数理解析研究所講究録
第 430 巻 1981 年 98-109

Boltzmann方程式の外部定常流解の存在と安定性

阪市大工　鵜飼正二
京大教養　浅野潔

物体の廻りの気体の流れをBoltzmann方程式によって考察する。従来この問題は専ら(圧縮性)Euler方程式により考察されていた[2],[5]. また流れが非圧縮性ならば周知のようにNavier-Stokes方程式に関する多くの結果がある。ここでは無限遠方での流速が一定でかつ小さい時, Boltzmann方程式の定常解が存在しかつ安定であることを示す。存在証明にはNash-Mosenの陰関数定理が必要となる。

物体の占める領域を $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n$ として次を仮定する。

[仮定 1]　$\mathcal{O}$は$\mathbb{R}^n$の有界凸領域で境界$\partial\mathcal{O}$は区分的にC^1級.

$\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\bar{\mathcal{O}}$ を外部領域とする. $\partial\Omega=\partial\mathcal{O}$である. 無限遠の流速を $c\in\mathbb{R}^n$ とする. Boltzmann方程式の未知関数は時刻tに位置$x\in\Omega$, 速度$\xi\in\mathbb{R}^n$を持つ気体粒子(分子)の(確率)密度 $f=f(t,x,\xi)$ であり, 今の場合次の初期－境界値問題を考えることになる.

(1)　$\frac{\partial f}{\partial t}=-\xi\cdot\nabla_x f+Q[f,f]$,　$(t,x,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^n$,

(2)　$f^+=Cf^-$,　$(t,x,\xi)\in\mathbb{R}_+\times S^+$,

(3)　$f\to f_c(\xi)\equiv e^{-\frac{1}{2}|\xi-c|^2}$, $(|x|\to\infty)$,　$(t,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$,

(4)　$f|_{t=0}=f_0$,　$(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n$.

(1) は Boltzmann 方程式で，・は $\mathbb{R}^n$ の内積，Q は気体粒子の2体衝突を記述する2次の非線形作用素で

$$Q[f,f] = \iint_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} g(|\xi-\xi'|,\theta)\{f(\eta)f(\eta')-f(\xi)f(\xi')\}d\xi' d\omega,$$

$$f(\eta) = f(t,x,\xi) \quad etc, \quad \eta = \xi-((\xi-\xi')\cdot\omega)\omega, \quad \eta' = \xi' + ((\xi-\xi')\cdot\omega)\omega,$$

$$\cos\theta = (\xi-\xi')\cdot\omega/|\xi-\xi'|, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

g は粒子の相互作用ポテンシァルにより定まり，次を仮定する.

[仮定 2] ポテンシァルは Grad の cutoff hard potential [3].

大雑把に言って $0 < {}^{\exists}g_0 \le g(v,\theta)/(v^{\gamma}|\cos\theta|) \le g_1$ なる定数 g_0, g_1, $\gamma \ge 0$ が存在すればよい．$v = |\xi-\xi'|$ である．g はもちろん可測とする．具体的な例としては

hard ball model; $\quad g(v,\theta) = g_0|(\xi-\xi')\cdot\omega| = g_0 v|\cos\theta|$

inverse power law potential ($\propto r^{-s}$; $s>2$, r = 粒子間距離);

$$g(v,\theta) = g_0(\theta)v^{\gamma}, \quad \gamma = (s-5)/(s-2).$$

後者は $s \ge 5$ かつ $g_0(\theta) > 0$ が $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ の近傍で 0 となればよい。

(2) は $\partial\Omega$ での境界条件。$S^{\pm} = \{(x,\xi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^n ; n(x)\cdot\xi \gtrless 0\}$, $n(x)$ は $\partial\Omega$ の単位法線ベクトルで Ω に関し内向き，$f^{\pm} = f|_{S^{\pm}}$ は f の Trace で壁 $\partial\Omega = \partial\mathcal{O}$ による反射粒子(+)，壁への入射粒子(−)，の密度で，C は壁と粒子との相互作用により定まる境界作用素で，例えば完全吸収壁ならば $C = 0$，また反射壁であれば $C(x,\xi)$; $S^+ \to \mathbb{R}^n$, $(x, C(x,\xi)) \in S^-$ $(\forall(x,\xi) \in S^+)$ なる函数が存在して

$$Cf^{+} = f(t,x,C(x,\xi)), \qquad (x,\xi) \in S^{+},$$

である[4]。$C(x,\xi)=\xi-2(n(x)\cdot\xi)n(x)$（完全反射），$C(x,\xi)=-\xi$（逆反射）が考えられる。また乱反射壁

$$Cf^- = \int_{n(x)\cdot\xi'<0} C(x,\xi,\xi') f(t,x,\xi') d\xi', \quad (x,\xi)\in S^+$$

