数理解析研究所講究録
第430巻 1981年 39-50

2次元Euler方程式の外部問題

東大　数養　　菊地慶祐

序

平面上．有限個の物体$O_1,\cdots,O_m$を過る非圧縮理想流体の運動を考える．O_jの境界Γ_j($j=1,\cdots,m$)は互いに他と交わらない十分滑らかな単純閉曲線とする。流体は$\Gamma=\Gamma_1+\cdots+\Gamma_m$の外部領域$\Omega=\mathbb{R}^2\setminus(O_1\cup\cdots\cup O_m)$に存在し．その運動は$Q_T=\Omega\times[0,T]$上においてEuler方程式

$$
(\mathrm{E}.1)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v+(v\cdot\nabla)v+\nabla p=f \\ \mathrm{div}\, v=0 \end{cases}
$$

で記述されるものとする。また初期条件は

$$(\mathrm{E}.2)\qquad v(x,0)=a(x) \qquad x\in\Omega$$

とし、

無限遠方においては

$$(\mathrm{E}.3)\qquad \lim_{|x|\to\infty}v(x,t)=v_\infty \qquad t\in[0,T]$$

境界条件は

$$(\mathrm{E}.4)\qquad v\cdot n_{|\Gamma}=0 \qquad t\in[0,T]$$

とする。

ここで$v=v(x,t)$は速度ベクトル，$p=p(x,t)$は(スカラー値)圧力，$f=f(x,t)$は外力ベクトル，$a=a(x)$は初期速度ベクトル，$v_\infty=(v_\infty^1,v_\infty^2)$は定数ベクトル，$v\cdot n_{|\Gamma}$は$v$の$\Gamma$上

での外向き法線成分を表わす。

この小論では、(E.1)〜(E.4)を満たす解$\{v, p\}$の存在と一意性について考える。

§1. Notation、結果及び歴史

2次元のrotationは、スカラー値関数φに対しては、$\mathrm{rot}\,\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$，ベクトル値関数$u=(u^1, u^2)$に対しては$\mathrm{rot}\, u = \frac{\partial u^2}{\partial x_1} - \frac{\partial u^1}{\partial x_2}$で定義される。

$B(X)$；X上有界連続な関数全体　norm　$\|\cdot\|_{L^\infty(X)}$．

$w \in L^\rho_1(\Omega) \Leftrightarrow \|w\|_{L^\rho_1(\Omega)} \equiv \int_\Omega (1+|x|^\rho)|w(x)|\,dx < \infty$．

$w \in L^\rho_1(\Omega_T) \Leftrightarrow \|w\|_{L^\rho_1(\Omega_T)} \equiv \int_0^T \|w(\cdot,t)\|_{L^\rho_1(\Omega)}\,dt < \infty$．

$h \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow h \in B(\overline{\Omega})$かつ$h$はexponent λの一様Hölder連続．

$h \in C^{\lambda,0}(\overline{\Omega}_T) \Leftrightarrow h \in B(\overline{\Omega}_T)$かつ$h(x,t)$は$x$についてexponent λの一様Hölder連続．

その他一般的に使用されるnotationを用いる。

また、スカラー値関数φに対しては、形式的な計算により$\mathrm{div}\,\nabla\varphi = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\varphi$，$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\varphi = 0$，$\mathrm{rot}\,\nabla\varphi = 0$，$n\cdot\mathrm{rot}\,\varphi|_\Gamma = \tau\cdot\nabla\varphi|_\Gamma \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\Big|_\Gamma$，$\tau\cdot\mathrm{rot}\,\varphi|_\Gamma = -n\cdot\nabla\varphi|_\Gamma \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_\Gamma$が成立する。ただし$n=(n_1, n_2)$は$\Gamma$上の外向き法線ベクトルであり，$\tau=(\tau_1,\tau_2)$は$\Gamma$上の接ベクトルで$(\tau_1,\tau_2)=(-n_2, n_1)$を満たしているものとする。

$\boxed{\text{定理}}$

$0<T<\infty$, $0<\theta$, $0<\lambda<1$ とする。

a, f に対して次の仮定をおく。

(i) $a \in C^1(\Omega) \cap B(\bar{\Omega})$, $\mathrm{rot}\, a \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}) \cap L_1^{\theta}(\Omega)$,

$\mathrm{div}\, a = 0$, $a \cdot n|_{\Gamma} = 0$, $a|_{|x|\to\infty} = v_\infty$.

(ii) $f \in C^{1,0}(Q_T) \cap B(\bar{Q}_T)$,

$\mathrm{rot}\, f \in C^{\lambda,0}(\bar{Q}_T) \cap L_\infty([0,T]; L_1(\Omega)) \cap L_1^{\theta}(Q_T)$.

