数理解析研究所講究録
第 430 巻 1981 年 140-158

水平粘性項をもつ浅水波方程式系について
── 定式化と保存則 ──

富士ファコム制御　金山　寛
電気通信大学　牛島照夫

1. はじめに

近年，湾内の潮汐流のコンピュータ・シミュレーションが盛んに行なわれるようになってきた。潮汐流の基礎方程式系として，二次元の水平粘性項をもつ浅水波方程式系が通常用いられている。しかしながら，各文献で用いられている基礎方程式系をよく見てみると，必ずしも同一の方程式系が用いられているわけではない。なかでも，水平粘性項は，文献により，さまざまな形で述べられている。このような定式化における混乱が，この分野における差分法や有限要素法などの数値解析手法の数学的正当化を遅らせている一因になっているようにも思われる。実際，近似解法によってもたらされる人工粘性と基礎方程式系固有の粘性をはっきり区別するためには，基礎方程式系の水平粘性項の定式化の過程を明らかにする必要があり，それはまた基礎方程式系の境界条件の設定にとっても重要なことである。

本報告では，この分野における代表的ないくつかの例（Dronkers[1), Leendertse－Liu[7), Kawahara[11), Wang[12)）を特殊な場合として含む一般化された二次元の水平粘性項を含む浅水波方程式系が，三次元の乱流場の平均流に関するReynolds方程式から出発して，どのような仮定のもとに導出されるかを明らかにする。
同時に，導出された方程式系が，Reynolds方程式からひきつがれた水平粘性項をもつことや，物理的に妥当な条件のもとで，質量保存則とエネルギー保存則を満足することが示される。
本報告のより詳細な内容については，文献16）を見ていただきたい。

注意1

Zienkiewicz－Heinrichは，文献5）で全くユニークな定式化を展開している。

2. 静水圧仮定のもとでのReynolds方程式の鉛直方向平均化

はじめに，(1)－(4)の三次元乱流場の平均流に関するReynolds方程式[8)：Rを考える。

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + F_x, \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + F_y, \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + F_z, \quad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ここに，$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$ で，u，v，W は直交座標 x，y，z 方向の平均流の速度成分，P は圧力，ρ は非圧縮性流体の密度で，簡単のため正定数，t は時間，Fx，Fy，Fz は外力の成分，τ_{xx} などは Reynolds 応力（対称テンソル）を表わす。

ここで，通常のように，鉛直方向に静水圧の仮定を入れ，さらに外力として（Fx, Fy, Fz）＝（f v, −f u, −g）を仮定する。g は重力加速度で正定数，f はコリオリ係数で $f = 2\omega \sin\phi$，ω は地球自転の角速度で正定数，ϕ は考えている地点の緯度で，北半球では正，南半球では負の定数である。この時，(1)−(3) は次式のようになる。

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + fv, \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) - fu, \quad \ldots\ldots (6)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g. \quad \ldots\ldots (7)$$

ここでは，(4)−(7) をシステム RH と呼ぶことにする。RH が我々の議論の出発点である。応力テルソンの具体的表現は注意 6，注意 8 で述べられる。

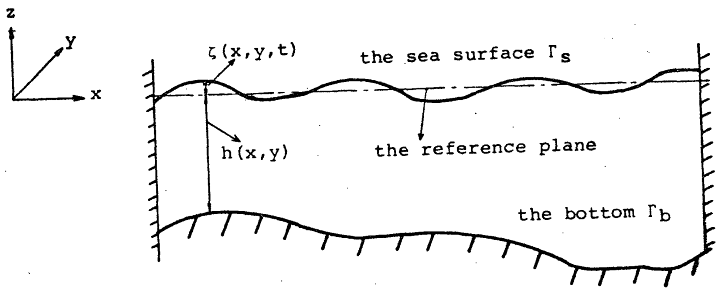

図 1　湾の断面図

図1のように，水平面と仮定される平均水位面を基準面にとり，海面，海底面をΓs，Γbで表わす。Γs，Γbは一意的に次式で表現されるとする。$z=\zeta(x, y, t)$，$z=-h(x, y)<0$，ただし，ζは未知数であり，データhとともに十分滑らかとする。

システムRHのΓs, Γbにおける境界条件として，次式を考える。

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (x,y,z) \in \Gamma s, \ \dots\dots\dots \quad (8)$$

$$w = - u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y}, \quad (x,y,z) \in \Gamma b. \ \dots\dots\dots \quad (9)$$

(8)，(9)は境界面に垂直な速度成分をもたないことを意味する。

ここで，以下の記号を導入しよう。

$$H \equiv h+\zeta, \ \dots\dots\dots \quad (10.0)$$

$$U \equiv \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta} u\,dz, \ \dots\dots\dots \quad (10.1)$$

$$V \equiv \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta} v\,dz, \ \dots\dots\dots \quad (10.2)$$