も考えられる．C に対する仮定は後で述べる．

(3) は無限遠での境界条件で g_c は平均速度 c の Maxwell (Gauss) 分布で，従って無限遠で気体は平衡状態にあると考えることになる。c が何であっても $Q[g_c, g_c]\equiv 0$ であるので，g_c は (1) の定常解である。但し一般に (3) は満さない。そこで (1)〜(4) の解を g_c の近傍で求めよう．その為に $f(t,x,\xi)=g_c(\xi)+g_0^{1/2}(\xi)u(t,x,\xi)$ とおき，更に

$$L_c u = 2g_0^{-1/2}Q[g_c, g_0^{1/2}u], \qquad \Gamma_0[u,v]=g_0^{-1/2}Q[g_0^{1/2}u, g_0^{1/2}v],$$

$$Mu^- = g_0^{-1/2}C\, g_0^{1/2}u^-, \qquad h_c = g_0^{-1/2}(Cg_c^- - g_c^+).$$

とおく，ここで $Q[\cdot,\cdot]$ は対称双1次作用素と考えている．よって (1)〜(4) は

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\xi\cdot\nabla_x u + L_c u + \Gamma_0[u,u], & (t,x,\xi)\in \mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^n, \\ u^+ = Cu^- + h_c, & (t,x,\xi)\in\mathbb{R}_+\times S^+, \\ u \longrightarrow 0 \ (|x|\to\infty), & (t,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & (x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n \end{cases}$$

となる．対応する定常問題は未知関数を $w=w(x,\xi)$ として

$$(6)\quad \begin{cases} 0 = -\xi\cdot\nabla_x w + L_c w + \Gamma_0[w,w], & (x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n, \\ w^+ = Mw^- + h_c, & (x,\xi)\in S^+ \end{cases}$$

$$\left\{ \; w \to 0 \; (|x| \to \infty), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \right.$$

この定常解 w の安定性は $v = u - w$ とおき (5)(6) から得られる

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\xi \cdot \nabla_x v + L_c v + 2\Gamma_c[w, v] + \Gamma_c[v, v], & (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \\ v^+ = M v^-, & (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times S^+, \\ v \to 0 \; (|x| \to \infty), & (t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ v|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

の零解の安定性を調べればよい。

これらの問題を空間

$$X_p = \left\{ u(x, \xi) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n) ; \; \|u\|_p \equiv \sup_\xi (1 + |\xi|)^\beta \|u(\cdot, \xi)\|_{L^p \cap L^\infty(\Omega)} < +\infty \right\}$$

で解こう。$1 \le p \le \infty$, $\beta > n + 1$ である。β は以下では固定する。

更に $\Sigma^\pm(\xi) = \{ x \in \partial\Omega ; n(x) \cdot \xi \gtrless 0 \}$, $\rho(x, \xi) = |n(x) \cdot \xi|$, $Y_p^\pm(\xi) = L^p \cap L^\infty(\Sigma^\pm(\xi) ; \rho d\sigma)$ ($d\sigma$ は $\partial\Omega$ 上の測度), とおき

$$X_p^\pm = \left\{ u(x, \xi) \in L^\infty_{loc}(S^\pm) ; \; \sup_\xi (1 + |\xi|)^\beta \|u(\cdot, \xi)\|_{Y_p^\pm(\xi)} < +\infty \right\}$$

と定義する。話は前後するがここで M, 即ち境界作用素 C に関する仮定を述べておく。

[仮定 3] (i) $M ; L^2(S^- ; \rho d\sigma d\xi) \to L^2(S^+ ; \rho d\sigma d\xi)$ は線型縮小 ($\|M\| \le 1$).

(ii) $M ; X_p^- \to X_p^+$ は線型有界 ($2 \le p \le \infty$).