このとき(E.1)〜(E.4)の解$\{v, p\}$が存在して

$v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x_j}, \nabla p \in B(\bar{Q}_T)$ $(j=1,2)$ が成立する。

さらに、もし a と f が次の条件

$\nabla(\mathrm{rot}\, a) \in B(\bar{\Omega}) \cap L_1(\Omega)$, $\nabla(\mathrm{rot}\, f) \in B(\bar{Q}_T) \cap L_1(Q_T)$ を

満たすならば、上のような解$\{v, p\}$は一意である。

(ただし、pについては、tのみの関数を加える自由度はある。)

〈歴史〉. Ωが2次元有界領域の場合、最初にWolibner[1]によって解の存在が示された。(境界の内部の各成分上で循環量が0の場合)。一般の2次元有界領域に対しては Judovič [2]が弱解の存在を、Kato[3]が古典解の存在を示した。これらはいずれも、渦の方程式及び境界のまわりでの循環を考慮して解を構成している。また、他の方法としてBardos[4]の結果も興味深い。$\Omega = R^2$の場合はMcGrath[5]の仕事がある。

§2. 解の構成

基本的には[3]の議論に従って、渦の方程式及び境界のまわりでの循環を考慮することにより、(E.1)～(E.4)の解を構成していく。

2.1. Irrotational flow

境界が十分滑らかならば、single layer potential 及び double layer potential を用いて次の Lemma 1, 2 を満たす irrotational flow を構成できる。

<u>Lemma 1</u>

$\overline{\Omega}$ 上の flow $u_k = u_k(x)$ $(k=1,\cdots,m)$ が存在して、次の性質をもつ。

(i) $\operatorname{div} u_k = 0$ (ii) $\operatorname{rot} u_k = 0$ (iii) $u_k \cdot n_{|\Gamma} = 0$

(iv) $\lim_{|x|\to\infty} u_k(x) = 0$ (v) $\int_{\Gamma_j} u_k \cdot \tau \, d_x\Gamma = \delta_{jk}$ $(j=1,\cdots,m)$

(vi) $\| u_k \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \sum_{j=1}^{2} \| \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} < \infty$.

<u>Lemma 2</u>

$\overline{\Omega}$ 上の flow $u_0 = u_0(x)$ が存在して次の性質をもつ。

(i) $\operatorname{div} u_0 = 0$ (ii) $\operatorname{rot} u_0 = 0$ (iii) $u_0 \cdot n_{|\Gamma} = 0$

(iv) $\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) = v_\infty$ (v) $\int_{\Gamma_j} u_0 \cdot \tau \, d_x\Gamma = 0$ $(j=1,\cdots,m)$

(vi) $\| u_0 \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \sum_{j=1}^{2} \| \frac{\partial}{\partial x_j} u_0 \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} < \infty$.

2.2.

まず、ベクトル値関数$v(x,t)$が

$$(2.1)\quad \int_{\Gamma_j}\left\{\frac{\partial}{\partial t}v+(v\cdot\nabla)v-f\right\}\cdot\tau\, d_x\Gamma=0 \qquad (j=1,\cdots,m)$$

$$(2.2)\quad \int_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial t}v+(v\cdot\nabla)v-f\right\}\cdot \mathrm{rot}\,\Phi\, dx=0 \qquad \text{for } {}^\forall\Phi\in C_0^\infty(\Omega)$$

かつ(E.1)の第2式及び(E.2)～(E.4)を満たせば、(E.1)～(E.4)の解であることは次のLemmaよりわかる。

Lemma 3

$u\in B(\overline{Q}_T)$は次の2つの条件を満たすベクトル値関数とする。

(i) $\int_{\Gamma_j} u\cdot\tau\, d_x\Gamma=0 \qquad (j=1,\cdots,m)$

(ii) $\int_{\Omega} u\cdot \mathrm{rot}\,\Phi\, dx=0 \qquad \text{for } {}^\forall\Phi\in C_0^\infty(\Omega).$

このとき、スカラー値関数$P(x,t)$が存在して$\nabla P=u$.