ただし，

$$H > 0, \ \dots\dots\dots \quad (10.4)$$

を一貫して仮定していることを注意しておく。

任意のx, y, z, tの関数$e(x, y, z, t)$に対して，以下の記号を用いる。

$$e(x,y,z,t)\Big|_{z=-h}^{z=\zeta} = e(x,y,\zeta(x,y,t),t)-e(x,y,-h(x,y),t).$$

この時，連続の方程式(4)より，次の命題を得る。

命題 1. 1

滑らかな関数の集合（u，v，w）が，(4)を満足すれば，次の(10)式が成立する。

$$\frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} + \left(w - u\frac{\partial}{\partial x}z - v\frac{\partial}{\partial y}z\right)\Bigg|_{z=-h}^{z=\zeta} = 0. \quad \ldots(10)$$

系 1. 2

滑らかな関数の集合（u，v，w），ζ，hが，(4)，(8)，(9)を満足すれば，次の同値な(11)，(12)式が成立する。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

略証

(4)をzに関して−hからζまで積分すればよい。

証了。

(5)−(7)について同様の積分を行なうと，命題2を得る。

命題 2

滑らかな関数の集合（u，v，w），P，τ_{xx}，τ_{yx}，τ_{zx}，τ_{xy}，τ_{yy}，τ_{zy} が(4)−(7)を満足し，大気圧P（x，y，ζ，t）が定数であるとする。その時，次の(17)，(18)式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{\zeta} u\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} u^2\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} uv dz + \left\{u\left(w - \frac{\partial}{\partial t}z - u\frac{\partial}{\partial x}z - v\frac{\partial}{\partial y}z\right)\right\}\Bigg|_{z=-h}^{z=\zeta}$$

$$= -gH\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}\tau_{xx}dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta}\tau_{yx}dz-\left(\tau_{xx}\frac{\partial}{\partial x}z+\tau_{yx}\frac{\partial}{\partial y}z-\tau_{zx}\right)\Bigg|_{z=-h}^{z=\zeta}\right\}$$

$$+ f\int_{-h}^{\zeta} v\,dz, \quad \cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{\zeta} v\,dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} uv\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} v^2dz+\left\{v\left(w-\frac{\partial}{\partial t}z-u\frac{\partial}{\partial x}z-v\frac{\partial}{\partial y}z\right)\right\}\Bigg|_{z=-h}^{z=\zeta}$$

$$= -gH\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}\tau_{xy}dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta}\tau_{yy}dz-\left(\tau_{xy}\frac{\partial}{\partial x}z+\tau_{yy}\frac{\partial}{\partial y}z-\tau_{zy}\right)\Bigg|_{z=-h}^{z=\zeta}\right\}$$

$$- f\int_{-h}^{\zeta} u\,dz. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

略証

(7)を z に関して－ h から ζ まで積分すると，P（x, y, ζ, t ）が定数であることより， $\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial\zeta}{\partial x}$， $\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \frac{\partial\zeta}{\partial y}$ を得る。これと(4)を使って，(5)，(6)を同様に積分すれば，(17)，(18)を得る。

証了。

ここでは，(10)，(17)，(18)をシステムARHと呼ぶことにする。

3. 水平粘性項を含む浅水波方程式系

$\tilde{u} = u - U$，$\tilde{v} = v - V$ とおく。U，V の定義により，

$$\int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}\,dz = 0, \quad \int_{-h}^{\zeta}\tilde{v}\,dz = 0.$$

さらに，二次元の応力成分 τ_{xx}'，$\tau_{xy}' = \tau_{yx}'$，τ_{yy}' を次式で定義する。

$$\tau_{xx}' = \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta}\tau_{xx}dz - \frac{\rho}{H}\int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}^2dz, \quad \tau_{yx}' = \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta}\tau_{yx}dz - \frac{\rho}{H}\int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}\tilde{v}dz,$$

$$\tau_{xy}' = \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta}\tau_{xy}dz - \frac{\rho}{H}\int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}\tilde{v}dz, \quad \tau_{yy}' = \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta}\tau_{yy}dz - \frac{\rho}{H}\int_{-h}^{\zeta}\tilde{v}^2dz.$$

τ_{xy} の対称性が τ_{xy}' の対称性にひきつがれている。この時，水平粘性項を含む浅水波方程式系：VSWの一般形は，(10)から導かれる(11)に加えるに，(17)，(18)から導かれる次の(29)，(30)からなるシステムである。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{H\rho}\{\frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{xx}') + \frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{yx}')\}$$

$$+ \frac{1}{H\rho}(|\nabla G_s|\tau_{sx} - |\nabla G_b|\tau_{bx}) + fV, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{H\rho}\{\frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{xy}') + \frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{yy}')\}$$

$$+ \frac{1}{H\rho}(|\nabla G_s|\tau_{sy} - |\nabla G_b|\tau_{by}) - fU, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (30)$$