(iii) $M g_0^{1/2} = g_0^{1/2}$

先に挙げた反射壁，乱反射壁は適当な条件の下でこの仮定を満す。特に完全反射と逆反射については成り立つ。完全吸収壁 $C = 0$ は (iii) を満さない。一般に $C \neq 0$ ならば $C g_c \neq g_c$ である。

次の結果を得る。

定理 1. $n \ge 3$ とする。仮定 1~3 の下で定数 $c_0 > 0$ と $p \ge 2$ が存在し、すべての $c \in \mathbb{R}^n$, $|c| \le c_0$ に対し (6) は X_p で唯 1 つの解 $w = w_c$ を持ち、$w_c \to 0 \ (|c| \to 0)$ in X_p である。

従って $g_c + g_0^{1/2} w_c$ は (1)~(4) の定常解である。

定理 2. 同じ仮定の下で定数 $a_0, a_1, c_0 > 0$ が存在し $|c| \le c_0$, $v_0 \in X_1$, $\|v_0\|_1 \le a_0$ ならば (7) は唯 1 つの解 $u = v_c(t) \in C^0([0,\infty); X_2)$ を持ち、かつ $t \ge 0$ に対し

$$\|v_c(t)\|_2 \le a_1 (1+t)^{-n/4} \|v_0\|_1$$

が成り立つ。

従って (5), よって (1)~(4), は大域解を持ち、最後の不等式は定常解が $t \to \infty$ で漸近安定であることを示している。

<u>定理 1 の証明</u>. 線型作用素 B_c を (形式的に)

$$B_c u = -\xi \cdot \nabla_x u + L_c u, \qquad u^+ = M u^-,$$

で定義する。又 φ_c を

$$-\xi \cdot \nabla_x \varphi_c + L_c \varphi_c = 0, \qquad \varphi_c^+ = M \varphi_c^- + h_c$$

の解とすれば、(6) は (形式的に) 次の方程式と同値。

$$\text{(8)} \qquad G(w, c) \equiv w + B_c^{-1} \Gamma_c[w, w] + \varphi_c = 0.$$

次の命題が証明出来る。

命題 1. $|c|$ が小ならば B_c^{-1} が存在し、

$$\|B_c^{-1}\Gamma_c[u,v]\|_p \le C_0\|u\|_r\|v\|_s$$

が $p, r, s \ge 2$, $r^{-1}+s^{-1}-p^{-1} > n^{-1}$, $r^{-1}+s^{-1} > 2^{-1}$ で成り立つ。

命題 2. $|c|$が小ならば φ_cが存在し, $\varphi_c \in X_p$, $p \ge 2$, $p > n/(n-2)$, かつ $\varphi_c \to 0$ ($|c| \to 0$) in X_p.

従って $n=4$ ならば $2<p<4$, $n\ge5$ ならば $2\le p<4$ に対し

$$G(\cdot,c)\,;\ X_p \to X_p$$

は C^∞写像で, 更に $G(0,0)=0$, かつ

$$G_w(0,0)=I$$

である. G_wは wに関する Fréchet 微分で明らかに

$$G_w(w,c)\cdot = I + 2B_c^{-1}\Gamma_c[w,\cdot]$$

である. よって $n\ge4$ ならば通常の陰函数定理により (8) が解けて定理 1 を得る.

$n=3$ の場合は命題 1, 2 より

$$G(\cdot,c)\,;\ X_p \to X_q \qquad 2\le p<3,\quad q>3$$

であり, $X_p \subsetneqq X_q$ ($p<q$) を考慮すると $G_w(0,0)=I$ はこの時,有界な逆を持たない. これは Nash-Moser の謂ゆる derivative loss に対応する現象で, 従って通常の陰関数定理では (8) は解けない. しかし次の命題に依って Nash-Moser 型の陰関数定理 [6] が応用可能となる.

