigma)$$

しかし，$\dot{\sigma}=D\dot{\varepsilon}$ を使うか又は他の式を使うべきかは解に依存して定めねばならないので，ここに(2.1)～(2.2)の問題を物理的に妥当な解が得られるように設定できるかという問題が生じる。これには次の事が解決できればよい。

初期値問題の設定：$t\le t_0$ における $(u,\dot{u},\sigma)$ 及び各要素の状態(elastic or plastic)がわかっているとして，t_0 以後の各要素の状態を $t=t_0$ の時点で決定すること。（勿論，t_0 の微少時間後の状態でよい）。筆者の論文[ ][ ]のときと本質的には同じ論法により次の事を示すことができる。

定理：$t=t_0$ において要素の集合 $\mathcal{E}$ が2種類に分かれているとする。$\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$。ここに $\mathcal{E}_1$ は $\mathcal{E}_2$ の t_0 以後の状態をどう決めても t_0 の微少時間後の状態(elastic or plastic)は不変であり，$\mathcal{E}_2$ の要素 e にたいしては，$f(\sigma)=F(\bar{\varepsilon}_p)$ かつ

$$\frac{d^l}{dt^l}(\partial f^* \dot{\sigma})\Big|_{t_0+0}=0 \qquad (0\le l\le k) \qquad k\geqq 0$$

であるとする（k は e とは無関係）。このとき $\mathcal{E}_2\ni e$ にたいしては $\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}(\partial f^* \dot{\sigma})\Big|_{t_0+0}$ の符号は，$\mathcal{E}_2$ の要素の t_0 以後の状態と独立に定まる。（t_0 以後の状態とは，t_0 の微少時間後をelasticとするかplasticとするかということである）

この定理の結果，$t=t_0$ で $f(\sigma)=F(\bar{\varepsilon}_p)$ であった要素が微小時間後，$f(\sigma)<F(\bar{\varepsilon}_p(t_0))$ となるか又は $\partial f^*\dot{\sigma}>0$，あるいは $\partial f^*\dot{\sigma}\equiv 0$ となるかが $t=t_0$ の時点で規定できる。大雑把にいえば次の様にして可能である。まず $\mathcal{E}_1$ として $t=t_0$ で $f(\sigma)<F(\bar{\varepsilon}_p)$ であるものと $\partial f^*\dot{\sigma}\big|_{t_0-0}\neq 0$ であるものとの和を考える。

$$\partial f^*\dot{\sigma} = \partial f^* D\dot{\varepsilon} \sim \partial f^* D\dot{\varepsilon}\left(1-\frac{\partial f^* D\partial f}{F'+\partial f^* D\partial f}\right)$$

であるから，$\dot{\varepsilon}$ の連続性を考慮すれば $\mathcal{E}_1$ に属す要素の微小時間後の状態は t_0 以前の data より決定されている事がわかる。 $\mathcal{E}-\mathcal{E}_1$ の要素にたいしては，定理より，$\frac{d}{dt}(\partial f^*\dot{\sigma})\big|_{t_0+0}$ の符号は $\mathcal{E}_2$ の要素の次の状態と独立に定まるというわけであるから，例えば elastic と仮定して t_0 以後の解を出し，その解の $\frac{d}{dt}(\partial f^*\dot{\sigma})\big|_{t_0+0}$ の符号をみればよい。これが正であればこの要素は t_0 の微小時間後は plastic と仮定し直して解かれるべきであり，負であればそのままでよい。この量がゼロになる要素があればその集合を $\mathcal{E}_2$ とし $k=1$ として上の定理を使えば $\partial f^*\dot{\sigma}=\frac{d}{dt}(\partial f^*\dot{\sigma})=0$ となる要素にたいしても，次階の導関数の $t=t_0+0$ における値がゼロでなければ次の状態を定めることができる。以下これをくり返せばすべての要素にたいし t_0 の微小時間後の状態が $t=t_0$ の時点で決定でき，我々の問題の設定が可能である。このような解を接続して行けば T 全体にわたって問題が設定可能である。

§3. 解のア・プリオリ評価

先ず簡単なエネルギー評価がいとも容易に得られる。

各要素上で $(C=D^{-1})$

$$(3.1)\qquad \dot\varepsilon - C\dot\sigma = \begin{cases} 0 & (\text{elastic}) \\ \frac{1}{F'}\partial f\cdot\partial f^*\dot\sigma & (\text{plastic}) \end{cases}$$

のいずれかが成立しているので、σとの内積を作れば

$$\dot\varepsilon^*\sigma - [C\dot\sigma]^*\sigma \left(-\frac{1}{F'}\partial f\sigma\cdot\partial f^*\dot\sigma\right) = 0$$

簡単な計算により $\partial f\sigma = f$ である。各e上で積分し、それをeについて加えると、Ω_p を塑性状態の要素の集合として、

$$(\dot\varepsilon,\sigma) - (C\dot\sigma,\sigma) - \int_{\Omega_p}\frac{1}{F'}f\cdot\partial f^*\dot\sigma\,dx = 0$$