ここに，　$G_s = z-\zeta,$　　$\nabla G_s = (-\frac{\partial \zeta}{\partial x}, -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1),$

$|\nabla G_s| = \{\nabla G_s \cdot \nabla G_s\}^{1/2}, \quad G_b = (-h) - z,$

$\tau_{sx} = \vec{\tau}_x \cdot \vec{n}_s, \quad \tau_{bx} = -\vec{\tau}_x \cdot \vec{n}_b, \quad \tau_{sy} = \vec{\tau}_y \cdot \vec{n}_s, \quad \tau_{by} = -\vec{\tau}_y \cdot \vec{n}_b,$

$\vec{\tau}_x = (\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}), \ \vec{\tau}_y = (\tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{zy}),$

$\vec{n}_s = \frac{\nabla G_s}{|\nabla G_s|}, \quad \vec{n}_b = \frac{\nabla G_b}{|\nabla G_b|}$，・はベクトルの内積を表わす。

注意2　境界条件(8)，(9)により，(17)，(18)の左辺において，

$$\{u(w - \frac{\partial}{\partial t}z \ u\frac{\partial}{\partial x}z - v\frac{\partial}{\partial y}z)\}\Big|_{z=-h}^{z=\zeta} = 0,$$

$$\{v(w - \frac{\partial}{\partial t}z - u\frac{\partial}{\partial x}z - v\frac{\partial}{\partial y}z)\}\Big|_{z=-h}^{z=\zeta} = 0.$$

注意3　(17)，(18)の右辺において，

$$-(\tau_{xx}\frac{\partial}{\partial x}z + \tau_{yx}\frac{\partial}{\partial y}z - \tau_{zx})\Big|_{z=-h}^{z=\zeta} = |\nabla G_s|\tau_{sx} - |\nabla G_b|\tau_{bx},$$

$$-\left(\tau_{xy}\frac{\partial}{\partial x}z + \tau_{yy}\frac{\partial}{\partial y}z - \tau_{zy}\right)\Bigg|_{z=-h}^{z=\zeta} = |\nabla G_s|\tau_{sy} - |\nabla G_b|\tau_{by}.$$

図２のように正の向きをとると，τ_{sx}, τ_{bx},はΓ_s, Γ_bの接平面におけるｘ方向の応力成分を表わす。τ_{sy}, τ_{by}は対応するｙ方向の応力成分である。

$\tau_{sx}, \tau_{bx}, \tau_{sy}, \tau_{by}$の具体的表現として，通常，次式が用いられる。[1)]

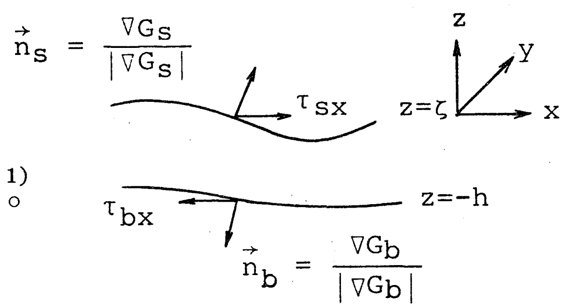

図２　τ_{sx}, τ_{bx}の正の向き

$$|\nabla G_s|\tau_{sx} = \theta\rho_a W_x (W_x{}^2+W_y{}^2)^{1/2}, \quad |\nabla G_s|\tau_{sy} = \theta\rho_a W_y (W_x{}^2+W_y{}^2)^{1/2},$$

$$|\nabla G_b|\tau_{bx} = \frac{\rho g}{C^2}U(U^2+V^2)^{1/2}, \quad |\nabla G_b|\tau_{by} = \frac{\rho g}{C^2}V(U^2+V^2)^{1/2},$$

ただし，Wx，Wyはｘ，ｙ方向の風速成分，θは風の影響係数で正定数，ρ_aは大気の密度で正定数，ＣはChezy係数で正定数とする。ζ，ｈの空間微分の二次の項が１に較べて十分小さいとすれば，[9)] $|\nabla G_s| \simeq 1$,　$|\nabla G_b| \simeq 1$.