命題 3. $n=3$ とする. 次の様な φ_c^1, φ_c^2 が存在する.

$$\varphi_c = \varphi_c^1 + \varphi_c^2.$$

$$\varphi_c^1 \in X_2 \qquad \varphi_c^1 \to 0 \ (|c| \to 0) \ \text{in } X_2 .$$

$$\varphi_c^2 \in X_p \ (p>3), \quad \varphi_c^2 \to 0 \ (|c| \to 0) \ \text{in } X_p .$$

$$(1+|x|)^\alpha \varphi_c^2 \in X_\infty \quad (\exists \alpha>0), \quad (1+|x|)^\alpha \varphi_c^2 \to 0 \ (|c| \to 0) \ \text{in } X_\infty .$$

smoothing operator としては今の場合は単なる cutoff fn.,
$\chi_R = \chi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$ でよい。実際, 上の命題3よりすべての$R>0$に対して

$$\|\varphi_c^1\|_2 \le \tfrac{1}{2}\delta, \qquad \|\varphi_c^2\|_q \le \tfrac{1}{2}\delta$$

$$\|\chi_R \varphi_c^2\|_p \le \delta R^\gamma, \qquad \|(1-\chi_R)\varphi_c^2\|_q \le \delta R^{-\alpha}$$

が成り立つ. 但し $\alpha, \delta, \gamma > 0$ は定数, $2 \le p < 3$, $q > 3$, かつ $\delta = \delta(c) \to 0 \ (|c| \to 0)$.

さて $F(w,c) = w + B_c^{-1}\Gamma_c[w,w]$ とおく. $G = F + \varphi_c = F + \varphi_c^1 + \varphi_c^2$ である. 命題1より $n=3$ に対して

$$F(\cdot, c)\ ;\ X_p \to X_p , \qquad 2 \le p < 3 .$$

$w \in X_r \ (2 \le r < 3) \Rightarrow F_w(w,c)\cdot\ ;\ X_p \to X_p \ (2 \le p < 6)$ は有界.

$\|w\|_r \le 1/4C_0 \ (2 \le r < 3) \Rightarrow F_w(w,c)^{-1}\ ;\ X_p \to X_p \ (2 \le p < 6)$ は存在して有界.

この最後は $F_w(w,c)^{-1} = G_w(w,c)^{-1} = (I + 2B_c^{-1}\Gamma_c[w,\cdot])^{-1}$ が Neumann 級数により得られるからである. この時 $\|F_w(w,c)^{-1}\| \le 2$ である.

Nash-Moser [6] に従い次の列 $\{w_k\}$ を定義する.

$$w_0 = 0, \qquad w_{k+1} = w_k + \rho_k, \qquad k \ge 0,$$

ここで
$$\rho_k = -G_w(w_k,c)^{-1}\{G(w_k,c) - (1-\chi_{R_k})\varphi_c^2\}$$
$$= -F_w(w_k,c)^{-1}\{F(w_k,c) + \varphi_c^1 + \chi_{R_k}\varphi_c^2\},$$

である. $\{R_k\}$ を適当に選ぶと w_k が (8) の解に収束する; 即ち

補題. $C_0, \alpha, \gamma, \delta$ はこれまでと同じ定数とする。すべての $k \geq 0$ に対し, $|c|$ が小ならば

(i) $\|\rho_{k-1}\|_q \leq 4\delta K^{-\mu(s^{k-1}-1)}$,

(ii) $\|\rho_{k-1}\|_p \leq 4\delta K^{s^k}$,

(iii) $\|w_k\|_r \leq 1/4C_0$,

(iv) $\|G(w_k,c)\|_q \leq \delta K^{-\mu(s^k-1)}$,

が成り立つような, 定数 $K>1$, $s>1$, $\mu>0$, $2 \leq p < r < 3 < q$, 及び R_k が存在する(これらは c に依存しない)。

証明. 帰納法による. $k=0$ は明らか. k で成り立つと仮定し $k+1$ に対し (i)〜(iv) を示す.

(i)$_{k+1}$ の証明.

$$\|\rho_k\|_q \leq \|G_w(w_k,c)^{-1}\|\{\|G(w_k,c)\|_q + \|(1-\chi_{R_k})\varphi_c^2\|_q\}$$
$$\leq 2\{\delta K^{-\mu(s^k-1)} + \delta R_k^{-\alpha}\}$$

よって $R_k = K^{\mu(s^{k+1}-1)/\alpha}$ と選べば (i) が成り立つ。

(ii)$_{k+1}$ の証明. $K>1$ を充分大に選べば

$$\|w_k\|_p \leq \|w_0\|_p + \sum_{j=1}^{k} \|\rho_{j-1}\|_p \leq 4\delta \sum_{j=1}^{k} K^{s^k} \leq 8\delta K^{s^k}.$$

