数理解析研究所講究録
第 431 巻 1981 年 50-57

無限大に台をもつ超函数

上智大 理工　森本 光生
吉野 邦生

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $\mathbb{D}=[-\infty,+\infty]$ とする. $\mathcal{R}$で, $\mathbb{D}$上のフーリエ超函数の層を表わす。このとき,

(i) $\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{R})=\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$上の超函数の空間,

(ii) $\mathcal{R}$は, $\mathbb{D}$上の軟弱層 (flabby)

が知られている。故に, 次の定理が成立する。

<u>定理1</u> 制限写像

$$\rho:\ \mathcal{R}(\mathbb{D})\longrightarrow\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

は, 全射である.

我々の問題は, (i) ρの核の要素, すなわち, $\pm\infty$にのみ台をもつフーリエ超函数を具体的に構成すること, (ii), $\mathbb{R}$上の超函数 e^{x} の, ρによる原像を具体的に構成することの二つである。この報告では, 指数函数の合成を何回か積分することにより, このようなフーリエ超函数が求まることを示したい。

§1. 定義（文献[5]）

$\Omega \subset \mathbb{D}+i\mathbb{R}$を，開集合として，

(1) $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C})\,;\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall K \subset\subset \Omega,$
$\sup\{|f(z)|\, e^{-\varepsilon|z|}\,;\ z \in K \cap \mathbb{C}\} < \infty\}$

とおく．$\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$は，FS空間の構造をもつ．

$\omega \subset \mathbb{D}$を，開集合として，

(2) $\mathcal{R}(\omega) := \tilde{\mathcal{O}}(\Omega \setminus \omega) / \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$

とする．ここで，Ωはωの複素近傍である。(2)の右辺は，Ωに依存しないことが知られている．$\mathcal{R}(\mathbb{D})$は，FS空間の構造をもつ．

$\mathcal{R}(\mathbb{D})$は，双対性によって与えることもできる．いま，$\Omega \subset \mathbb{D}+i\mathbb{R}$を開集合として，

(3) $\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\Omega) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C})\,;\ \forall K \subset\subset \Omega,\ \exists \varepsilon > 0,$
$\sup\{|f(z)|\, e^{\varepsilon|z|}\,;\ z \in K \cap \mathbb{C}\} < \infty\}$

とおく．$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\Omega)$は，DFS空間の位相をもつ．

(4) $\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D}) = \lim\operatorname{ind}\{\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\Omega)\,;\ \Omega \supset \mathbb{D}\}$

とおけば，$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D})$はまたDFS空間である．このとき，

<u>定理2</u> 線形位相空間としての同型

(5) $\mathcal{R}(\mathbb{D}) \cong \underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D})'$ 共に，FS空間

が成立する．

§2. パラモドフの結果（文献［4］）

定理1に関して，パラモドフは興味深い定理を証明したので，紹介しておく．

(6) $\Pi = \{ z = x + iy \;:\; |y| < 1 \}$

とおく．φを$\mathbb{R}$上の実数値連続函数で，

(7) $|t-s| \leq 1$のとき，$|\log \varphi(t) - \log \varphi(s)| \leq C$

（Cは，ある定数）なる条件をみたすものとする．

(8) $\mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R}+iU) = \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}+iU) ; \forall \lambda > 0,$
$\forall K \subset\subset U,$
$\int_{\mathbb{R}+iK} |f(z)|^2 e^{\lambda\varphi(x)}\, dx\, dy < \infty \}$

とおき，

(9) $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R}+i(\Pi \setminus \{0\})) / \mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R}+i\Pi)$

と定義する．自然に写像

(10) $\rho_\varphi : \mathcal{B}_\varphi \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$

が定義される．

<u>定理3.</u> ρ_φが全射となるための必要十分条件は，

(11) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-(\pi+\varepsilon)|t|}\, dt < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0$

である．

§3. $\{+\infty\}$のみに台をもつフーリエ超函数（文献[2]）

$$H_{M,\pi} = \{\zeta = \xi + i\eta \,;\, \xi \geqq M,\ |2\xi\eta| \leqq \pi\}$$

として，次の汎函数Tを考える．

$$(12) \qquad T : \psi \longmapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial H_{M,\pi}} \psi(\zeta)\exp(\exp\zeta^2)\,d\zeta .$$

いま，

$$|\exp(\exp\zeta^2)| = \exp(\exp(\xi^2-\eta^2)\cos 2\xi\eta)$$

に注意する．$\psi \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D})$に対しては，十分大きな$M>0$をとれば，(12)の右辺は$M \gg 0$に依ることなく定義される．故に，$T \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D})'$であることが，示せる．$\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D})' = \mathcal{R}(\mathbb{D})$（定理2）から，Tは$\mathbb{D}$上のフーリエ超函数である．また，(12)の形より，すべての$a>0$に対し，

$$\operatorname{supp} T \subset [a, +\infty]$$

がわかる．一方，$t>0$のとき，

$$(13) \qquad \langle T_\zeta\,,\ \zeta e^{-t\zeta^2}\rangle = -\frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(1+t)} \neq 0$$

であるので，Tは，恒等的に0でない．故に，このTは，$\{+\infty\}$のみに台をもつフーリエ超函数である．

この汎函数Tの$\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i(\mathbb{R}\setminus\{0\}))$に属する定義函数Fは，次の式で与えられる（[1]）．

$$(14) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial H_{M,\pi}} \frac{\exp(-(z-w)^2)}{z-w}\exp(e^{w^2})\,dw$$