<u>注意４</u>　$\tilde{u}$，$\tilde{v}$の定義より，⒄，⒅の左辺において容易に次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} uv dz = \frac{\partial}{\partial x}(HU^2) + \frac{\partial}{\partial y}(HUV) + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}^2 dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}\tilde{v} dz,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} uv dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz = \frac{\partial}{\partial x}(HUV) + \frac{\partial}{\partial y}(HV^2) + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}\tilde{v} dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} \tilde{v}^2 dz.$$

また，(12)に注意すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}(HU) + \frac{\partial}{\partial x}(HU^2) + \frac{\partial}{\partial y}(HUV) = H(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(HV) + \frac{\partial}{\partial x}(HUV) + \frac{\partial}{\partial y}(HV^2) = H(\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y}).$$

注意5　$\widetilde{u^2}$, $\widetilde{uv}$, $\widetilde{v^2}$がそれぞれU^2, UV, V^2に較べて十分小さいとすれば，

$$\tau_{xx}' \simeq \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta} \tau_{xx}dz \ , \quad \tau_{yx}' \simeq \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta} \tau_{yx}dz \ ,$$

$$\tau_{xy}' \simeq \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta} \tau_{xy}dz \ , \quad \tau_{yy}' \simeq \frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta} \tau_{yy}dz \ .$$

注意6　RH (4) − (7) において次の構成則を仮定する[5)]。

$$\frac{1}{\rho}\tau_{xx} = 2\nu_H\frac{\partial u}{\partial x} \ , \ \frac{1}{\rho}\tau_{yy} = 2\nu_H\frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{1}{\rho}\tau_{xy} = \frac{1}{\rho}\tau_{yx} = \nu_H(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}),$$

$$\frac{1}{\rho}\tau_{zx} = \nu_V\frac{\partial u}{\partial z} \ , \quad \frac{1}{\rho}\tau_{zy} = \nu_V\frac{\partial v}{\partial z} \ ,$$

ここに，ν_H, ν_Vは水平方向ならびに鉛直方向の渦動粘性係数を表わし，正定数とする。（以下の議論では，ν_Hのzに関する非依存性が本質的に用いられる。）この時，たとえば，(17)の右辺において，

$$\frac{1}{\rho}(\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} \tau_{xx}dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} \tau_{yx}dz) = \frac{\partial}{\partial x}(2\nu_H\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial u}{\partial x}dz)+\frac{\partial}{\partial y}(\nu_H\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial u}{\partial y}dz+\nu_H\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial v}{\partial x}dz)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[2\nu_H\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} udz-(u\frac{\partial}{\partial x}z)\Big|_{z=-h}^{z=\zeta}\right\}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_H\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} udz-(u\frac{\partial}{\partial y}z)\Big|_{z=-h}^{z=\zeta}\right\}\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_H\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} vdz - (v\frac{\partial}{\partial x}z)\Big|_{z=-h}^{z=\zeta}\right\}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[2\nu_H\{(H\frac{\partial U}{\partial x}) + \{(U-u)\frac{\partial}{\partial x}z\}\Big|_{z=-h}^{z=\zeta}\}\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_H\{(H\frac{\partial U}{\partial y}) + \{(U-u)\frac{\partial}{\partial y}z\}\Big|_{z=-h}^{z=\zeta}\}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_H\{H\frac{\partial V}{\partial x}) + \{(V-v)\frac{\partial}{\partial x}z\}\Big|_{z=-h}^{z=\zeta}\}\right]$$

$$\simeq \frac{\partial}{\partial x}\{H2\nu_H(\frac{\partial U}{\partial x})\} + \frac{\partial}{\partial y}\{H\nu_H(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x})\}.$$

最後に $\tilde{u}\frac{\partial H}{\partial x}$, $\tilde{u}\frac{\partial H}{\partial y}$, $\tilde{v}\frac{\partial H}{\partial x}$, $\tilde{v}\frac{\partial H}{\partial y}$ はそれぞれ $H\frac{\partial U}{\partial x}$, $H\frac{\partial U}{\partial y}$, $H\frac{\partial V}{\partial x}$, $H\frac{\partial V}{\partial y}$ に較べて十分小さいとみなされた。この形の水平粘性項は例えばWang[12)]が用いている。

注意 7　結局，注意 5 ， 6 により，(17)において以下の項が無視された。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\nu_H\{(U-u)\frac{\partial}{\partial x}z\}\Big|_{z=-h}^{z=\zeta} - \int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}^2 dz\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_H\{(U-u)\frac{\partial}{\partial y}z + (V-v)\frac{\partial}{\partial x}z\}\Big|_{z=-h}^{z=\zeta} - \int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}\tilde{v}dz\right].$$

(18)においても同様である。

この場合，

$$(*)\quad \frac{1}{\rho}\tau_{xx}' = 2\nu_H\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{1}{\rho}\tau_{xy}' = \frac{1}{\rho}\tau_{yx}' = \nu_H(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}),\ \frac{1}{\rho}\tau_{yy}' = 2\nu_H\frac{\partial V}{\partial y}.$$