スカラー値関数$w(x,t)$に対して$\mathrm{rot}\,G(w)$を次のように定義する。

$$\mathrm{rot}\,G(w)(x,t)=\int_{\Omega}\mathrm{rot}_x G(x,y)\,w(y,t)\,dy\ ,$$

ただし$G(x,y)$は$-\Delta$のzero-Dirichlet条件の"一般化された"Green関数とする。　$F_1(w)$をLemma 1, 2のu_j $(j=0,\cdots,m)$を用いて

$$(2.3)\quad \begin{cases} F_1(w)(x,t)=\mathrm{rot}\,G(w)+u_0+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)u_j \\ \lambda_j(t)=\int_0^t\int_{\Gamma_j}f\cdot\tau\, d_x\Gamma+\int_{\Gamma_j}a\cdot\tau\, d_x\Gamma-\int_{\Gamma_j}\tau\cdot\mathrm{rot}\,G(w)\,d_x\Gamma \end{cases}$$

で定義すれば、$F_1(w)$は（微分可能性に目を瞑れば）$\lambda_j(t)$の定義及びLemma 1, 2より(2.1)かつ$\mathrm{div}\,F_1(w)=0$,

$\mathrm{rot}\,F_1(w)=w$, (E.4)を満たしていることは、定理の前に挙げた事実を用いれば、容易にわかる。

よって $F_1(w)$ が(2.1), (E.2), (E.3) を満たすように w を与えれば、$F_1(w)$ は(E.1)〜(E.4)の解となる。

議論をもっと正確にしよう。

$B(\overline{Q}_T)$ の部分集合 $S(M, L)$ を次のように定義する。

$$S(M, L) = \{ w \in B(\overline{Q}_T) \cap L_\infty(L_1^\theta(\Omega))\ ;\ \|w\|_{L_\infty(L_1^\theta(\Omega))} \leqq L,$$
$$\|w\|_{L_\infty(\overline{Q}_T)} + \|w\|_{L_\infty(L_1(\Omega))} \leqq M \}.$$

ただし $L_\infty(L_1(\Omega)) \equiv L_\infty([0, T]\ ;\ L_1(\Omega))$, $L_\infty(L_1^\theta(\Omega))$ も同様。

次に $S(M, L)$ を定義域とする operator F を $F_2 \circ F_1$ で定義する。

F_1 として(2.3)を用いる。(定義域 $D(F_1) = S(M, L)$).

$\overline{Q}_T$ 上の stream line $(U_{s,t}(x), s) \in \overline{Q}_T$ を

$$(2.4) \begin{cases} \dfrac{d}{ds} U_{s,t}(x) = F_1(w)(U_{s,t}(x), s) \\ U_{t,t}(x) = x \end{cases}$$

で定義する。

各 $(x, t) \in \overline{Q}_T$ に対して stream line が一意に定まることは、後に示す Lemma 4 が保証する。

$F_1 S(M, L)$ を定義域とする operator F_2 は次のように定義される。

$$(2.5)\quad F_2(F_1 w)(x, t) = \zeta(x, t) = \mathrm{rot}\, a(U_{0,t}(x)) + \int_0^t \mathrm{rot} f(U_{s,t}(x), s)\, ds$$

ただし、$U_{s,t}(x)$ は $F_1(w)$ に対応した stream line である。

このとき $\zeta = Fw$ は以下の一階偏微分方程式

$$(2.6) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\zeta + (F_1 w \cdot \nabla)\zeta = \beta \equiv \mathrm{rot}\, f \\ \zeta|_{t=0} = \alpha \equiv \mathrm{rot}\, a \end{cases}$$

の弱解であることは、容易にわかる。((2.4), (2.5))

特に、もし w が F の不動点ならば、w は渦方程式

$$(2.7)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}w + (v\cdot\nabla)w = \beta \\ w|_{t=0} = \alpha \qquad \text{ただし } v = F_1(w)\ (\mathrm{rot}\, v = w) \end{cases}$$

の弱解である。即ち $F_1(w)$ は (2.2) を満たす。

F が不動点を持つことを Schauder の不動点定理を用いて示そう。まず、$S(M,L)$ は任意の $M, L > 0$ に対して $\mathcal{B}(\overline{Q}_T)$ の閉凸部分集合になっていることに注意する。よって次の3つの性質を示せばよい。

i) $FS(M,L) \subset S(M,L)$、ii) $FS(M,L)$ は $\mathcal{B}(\overline{Q}_T)$ の相対コンパクト部分集合、iii) F は $\mathcal{B}(\overline{Q}_T)$ の位相で連続。

次の Lemma は、F が上の i)〜iii) の性質を持っていることを示す為の key lemma である。

<u>Lemma 4</u>

$w \in S(M,L)$ とする。このとき $F_1(w)$ は次の性質をもつ。

(i) $\|F_1(w)\|_{L^\infty(\overline{Q}_T)} \leqq K$、ここで K は M, $\|\alpha\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$, $\|f\|_{L^\infty(\overline{Q}_T)}$, T, Γ のみに依存する定数である。