$\frac{1}{F'}\partial f^*\dot\sigma = \dot\varepsilon_p$ であるから、弾性状態では $\dot\varepsilon_p = 0$ を考慮すると次の等式が容易に導かれる。 $\|\sigma\|_C^2 = (C\sigma,\sigma)$ として、

定理： $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\rho\|\dot u\|^2 + \|\sigma\|_C^2\right] + \int_\Omega f\dot\varepsilon_p\,dx = (b,\dot u)$

高階の導関数に関しては(3.1)の両辺を微分し、( ) で使った論法を使えば、次の評価式を得る。

定理： $\frac{1}{2}\left[\rho\|\ddot u\|^2 + \|\dot\sigma\|_C^2 + \int_\Omega F'(\dot\varepsilon_p)^2dx\right] \le \int_0^t(\dot b,\ddot u)\,dt$

§4 不等式による表現

(2.1)〜(2.2)にたいする初期値問題は、というより(2.2)の条件は単一の不等式で表現できる。このためにパラメータε_pの変換を行う。（この変換は解の一意性の証明を容易にするためであり、不等式での表現のためのみではない。）

いま関数 $F=F(\xi)$ にたいし、変数の変換 $\xi \longrightarrow \zeta$ を

$$\zeta = \int_0^{\xi} \sqrt{F'(\lambda)}\, d\lambda$$

で定義し、この変数に関する関数 $G(\zeta)$ を次式により定める。

$$G'(\zeta) = \sqrt{F'(\xi)} \qquad G(0)=F(0)$$

このとき、容易にわかるように $G(\zeta)=F(\xi)$ が成立する。
関数 G は $G(0)>0,\ G'>0,\ G''<0$ という、F がもっていた性質をそのまま新しい変数に関して持っている。したがって

$$\bar{\varepsilon}^h = \int_0^{\bar{\varepsilon}_p^h} \sqrt{F'(\lambda)}\, d\lambda$$

により新しい硬化パラメータ $\bar{\varepsilon}^h$ を導入すれば、このパラメータに関し $G(\bar{\varepsilon}^h)=F(\bar{\varepsilon}_p^h)$ であり、G は F の性質を保存している。次の記号を使う。

$$B_F = \{ (\tau,\zeta) \in R^3 \times R^1 \ ;\ f(\tau) \le F(\zeta) \}$$

$$B_G = \{ (\tau,\zeta) \in R^3 \times R^1 \ ;\ f(\tau) \le G(\zeta) \}$$

$$K_F = \{ (\tau,\zeta) \in [L^2(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega) \ ;\ (\tau,\zeta) \in B_F \quad \text{a.e. } \Omega \}$$

$$K_G = \{ (\tau,\zeta) \in [L^2(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega) \ ;\ (\tau,\zeta) \in B_G \quad \text{a.e. } \Omega \}$$

$$S^h = \{ (u^h, \sigma^h, \bar{\varepsilon}^h) \ ;\ u^h = \sum_{p\in\Lambda} u^p(t)\varphi_p(x),\ \sigma^h = \sum_e \sigma^e(t)\chi_e,\ \bar{\varepsilon}^h = \sum_e \bar{\varepsilon}^{h,e}(t)\chi_e \}$$

定理：(2.1)～(2.2) は次の問題と同等である。
$(u^h,\sigma^h,\bar{\varepsilon}^h) \in S^h$ で次の条件をみたすものを求めよ。a.e. T に

(4.1) $$\rho(\ddot{u}_i^h, \varphi_p) + \sum_j (\sigma_{ij}^h, \varphi_{p,j}) = (b_i, \varphi_p) \quad \forall p \in \Lambda$$

(4.2) $$(\dot{\varepsilon}^h - C\dot{\sigma}^h, \tau - \sigma^h) - (\dot{\bar{\varepsilon}}^h, \zeta - \bar{\varepsilon}^h) \le 0 \quad \forall (\tau,\zeta) \in K_G ,$$

および $\varepsilon^h = \varepsilon(u^h)$, $(\sigma^h, \bar{\varepsilon}^h) \in K_G$. 微分可能性として は

$$\ddot{u}^h,\ \dot{\sigma}^h,\ \dot{\bar{\varepsilon}}^h \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

を要求し，又初期条件は前と同じである。

証明には次の事を使う。Ω内の各点において，$(\sigma^h,\bar{\varepsilon}^h)$ は $R^3\times R^1$ の closed convex set K_G の内部にあるか，又は，境界上にあるときは，ベクトル

$$\begin{pmatrix}\dot{\varepsilon}^h - C\dot{\sigma}^h\\ -\dot{\bar{\varepsilon}}^h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial f\\ -G'(\bar{\varepsilon}^h)\end{pmatrix}\dot{\bar{\varepsilon}}^h_p$$