となる二次元の構成則を仮定したことに相当する。Kawahara[11)] は注意 6 の最後に述べた形の水平粘性項で，H の空間的変化を無視する形を用いた。なお，Connor－Brebbia[9)]は三次元の具体的な構成則を述べることなしに，二次元の構成則を仮定し，ρ 一定のもとでは，　$\frac{\partial}{\partial x}\{2\nu_H\frac{\partial(HU)}{\partial x}\} + \frac{\partial}{\partial y}\{\nu_H(\frac{\partial(HU)}{\partial y} + \frac{\partial(HV)}{\partial x})\}$

となる形を述べている。

これは我々の記法で書けば次のようになる。

$$\frac{1}{\rho}\tau_{xx}'=2\nu_H\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}U\right),\quad \frac{1}{\rho}\tau_{yx}'=\nu_H\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y}U+\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}V\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\tau_{xy}'=\frac{1}{\rho}\tau_{yx}',\quad \frac{1}{\rho}\tau_{yy}'=2\nu_H\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y}V\right).$$

従って，Hの空間的変化を無視すれば，Kawahara[11]，Wang[12]と同じ構成則を用いたことになる。

<u>注意8</u>　今度はRH(4)－(7)において次の構成則を仮定する[7]。

$$\frac{1}{\rho}\tau_{xx}=\nu_H\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{1}{\rho}\tau_{yx}=\nu_H\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{1}{\rho}\tau_{zx}=\nu_V\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\rho}\tau_{xy}=\nu_H\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{1}{\rho}\tau_{yy}=\nu_H\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{1}{\rho}\tau_{zy}=\nu_V\frac{\partial v}{\partial z}.$$

この場合，$\tau_{xy}\neq\tau_{yx}$に注意しよう。注意5－7と同様の議論を展開すると，たとえばLeendertse－Liu[7]，Gustafsson－Sundstöm[6]，Walters－Cheng[14]が用いた次の形の水平粘性項を得る。

$$(**)\quad \frac{1}{\rho}\tau_{xx}'=\nu_H\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{1}{\rho}\tau_{yx}'=\nu_H\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{1}{\rho}\tau_{xy}'=\nu_H\frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{1}{\rho}\tau_{yy}'=\nu_H\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Pinder－Gray[10]も原著のミスプリントを修正すれば，この形と考えられる。Dronkers[1]は，これのHの空間的変化を無視する形を述べ，Kanayama－Ohtsuka[4]，Praagman[15]もその省略形を用いた。Tanaka－Ono[13]は，第二構成則（**）を用いて，Connor－Brebbia[9]と同タイプの水平粘性項を使っている。なお，Leendertse[2]，Kaneko et al.[3]では水平粘性項は完全に省略されている。

4. 質量保存則とエネルギー保存則

ここでは，3で導出されたVSWが，物理的に妥当な条件のもとで，質量保存則とエネルギー保存則をみたすことを示す。

ベクトル記号を用いると，VSWは次のように書ける。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathrm{div}\ (H\vec{U}) = 0, \quad \cdots\cdots \quad (31)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla\vec{U} + \vec{U}[f] + g\,\nabla\zeta$$
$$= \frac{1}{H\rho}\left(\mathrm{div}\ (H\tau) + |\nabla G_s|\vec{\tau}_s - |\nabla G_b|\vec{\tau}_b\right), \quad \cdots\cdots \quad (32)$$

ここに，

$$\vec{U} = (U,\ V), \qquad [f] = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix},$$

$$\vec{\tau}_x = (\tau_{xx},\ \tau_{yx}), \qquad \vec{\tau}_y = (\tau_{xy},\ \tau_{yy}),$$
$$\vec{\tau}_s = (\tau_{sx},\ \tau_{sy}), \qquad \vec{\tau}_b = (\tau_{bx},\ \tau_{by}).$$

二次元の応力テンソルについて，ダッシュ記号を省略した。∇については，二次元と三次元の区別をしていない。また，

$$\mathrm{div}(H\tau) = (\mathrm{div}(H\vec{\tau}_x),\ \mathrm{div}(H\vec{\tau}_y)).$$

初期条件を次式で与える。

$$\zeta(x,\ y,\ 0) = \zeta_0(x,\ y), \quad \cdots\cdots \quad (33.1)$$
$$\vec{U}(x,\ y,\ 0) = \vec{U}_0(x,\ y), \quad \cdots\cdots \quad (33.2)$$