よって $\|F(w_k,c)\|_p \leq \|w_k\|_p + C_0\|w_k\|_r\|w_k\|_p \leq 10\delta K^{s^k}$. 故に

$$\|\rho_k\|_p \leq \|F_w(w_k,c)^{-1}\|\{\|F(w_k,c)\|_p + \|\varphi_c^1\|_p + \|\chi_{R_k}\varphi_c^2\|_p\}$$
$$\leq 2\{10\delta K^{s^k} + \delta + \delta R_k^{\gamma}\}$$
$$= 2\delta K^{s^{k+1}}\{10K^{-s^k(s-1)} + K^{-s^{k+1}} + K^{-s^{k+1}(1-\gamma\mu/\alpha)-\gamma\mu/\alpha}\}.$$

そこで K が充分大で, かつ

(*) $\qquad s > 1, \qquad 0 < \mu < \alpha/\gamma$

ならば (ii) が成り立つ.

(iii)$_{k+1}$ の証明. $r^{-1} = (1-\theta)p^{-1} + \theta q^{-1} \quad 0 \le \theta \le 1$ とすれば

$$\|u\|_r \le \|u\|_p^{1-\theta} \|u\|_q^{\theta}$$

(+) $p < r < 3 \iff 0 \le \theta < (p^{-1} - 3^{-1})/(p^{-1} - q^{-1})$

故に (i)$_{k+1}$, (ii)$_{k+1}$ より

$$\|\rho_j\|_r \le 4\delta K^{-s^j(\theta\mu - (1-\theta)s) + \theta\mu}, \qquad 0 \le j \le k,$$

$$\|w_{k+1}\|_r \le \sum_{j=0}^{k} \|\rho_j\|_r \le 4\delta K^{\theta\mu} \sum_{j=0}^{k} K^{-s^j(\theta\mu - (1-\theta)s)}.$$

故に K が充分大で, かつ $\theta\mu - (1-\theta)s > 0$, 即ち

(**) $\qquad \theta > s/(s+\mu)$

ならば $\sum_{j=0}^{\infty} K^{-s^j(\theta\mu-(1-\theta)s)} \le 1/16C_0$ とできる. この時, $|c|$ を小さくすれば $\delta \le K^{\theta\mu}$ が成り立つ ($\delta \to 0$ ($|c| \to 0$) だから). 故に $\|w_{k+1}\|_r \le 1/4C_0$.

(iv)$_{k+1}$ の証明. $G(w_{k+1}, c) = G(w_k + \rho_k, c) = G(w_k, c) + G_w(w_k, c)\rho_k + B_c^{-1}\Gamma_0[\rho_k, \rho_k] = (1-\chi_{R_k})\varphi_c^2 + B_c^{-1}\Gamma_0[\rho_k, \rho_k]$ である.

$$\|G(w_{k+1}, c)\|_q \le \|(1-\chi_{R_k})\varphi_c^2\|_q + C_0\|\rho_k\|_r\|\rho_k\|_q$$

$$\le \delta R_k^{-\alpha} + 16C_0\delta^2 K^{-s^k(\theta\mu-(1-\theta)s)+\theta\mu-\mu(s^k-1)}$$

$$\le \delta K^{-\mu(s^{k+1}-1)}\{1 + 16C_0\delta K^{-s^k(\theta\mu-(1-\theta)s+\mu-\mu s)+\theta\mu}\}$$

$\delta \le K^{-\theta\mu}$ に注意すれば $\theta\mu - (1-\theta)s + \mu(1-s) > 0$, 即ち

(***) $\qquad (1<)\, s < 1 + \dfrac{1+\mu}{1+\mu-\theta}\left(\theta - \dfrac{1}{1+\mu}\right)$

ならば (iv)$_{k+1}$ が成り立つ. そこで μ を (*) で定め, 次に θ を $(1+\mu)^{-1} < \theta < 1$ なるように1つ選ぶ. そうすると (**), (***) を

満す $s>1$ が存在する。他方 $2\le p<3<q$ かつ q が 3 に非常に近ければ (†) も成り立つ。以上で補題が示せた。

従って $w=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k$ は X_r で収束し，$G(w,c)=0$ in X_q が (iv) から従うから定理 1 が $n=3$ に対しても示せた。