が K_G の外向き法線に平行である。尚 (4.1)〜(4.2) の解の一意性は標準的な手法で示せる。

§5 収束性

領域の分割が小さくなって行くとき（記号的に $h\to 0$ で表わす），(2.1)〜(2.2) の解 $(u^h,\sigma^h,\bar{\varepsilon}^h)$ はある函数に収束する。この函数を表わすために次のような問題を考る。$\mathcal{D}_2^1(\Omega,\Gamma_0)$ により，$C^\infty(\bar{\Omega})$ に属し Γ_0 の近傍で $\equiv 0$ となる函数全体を $W_2^1(\Omega)$ ノルムで完備化したものを表わす。

問題：$(u,\sigma,\bar{\varepsilon})\in[L^\infty(0,T;L^2(\Omega))]^7$ で次の条件を満たすものを求む。

a.e.T; (5.1) $\rho(\ddot{u}_i,\varphi)+\sum_j(\sigma_{ij},\varphi_{,j})=(b_i,\varphi)$ $\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}_2^1(\Omega,\Gamma_0)$

(5.2) $(\dot{\varepsilon}-C\dot{\sigma},\tau-\sigma)-(\dot{\bar{\varepsilon}},\xi-\bar{\varepsilon})\le 0$ $\quad\forall(\tau,\xi)\in K_G$,

および $\varepsilon=\varepsilon(u)$, $(\sigma,\bar{\varepsilon})\in K_G$. 微分可能性として次の条件を課す。

$(u,\dot{u})\in L^\infty(0,T;\mathcal{D}_2^1(\Omega,\Gamma_0))$, $(\ddot{u},\dot{\sigma},\dot{\bar{\varepsilon}})\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. 又初期条件.

証明は標準的な手法で可能である。尚，$(\sigma,\bar{\varepsilon})\in K_G$ の証明は次のように考えればよい。π を $R^3\times R^1 \to B_G$ の射影（ユークリッドの距離での）とする。π の連続性及び $\|\pi(\sigma,\bar{\varepsilon})\|\leq\|(\sigma,\bar{\varepsilon})\|$ を考慮すれば，$(\sigma,\bar{\varepsilon})\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ であれば $\pi(\sigma,\bar{\varepsilon})$ も然り。$(\tau,\xi)\in B_G$ にたいし，ベクトルの内積

$$<(\sigma,\bar{\varepsilon})-\pi(\sigma,\bar{\varepsilon}),\ (\tau,\xi)-\pi(\sigma,\bar{\varepsilon})>$$

を考えると，これは a.e. T 上で a.e. Ω について有界かつ非正となる。故に $(\tau,\xi)\in K_G$ にたいし常に次式が成立する。

$$\int_0^T\left((\sigma,\bar{\varepsilon})-\pi(\sigma,\bar{\varepsilon}),\ (\tau,\xi)-\pi(\sigma,\bar{\varepsilon})\right)_\Omega dt\leq 0$$

$(\sigma^h,\bar{\varepsilon}^h)\in K_G$ であるから，この式の (τ,ξ) として $(\sigma^h,\bar{\varepsilon}^h)$ がとれるが，$L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 上 $(\sigma^h,\bar{\varepsilon}^h)$ が $(\sigma,\bar{\varepsilon})$ へ弱*収束する（$\underbrace{\text{という}}_{\text{考えてもよいと}}$）事から，

$$\int_0^T\|(\sigma,\bar{\varepsilon})-\pi(\sigma,\bar{\varepsilon})\|_\Omega^2 dt=0$$

i.e., a.e. T 上で，$(\sigma,\bar{\varepsilon})-\pi(\sigma,\bar{\varepsilon})=0$ i.e. $(\sigma,\bar{\varepsilon})\in B_G$ が a.e. Ω 上で成立する。故に $(\sigma,\bar{\varepsilon})\in K_G$.

§6. 強収束性

標準的な手法で次の事が証明できる

定理：u_*^h を Γ_0 上での境界条件をみたす任意の区分的一次関数とし，$\bar{\varepsilon}_*=\varepsilon(u_*^h)$ とする．$(u^h,\sigma^h,\bar{\varepsilon}^h)$ を有限要素解とすれば，$0\leq t\leq T$ にたいし次の評価式が成立する．

$$\frac{1}{2}\left[\rho\|\dot{u}-\dot{u}^h\|^2+\|\sigma-\sigma^h\|_C^2+\|\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^h\|^2\right]$$
$$\leq \int_0^t\left[\rho(\ddot{u}-\ddot{u}^h,\dot{u}-\dot{u}^h_*)+(\sigma-\sigma^h,\dot{\varepsilon}-\dot{\varepsilon}^h_*)\right]dt$$

この右辺は近似理論により $\to 0$ $(h\to 0)$ となる．

以上で有限要素解が上の意味での真の解へ強収束するという事が証明された．この収束のオーダーを出すには真の解の滑らかさがこの定式化では不十分であり，定式化のレベルでの一層の発展が望まれる．

文献

(1) Miyoshi, T; Elastic-plastic vibration of a rod R.I.M.S. Kyoto Univ. Vol.16 No.2 (1980)

[2] Miyoshi, T; On existence proof in plasticity theory Kumamoto J. Sci (Math.) Vol.14 No.1 (1980)

(3) Jhonson, C: On plasticity with hardening, J. Math. Anal. Appl. 62 (1978)