ただし，考える領域Ωは十分滑らかな境界Γをもつ有界領域とする。また，次の境界条件を設定する。

$$U_n \equiv \vec{U}(x,\ y,\ t)\cdot\vec{n} = 0, \quad \cdots\cdots \quad (34)$$

ここに，$\vec{n}$ は Γ 上の外向き法線ベクトルを表わす。初期データ $U_0(x,y)$，$\zeta_0(x,y)$ は十分滑らかとし，境界条件 (34)，(49)，(55) との両立条件ならびに条件 (10.4) をみたすとする。（境界条件 (49)，(55) については後述。） 以上の状況のもとで，以下の質量保存則が成立する。

命題 3 （質量保存則）

滑らかな関数の集合 ζ と $\vec{U}$ が，$t>0$ に対して，(31) と (34) を満足すれば，次の (35) 式が成立する。

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\zeta\,d\vec{x} = 0. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (35)$$

証明

連続の方程式 (31)，Gauss－Green の公式，境界条件 (34) より，

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\zeta\,d\vec{x} = \int_{\Omega}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,d\vec{x} = -\int_{\Omega}\mathrm{div}(H\vec{U})\,d\vec{x}$$

$$= -\oint_{\Gamma}H\vec{U}\cdot\vec{n}\,ds = 0.$$

証了。

さて，VSW (31)，(32) に関して，次のエネルギー形式 T(t) を考えよう。

$$T(t) = \frac{g}{2}\int_{\Omega}\zeta^2 d\vec{x} + \frac{1}{2}\int_{\Omega}H|\vec{U}|^2 d\vec{x}\ , \quad \cdots\cdots\cdots \quad (36)$$

ここに，t を固定するごとに，$\zeta(x,y,t)$ は通常の Lebesgue 測度に関して二乗可積分とし，$\vec{U}(x,y,t)$ は測度 $H(x,y,t)\,d\vec{x}$ に関して（$H=h+\zeta>0$），二乗可積分とする。

命題 4　（エネルギー保存則）

滑らかな関数の集合 $\zeta, \vec{U}, \tau$ が，$t>0$ に対して，(31)，(32)，(34)，(10.4) を満足すれば，

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho}\,(\mathrm{div}(H\tau)+|\nabla G_s|\vec{\tau}_s-|\nabla G_b|\vec{\tau}_b,\ \vec{U}),\ \ldots\ldots \qquad (37)$$

ここに（，）は Ω 上の通常の L^2－内積を表わす。

証明

(31)に $g\zeta$，(32)に $H\vec{U}$ を乗じ，結果を Ω 上にわたって積分すれば次の (40)，(41) 式を得る。

$$(\frac{\partial\zeta}{\partial t},\ g\zeta) + (\mathrm{div}(H\vec{U}),\ g\zeta) = 0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (40)$$

$$(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t},\ H\vec{U}) + (\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}, H\vec{U}) + (\vec{U}[f], H\vec{U}) + (g\nabla\zeta, H\vec{U})$$

$$= (\frac{1}{H\rho}(\mathrm{div}(H\tau) + |\nabla G_s|\vec{\tau}_s - |\nabla G_b|\vec{\tau}_b),\ H\vec{U}).\ \ldots\ldots\ldots \qquad (41)$$

(40)と(41)の両辺の和をとると，

$$(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}, H\vec{U}) + (\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}, H\vec{U}) + (\frac{\partial\zeta}{\partial t}, g\zeta)$$

$$= -(\vec{U}[f], H\vec{U}) - g\{(\nabla\zeta, H\vec{U}) + (\mathrm{div}(H\vec{U}), \zeta)\}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\ (\mathrm{div}(H\tau) + |\nabla G_s|\vec{\tau}_s - |\nabla G_b|\vec{\tau}_b, \vec{U}).\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (42)$$

ここで，(43)が成立することに注意する。

$$(\vec{U}[f],\ H\vec{U}) = 0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (43)$$

また，Gauss－Green の公式と境界条件 (34) により，

$$(\nabla\zeta,\ H\vec{U}) + (\mathrm{div}(H\vec{U}), \zeta) = 0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (44)$$

さらに，(42)の左辺は $\frac{dT}{dt}$ に等しい。実際，次の (45)式が成立する。

$$(\vec{U}\cdot\nabla\vec{U},\ H\vec{U}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial\zeta}{\partial t},\ |\vec{U}|^2). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (45)$$

何となれば，

$$(\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}, H\vec{U}) = (U\frac{\partial\vec{U}}{\partial x} + V\frac{\partial\vec{U}}{\partial y},\ H\vec{U}) = \frac{1}{2}(\nabla(|\vec{U}|^2),\ H\vec{U})$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}(H|\vec{U}|^2\vec{U})\ d\vec{x} - \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}(H\vec{U})|\vec{U}|^2\ d\vec{x}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_\Gamma H|\vec{U}|^2\vec{U}\cdot\vec{n}\ ds + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial\zeta}{\partial t}|\vec{U}|^2\ d\vec{x} = \frac{1}{2}(\frac{\partial\zeta}{\partial t}, |\vec{U}|^2),$$