定理 2 の証明．　先に定義した B_c は X_2 で C_0-半群の生成作用素であることが示せる。この半群 e^{tB_c} を用いると (7) は次の積分方程式に帰着される．

(9) $$v(t)=e^{tB_c}v_0+\int_0^t e^{(t-s)B_c}\{2\Gamma_0[w_c,v(\tau)]+\Gamma_0[v(\tau),v(\tau)]\}d\tau.$$

w_c は定理 1 の定常解である．

命題 3．$n\ge 2$ に対し，$|c|$ が充分小ならば

$$\|e^{tB_c}u\|_2\le C_1(1+t)^{-n/4}\|u\|_1,$$

$$\|\int_0^t e^{(t-\tau)B_c}\Gamma_0[u(\tau),v(\tau)]d\tau\|_2$$

$$\le C_1\{(1+t)^{-n/4}\sup_{t\ge 0}(1+t)^{n/4}\|u(t)\|_r\|v(t)\|_s$$

$$+\int_0^{\infty}(1+t-\tau)^{-\alpha}\|u(\tau)\|_r\|v(\tau)\|_s d\tau\}.$$

が成り立つ．但し $r,s\ge 1$，$2^{-1}\le r^{-1}+s^{-1}\le 1$，$\alpha=\frac{n}{2}(r^{-1}+s^{-1}-2^{-1})+2^{-1}$．

(9) の右辺を Hv と書くと $H;C^0([0,\infty);X_2)\to C^0([0,\infty);X_2)$ で，上の命題より，$|||v|||=\sup_t(1+t)^{n/4}\|v(t)\|_2$ とおけば

$$\|Hv(t)\|_2\le C_2(1+t)^{-n/4}(\|v_0\|_1+2\|w_c\|_p|||v|||+|||v|||^2),\quad 2\le p<3$$

を得る。即ち

$$|||Hv||| \le C_2\,(\|v_0\|_1 + 2\|w_c\|_p\,|||v||| + |||v|||^2)\,.$$

同様に

$$|||Hv - Hv'||| \le C_2\,(2\|w_c\|_p + |||v||| + |||v'|||)\,|||v - v'|||\,.$$

定理1により $\|w_c\|_p \to 0\ (|c| \to 0)$ だから，$|c|$ が充分小ならば $\|w_c\|_p \le 1/2C_2$ とできる．そこで a_0 を

$$0 < a_0 < \left(\frac{1}{2C_2} - \|w_c\|_p\right)^2$$

なるように選び $\|v_0\|_1 \le a_0$ を仮定する．

$$\mu = 1 - 2\|w_c\|_p C_2 - \sqrt{(1 - 2C_2\|w_c\|_p)^2 - 4C_2^2\|v_0\|_1}$$

$$a_1 = \mu/(2C_2\|v_0\|_1)$$

とおくと $0 < \mu < 1$ であって，$|||v|||, |||v'||| \le a_1\|v_0\|_1$ ならば

$$|||Hv||| \le a_1\|v_0\|_1\,, \qquad |||Hv - Hv'||| \le \mu\,|||v - v'|||$$

となる．よって H は不動点 v を持つ．これは(9)の解で，$|||v||| \le a_1\|v_0\|_1$ である．故に定理2が示せた．

命題1と4の証明には $c=0$ の場合の[1],[7]と同様の議論が必要となるがここでは割愛する．

References

[1] Asano,K.; On the initial boundary value problem of the nonlinear Boltzmann equation in an exterior domain. (to appear).

[2] Brezis,H. and Stamphachia,J; The hodograph method in fluid dynamics in the light of variational inequalities. Arch. Rat. Mech. Anal.,61(1976),1-18.

[3] Grad.H.; Asymptotic theory of the Boltzmann equation. Rarefied Gas Dynamics. Vol.1(ed. by Lermann,J.A.),Academic Press, New York,(1963).

[4] Kaniel,S. and Shinbrot,M.; The Boltzmann equation I. Commun. Math. Phys., 57(1978),1-20.

[5] Morawetz,C.S.; Mixed equations and Transonic flows. Rend. Math., 25(1966),482-509.

[6] Moser,J.; A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations I. Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa, 20(1966),226-315.

[7] Ukai,S. and Asano,K.; On the initial boundary value problem of the linearized Boltzmann equation in an exterior domain. Proc. Japan Acad., 56(1980),12-17.