(ii) 任意の $x \in \overline{\Omega}$ に対して、$F_1(w)(x,t)$ は $[0,T]$ 上 t の関数として連続である。

(iii) 任意の (x,t), $(y,t) \in \overline{Q}_T$ に対して

$$|F_1(w)(x,t) - F_1(w)(y,t)| \leqq H|x-y|\chi(|x-y|),$$

ここで H は x, y, t には独立な定数であり、又 $\chi(r)$ は

$(0,\infty)$ 上の連続関数で以下のように定義される；

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } r \geqq 1 \\ 1 + \log \frac{1}{r} & \text{for } 0 < r < 1 \end{cases}$$

この lemma の証明は $G(x,y)$ の1階及び2階微分の評価を用いてなされるが、煩雑なので省略する。

<u>Lemma 5</u>

$M = \|\alpha\|_{L_\infty(\bar\Omega)} + T\|\beta\|_{L_\infty(\bar Q_T)} + \|\alpha\|_{L_1(\Omega)} + \|\beta\|_{L_1(Q_T)}$

かつ $L = \|\alpha\|_{L_1^\varphi(\Omega)} + \|\beta\|_{L_1^\varphi(Q_T)} + T^\varphi K^\varphi M$ とする。ただし K は Lemma 4 (i) で現われた定数である。

このとき　$FS(M,L) \subset S(M,L)$ が成立する。

証明の概略を示しておく。

$w \in S(M,L)$，$\zeta = Fw$ とする。(2.5) より直ちに

$\|\zeta\|_{L_\infty(\bar Q_T)} \leqq \|\alpha\|_{L_\infty(\bar\Omega)} + T\|\beta\|_{L_\infty(\bar Q_T)}$ を得る。

次に $\mathrm{div}\, F_1(w) = 0$（正確には $w \in S(M,L)$ では $F_1(w)$ の微分可能性は出てこない。よって Friedrichs mollifier により近似してやらなければならない。）を考慮すれば、$F_1(w)$ に対応する stream line $U_{s,t}(x)$ は測度保存の性質をもつ。即ち、$U_{s,t}(x)$ の Jacobian $=1$ である。　よって変数変換で

$\int_\Omega |\alpha(U_{0,t}(x))|\,dx = \int_\Omega |\alpha(x)|\,dx$ が示せる。残りのものについても、同様に扱える。($\|\zeta\|_{L_\infty(L_1^\varphi(\Omega))}$ に対しては (2.4) と Lemma 4 (i) を考慮すればよい。)

以後M, Lを Lemma 5のようにとり、S(M, L)をSで表わす。
Lemma 4 (iii) より Katoの方法が適用できて次の lemmaを得る。(see [3] Lemma 2.6 , 2.7)

Lemma 6

λ, H_1をそれぞれα, βの x-Hölder exponent 及び定数とする。$\gamma = e^{-2HT}$とする，ただし H は Lemma 4 (iii) で現われたものとする。 もし$\zeta \in FS$ ならば、次の不等式が成立する。

(i) $|\zeta(x,t) - \zeta(y,t)| \leqq H_1(1+T)\,|x-y|^{\gamma\lambda}$

for all (x,t), $(y,t) \in \overline{\Theta_T}$.

(ii) $|\zeta(x,t_1) - \zeta(x,t_2)| \leqq H_2\,|t_1-t_2|^{\gamma\lambda}$

for all (x,t_1), $(x,t_2) \in \overline{\Theta_T}$

ただし H_2 は H_1 及び K のみに依存する定数。

上の Lemma 6 は FS の元が x, t に関して一様 Hölder 連続であることを示している。よって非有界領域に拡張された Ascoli の定理 (この定理を適用するには $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset FS$ に対して，n, t について一様に"$\zeta_n(x,t) \to 0$ as $|x| \to \infty$"を示す必要があるが、それも言えるので) を用いて次の Lemma が証明される。

Lemma 7

FS は $B(\overline{\Theta_T})$ の相対コンパクト部分集合である。

Lemma 8

Fは $B(\overline{\Omega}_T)$ の位相で S 上連続である。

Fの定義より、ほとんど明らかであろうが、一言付け加えておくと、この証明のために"$\|\zeta\|_{L_\infty(L^p_\theta(\Omega))} \leqq L$ for $\zeta \in S$"が必要となる。すなわち 次の不等式

"$$\int_\Omega |\varphi(x,t)|\,dx \leqq C\,\|\varphi\|^{\frac{p-1}{p}}_{L_\infty(\overline{\Omega}_T)} \cdot \|\varphi\|^{\frac{1}{p}}_{L_\infty(L^p_\theta(\Omega))}$$