ここで，再び，Gauss－Greenの公式，境界条件(34)ならびに，連続の方程式(31)を使った。従って，

$$\frac{dT}{dt} = (\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}, H\vec{U}) + (\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}, H\vec{U}) + (\frac{\partial\zeta}{\partial t}, g\zeta)$$

$$= \frac{1}{\rho}\ (\mathrm{div}(H\tau) + |\nabla G_s|\vec{\tau}_s - |\nabla G_b|\vec{\tau}_b, \vec{U}).$$

証了。

<u>注意 9</u>

もし，命題4の$\zeta, \vec{U}, \tau$が，さらに次の(46)を満足すれば，

$$\frac{1}{\rho}\ (\mathrm{div}(H\tau) + |\nabla G_s|\vec{\tau}_s - |\nabla G_b|\vec{\tau}_b,\ \vec{U}) \leq 0, \quad \cdots\cdots \quad (46)$$

命題4より(47)を得る。

$$\frac{dT}{dt} \leq 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (47)$$

$\vec{\tau}_s$，$\vec{\tau}_b$に対して，注意3の具体的表現を採用し，注意7の

第一構成則(*)を選ぼう。その時，(46)に対する十分条件は次の(48)と(49)が成立することである。

$$W_x = W_y = 0 \ \text{ in } \Omega, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (48)$$

$$U_t = 0 \qquad \text{on } \Gamma, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (49)$$

ここに，U_t は $\vec{U}$ の接線方向成分である。実際，$\vec{\tau}_s$ と $\vec{\tau}_b$ の表現から，次の(50)，(51)式は明らかであろう。

$$\frac{1}{\rho}\,(|\nabla G_s|\vec{\tau}_s,\ \vec{U}) = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (50)$$

$$-\frac{1}{\rho}\,(|\nabla G_b|\vec{\tau}_b,\ \vec{U}) \leq 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (51)$$

さらに，次の(52)を示せる。

$$\frac{1}{\rho}\,(\mathrm{div}(H\tau),\ \vec{U}) \leq 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (52)$$

証明は次のようにしてできる。Gauss－Green の公式により，

$$\frac{1}{\rho}\,(\mathrm{div}(H\tau),\vec{U}) = \frac{1}{\rho}\{(\mathrm{div}(H\vec{\tau}_x),U) + (\mathrm{div}(H\vec{\tau}_y),V)\}$$

$$= \frac{1}{\rho}\{\int_\Omega \mathrm{div}(HU\vec{\tau}_x)d\vec{x} + \int_\Omega \mathrm{div}(HV\vec{\tau}_y)d\vec{x} - (H\nabla U,\vec{\tau}_x) - (H\nabla V,\vec{\tau}_y)\}$$

$$= \oint_\Gamma H(U\frac{\vec{\tau}_x}{\rho} + V\frac{\vec{\tau}_y}{\rho})\cdot\vec{n}\ ds - (H\nabla U,\frac{\vec{\tau}_x}{\rho}) - (H\nabla V,\frac{\vec{\tau}_y}{\rho}). \ \ldots \quad (53)$$

境界条件(34)と(49)は，$U=V=0$ on Γ を意味するので，

$$\oint_\Gamma H(U\frac{\vec{\tau}_x}{\rho} + V\frac{\vec{\tau}_y}{\rho})\cdot\vec{n}\ ds = 0.$$

従って，次の(54)を示せばよい。

$$(H\nabla U,\frac{\vec{\tau}_x}{\rho}) + (H\nabla V,\frac{\vec{\tau}_y}{\rho}) \geq 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (54)$$

実際，第一構成則(*)より

$$(H\nabla U,\frac{\vec{\tau}_x}{\rho}) + (H\nabla V,\frac{\vec{\tau}_y}{\rho})$$

$$= \int_\Omega H\nu_H\{2(\frac{\partial U}{\partial x})^2 + \frac{\partial U}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}) + \frac{\partial V}{\partial x}(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}) + 2(\frac{\partial V}{\partial y})^2\}\ d\vec{x}$$

$$= \int_\Omega H\nu_H\{2(\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x})^2 + 2(\frac{\partial V}{\partial y})^2\}\ d\vec{x} \geq 0,$$

最後に，条件（10.4）と$\nu_H>0$を使った。

注意10

今度は，第一構成則(*)のかわりに，注意8の第二構成則（**）を選ぼう。その時，(46)に対する十分条件として

$$W_x = W_y = 0 \text{ in } \Omega, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (48)$$

$$\lambda U_t + (1-\lambda)\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad \cdots\cdots\cdots \quad (55)$$