この函数Fについては，次が示せる．

$$A_\varepsilon = [a-\varepsilon, \infty) + i(-\varepsilon, \varepsilon)$$

とおく．

<u>命題1</u>．（i） Fは整函数である．

（ii） $\forall R>0,\ \forall a>0,\ \forall \varepsilon>0,\ 0<\forall r<1,\ \exists C\geq 0.$

(15) $\quad |F(z)| \leq C \exp(-rx^2),\quad z \notin A_\varepsilon,\quad |y| \leq R.$

（iii） この整函数は，A_ε上で，次の形の評価をもたない．

(16) $\quad |F(z)| \leq C \exp(B \exp(\alpha|x|)),\ \exists B>0,\ \exists \alpha>0,\ \exists C\geq 0.$

（i），（ii）は，$F(z)$の定義式（14）より容易に示せる．もし，（iii）でいう不等式がA_ε上で成立すれば，フラグメン・リンデレフの定理より，$F \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i\mathbb{R})$となり，$T=[F]=0$（$T \neq 0$に矛盾）を得る．

Tのフーリエ・ボレル変換$\tilde{T}$は，次式で与えられる：

(17) $$\tilde{T}(\zeta) = \int_{\partial A_\varepsilon} e^{\zeta z} F(z)\, dz$$

$\tilde{T}(\zeta)$はゼロでない整函数で，次の指数型評価をもつ．

(18) $$|\tilde{T}(\zeta)| \leq C \exp((-a+\varepsilon)|\mathrm{Re}\,\zeta| + \varepsilon |\mathrm{Im}\,\zeta|)$$

$$(\forall a>0\ \ \forall \varepsilon>0,\ \exists C\geq 0)$$

証明は，[1]の一般論による．

§4. e^x の $[-\infty, +\infty]$ への拡張（文献[3]）

$\tilde{T}$を，§3で構成した$\{+\infty\}$のみに台をもつフーリエ超函数Tのフーリエ・ボレル変換とする．λを$\tilde{T}(-\lambda)\neq 0$なる数とし，固定する．$(\lambda \neq 0)$

(19) $$F_\lambda(z) = F\left(\frac{z}{\lambda}\right) \Big/ (\lambda \tilde{T}(-\lambda))$$

とおく．

<u>命題2</u>　$\forall R>0, \forall a>0, \forall \varepsilon>0, 0<\forall r<\lambda^{-2}, \exists C \geqq 0,$

(20) $$|F_\lambda(z)| \leqq C\exp(-rx^2), \quad z \notin A_\varepsilon, \ |y| \leqq R$$

いま，次の微分方程式

(21) $$f'(z) - f(z) = F_\lambda(z)$$

を，$\mathbb{C}^{\pm} = \{z = x+iy \,;\, \pm y > 0\}$ で考える．$\mathbb{C}^{\pm}$での解は，

$$f_+(z) = e^z \int_{+\infty+iy}^{x+iy} e^{-w} F_\lambda(w)\,dw, \quad y>0$$

$$f_-(z) = e^z \int_{+\infty+iy}^{x+iy} e^{-w} F_\lambda(w)\,dw, \quad y<0$$

で与えられる．ここで，積分路は，x軸に平行である．

命題2の評価より次の命題の評価(ii)が得られる．

<u>命題3</u>　(i)　f_+, f_- はそれぞれ整函数に解析接続できる．

(ii) $\forall R>0,\ \forall \varepsilon>0,\ 0<{}^{\forall}r<\lambda^{-2},\ C\geqq 0$

$$\begin{cases} |f_+(z)|\leqq C e^{-rx^2}, & \varepsilon\leqq y\leqq R, \quad x\geqq 0 \\ |f_+(z)|\leqq C e^{-|x|}, & \varepsilon\leqq y\leqq R, \quad x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |f_-(z)|\leqq C e^{-rx^2}, & -\varepsilon\geqq -y\geqq -R, \quad x\geqq 0 \\ |f_-(z)|\leqq C e^{-|x|}, & -\varepsilon\geqq -y\geqq -R, \quad x<0 \end{cases}$$

(iii) $f_+(z)-f_-(z)=e^z, \quad z\in\mathbb{C}.$

命題3 (iii) の証明は, コーシーの積分表示式と F_λ の定義式(19)による.

さて,

$$f_0(z)=\begin{cases} f_+(z) & y>0 \\ f_-(z) & y<0 \end{cases}$$

とおけば, $f_0\in\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i(\mathbb{R}\setminus 0))$ であり, f_0 は $\mathbb{D}$ 上のフーリエ超函数 $E_\lambda=[f_0]$ を定める。命題3 (iii) より, E_λ は e^x の $[-\infty,+\infty]$ への拡張であることがわかる.

文献

[1] Morimoto, M. : Analytic functionals with non compact carrier. Tokyo J. Math., 1, 77-103 (1978)

[2] Morimoto, M., and Yoshino, K. : Some examples of analytic functionals with carrier at the infinity.

Proc. Japan Acad., 56A, 357-361 (1980)

[3] Morimoto, M.: An extension of e^x to $[-\infty,\infty]$. Proc. Japan Acad., 56A, 450-454 (1980)

[4] Паламодов, В. П.: От гиперфункций к Аналитическим Функционалам. Доклады Академии Наук СССР 235, 534-537 (1977)

[5] 佐藤幹夫：超函数の理論, 数学 10, 1-27 (1958).