ここで $C = \left(\int_\Omega (1+|x|^\theta)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$, $1 < p < \frac{\theta+2}{2}$"

を必要とする。

Lemma 5, 7, 8より Fに Schauder の不動点定理が適用できることがわかった。またFの不動点 $\tilde{\omega}$ に対しては、Lemma 6 (i) より $\tilde{\omega}$ の x についての一様Hölder連続が言えるので 楕円型方程式のよく知られた議論を援用すれば $v = F_1(\tilde{\omega})$ の x と t についての regularity 即ち $\frac{\partial}{\partial t}v, \frac{\partial}{\partial x_j}v \in B(\overline{\Omega}_T)$ が示される。また $\tilde{\omega}$ に対しては $\lim_{|x|\to\infty} \mathrm{rot}\,G(\tilde{\omega})(x,t) = 0$ が容易に示されるので Lemma 1, 2 を用いて $\lim_{|x|\to\infty} v(x,t) = v_\infty$ を得る。よって残りは(E.2)を満たすことのみである。これは次の Lemma を用いて実行される。

Lemma 9

ベクトル値関数 $V \in C^1(\Omega) \cap B(\overline{\Omega})$ が次の条件を満たすとする。

(i) $\mathrm{div}\,V = 0$ (ii) $\mathrm{rot}\,V = 0$ (iii) $V|_{|x|\to\infty} = 0$

(iv) $V \cdot n|_\Gamma = 0$ (v) $\int_{\Gamma_j} V \cdot \tau\,d_x\Gamma = 0$ $(j = 1, \cdots, m)$.

このとき $\overline{\Omega}$ 上で $V=0$.

証明は外部 Neumann 問題の一意性を用いる。

§3. 一意性について（証明の概略）

まず、解の一意性が成立する仮定の下では、渦方程式(2.7)が、古典解を持つことに注意する。§2で構成した解を $\{v_1, p_1\}$, 他の解を $\{v_2, p_2\}$ とする。$\overline{v}=v_1-v_2$, $w_1=\mathrm{rot}\, v_1$ $w_2=\mathrm{rot}\, v_2$, $\overline{w}=w_1-w_2$ とおけば、境界のまわりでの循環及び Lemma 9 を考慮することにより、$\overline{v}$ は

$$\overline{v}=\mathrm{rot}\, G(\overline{w})+\sum_{j=1}^{m}\mu_j(t)\, u_j \quad \text{と表わされる。}$$

ただし u_j は Lemma 1 の flow であり $\mu_j(t)$ は

$$\mu_j(t)=-\int_{\Gamma_j}\mathrm{rot}\, G(\overline{w})\cdot\tau\, d_x\Gamma \quad (j=1,\cdots,m) \text{である。}$$

よって $\overline{w}=0$ を示せば $\overline{v}=0$ が示せることになる。

$T_1=\inf_{[0,T]}\{t;\ \overline{w}\neq 0 \text{ for some } x \text{ in } \Omega\}$ とおくと、$\{v_1, w_1\}$ 及び $\{v_2, w_2\}$ は (2.7) の解であることから

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial t}+(v_2\cdot\nabla)\overline{w}=-(\overline{v}\cdot\nabla)w_1\\ \overline{w}\,|_{t=T_1}=0\end{cases} \quad \text{が成立する。}$$

上式を評価することで 任意の $T_2\in(T_1, T]$ に対して

"$\|\overline{w}\|_{L_\infty([T_1,T_2];L_1(\Omega))}\leq(T_2-T_1)E\|\overline{w}\|_{L_\infty([T_1,T_2];L_1(\Omega))}$

ただし E は T_2 に独立な定数" が成立するので $\overline{w}=0$ を得る。このとき $\nabla(P_1-P_2)$ についてはほとんど明らかであろう。

References

[1] W. Wolibner ; Un theorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment longue.
Math Z. 37 (1933) p.p. 698 – 726.

[2] V. I. Judovič ; A two dimensional problem of unsteady flow of an ideal incompressible fluid across a given domain.
A.M.S. Translation. ser. 2. 57 (1966) p.p. 277 – 304.

[3] T. Kato ; On classical solution of the two-dimensional non-stationary Euler equation.
Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967) p.p. 188 – 200.

[4] C. Bardos ; Existence et unicité de la solution de l'equation d'Euler en dimension deux.
J. Math. Anal. Appl. 40 (1972) p.p. 769 – 790

[5] F. J. McGrath ; Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids.
Arch. Rat. Mech. Anal. 27 (1968) p.p. 329 – 348.