ここに，$\frac{\partial U_t}{\partial n}$は$U_t$の外向き法線微分を表わし，$\lambda$は$0\leq\lambda\leq 1$をみたす定数である。この証明には，(52)だけをチェックすればよい。等式(53)より，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}(\mathrm{div}(H\tau),\ \vec{U})\\
&= \oint_\Gamma H\left(U\frac{\vec{\tau}x}{\rho} + V\frac{\vec{\tau}y}{\rho}\right)\cdot\vec{n}\,ds\\
&- \left(H\nabla U,\frac{\vec{\tau}x}{\rho}\right) - \left(H\nabla V,\frac{\vec{\tau}y}{\rho}\right)\\
&= \oint_\Gamma H\nu_H(U\nabla U+V\nabla V)\cdot\vec{n}\,ds - (H\nu_H\nabla\vec{U},\nabla\vec{U}).
\end{aligned}$$

さらに，境界条件(34)，(55)，条件（10.4），$\nu_H>0$により，

$$\begin{aligned}
&\oint_\Gamma H\nu_H(U\nabla U+V\nabla V)\cdot\vec{n}\,ds = \frac{1}{2}\oint_\Gamma H\nu_H\nabla(|\vec{U}|^2)\cdot\vec{n}\,ds\\
&= \frac{1}{2}\oint_\Gamma H\nu_H\frac{\partial}{\partial n}(|\vec{U}|^2)\,ds = \frac{1}{2}\oint_\Gamma H\nu_H\frac{\partial}{\partial n}(U_n^2+U_t^2)\,ds\\
&= \oint_\Gamma H\nu_H\left(U_n\frac{\partial U_n}{\partial n} + U_t\frac{\partial U_t}{\partial n}\right)ds = \oint_\Gamma H\nu_H U_t\frac{\partial U_t}{\partial n}\,ds\\
&= \begin{cases} \displaystyle\oint_\Gamma H\nu_H\frac{\lambda-1}{\lambda}\left(\frac{\partial U_t}{\partial n}\right)^2 ds \leq 0, & \text{if } 0<\lambda\leq 1\\ 0, & \text{if } \lambda=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

これで証明が終わった。

References

1) Dronkers, J.J. : Tidal computations in rivers and coastal waters, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964.

2) Leedertse, J.J. : Aspects of a computational model for long-period waterwave propagation, RAND RM-5294-PR, 1967.

3) Kaneko, Y. et al. : Numerical simulation on tidal currents and pollutant dispersion due to alternating direction implicit method - application to Osaka Bay- , Report of P.H.R.I., Vol.14, PP.3-61, 1975 (in Japanese).

4) Kanayama, H. and K. Ohtsuka : Finite element analysis on the tidal current and COD distribution in Mikawa Bay, Coastal Engineering in Japan, Vol.21, PP.157-171, 1978.

5) Zienkiewicz, O.C. and J.C. Heinrich : A unified treatment of steady-state shallow water and two-dimensional Navier-Stokes equations -finite element penalty function approach, Comp. Meth. in Appl. Mechs. and Eng., Vol.17/18, PP.673-698, 1979.

6) Gustafsson, B. and A. Sundström : Incompletely parabolic problems in fluid dynamics, SIAM J. Appl. Math., Vol.35, No.2, PP.343-357, 1978.

7) Leendertse, J.J. and S-K.Liu : A three-dimensional model for estuaries and coastal seas : Vol.II, aspects of computation, RAND R-1764-OWRT, 1975.

8) Bird, R.B. et al. : Transport phenomena, John Wiley & Sons, Inc., 1960.

9) Connor, J.J. and C.A. Brebbia : Finite element techniques for fluid flow, Newnes - Butterworths, London, 1976.

10) Pinder, G.E. and W.G. Gray : Finite element simulation in surface and subsurface hydrology, Academic Press, 1977.

11) Kawahara, M.:Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid, Finite Elements in Fluids, Vol.3, edited by Gallagher et al., John Wiley and Sons, PP.23-54, 1978.

12) Wang, H-P. : Multi-leveled finite element hydrodynamic model of Block Island Sound, Finite Elements in Water Resources, Vol.1, PP.469-493, Pentech, 1977.

13) Tanaka, T. and Y. Ono : Finite element analysis of typhoon surge in Ise Bay, Proc. of U.S. Japan Seminar on Interdisciplinary Finite Element Analysis, Cornell Univ., 1978.

14) Walters, R.A. and R.T. Cheng : A two-dimensional hydrodynamic model of a tidal estuary, Advances in Water Resources, Vol.2, PP.177-184, 1979.

15) Praagman, N. : A finite element solution of the shallow water equations, Ph. D., Delft, 1979.

16) Kanayama, H. and T. Ushijima : On the viscous shallow-water equations I-derivation and conservation laws, to appear.