数理解析研究所講究録
第 431 巻 1981 年 73-77

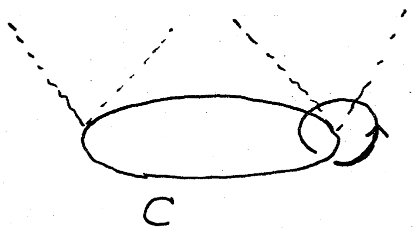
$\Delta u=u$ の解の変形

京大 数理研 柏原 正樹
神保 道夫
三輪 哲二[*)]

高次元の変形理論の一例として次のようなモデルを考察する：$\mathbb{R}^3$ 内の円

$$C:\ x^2+y^2=a^2,\quad z=0$$

をとり，$\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$，$x=(x,y,z)$ について，$\Delta u=u$ の解 u の C のまわりのモノドロミーを不変にしつつ半径 a を変えることを考えよう．そこで，（複素）特性帯



$$\rho(x)=x^2+y^2+(z-ia)^2$$

$$\bar{\rho}(x)=x^2+y^2+(z+ia)^2$$

を導入し，次の諸条件を満たす u を考える：

1) $\Delta u=m^2u\quad(m>0)$

2) $u=\rho(x)^{l+\frac{1}{2}}f(x)+\bar{\rho}(x)^{-l-\frac{1}{2}}g(x)$ （f,g は正則）

3) $|u(x)|=O(e^{-m|x|})$ （これは有界性の仮定と同値）

4) $(x\partial_y-y\partial_x)u=0$ （即ち回転不変，或は C 上定数）

---

*) 講演者は三輪哲二氏．文責・研究代表者．

これだけ仮定すると解は有限（$=2$）次元となる．（モノドロミーを決めるlは止めておく．）更に

$$u_l(x) = s(x)^{l-\frac{1}{2}} f_l(x) + \bar{s}(x)^{-l+\frac{1}{2}} \bar{g}_l(x)$$

$$\bar{u}_{-l}(x) = s(x)^{l+\frac{1}{2}} g_{-l}(x) + \bar{s}(x)^{-l-\frac{1}{2}} \bar{f}_{-l}(x)$$

$$f_l(x)|_C = 1, \qquad \bar{f}_{-l}(x)|_C = 1$$

とすると一意に定まる．（g_lの方は少し良い部分なので自動的に定まる．）有限次元だから，ホロノミー系があるだろうと考えられるが，実際 $P(x,D) \in \mathcal{E}nd(\mathcal{D}/(\mathcal{D}(\Delta - m^2) + \mathcal{D}(x\partial_y - y\partial_x)))$ に対しては，uが1), 4)の解なら$P(x,D)u$も1), 4)の解となる．∂_z, ∂_aについても同様であり，更に$\vartheta = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$とすれば，

$$L = \vartheta\partial_z - m^2 z, \qquad M = \vartheta^2 + \vartheta - m^2(x^2+y^2+z^2)$$

も同じ性質を持つ．このことは

$$[L, \Delta] \in \mathcal{D}(\Delta - m^2) + \mathcal{D}(x\partial_y - y\partial_x)$$

と書けることからわかる．以上のことから．

$$a\partial_a \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix} \partial_z + E \right) \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -ia & \\ & ia \end{pmatrix} \partial_z^2 + F\partial_z + G \right) \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix} = \left(-a^2\partial_z^2 + J\partial_z + K \right) \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix}$$

が得られる．ここに E, F, …, K は a に依存する定数行列である．以上により a を変数に加えても holonomy 系となったから，全体の両立条件から E, F, …, K の間に非線型の方程式が立つ．これを直接計算するのは大変なので次の様に工夫する：

$$K(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}\left(m\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{e^{-m\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

を用い（$K_{\frac{1}{2}}$ は変形 Bessel 函数），

$$u(x) = \int K(x, y, z-t)\, v(t)\, dt$$

とおけば，1)–3) は満たされ，4) は v の対応する条件から実現できる．この変換ですべてを v に翻訳すると一変数の問題に帰着する．

$$\partial_z \longleftrightarrow \partial_t$$

$$L \longleftrightarrow t\cdot(\partial_t^2 - m^2)$$

$$M \longleftrightarrow t\cdot(\partial_t^2 - m^2)\cdot t$$

となるから，上の holonomy 系は

$$\begin{cases} \partial_a \vec{v} = \left(\begin{bmatrix} -ia & \\ & ia \end{bmatrix} \partial_t + E \right) \vec{v} \\ \left(\begin{bmatrix} t-ia & \\ & t+ia \end{bmatrix} \partial_t^2 - F\partial_t - G - m^2 t \right) \vec{v} = 0 \\ \left((t^2+a^2)\partial_t^2 - (J - 2t)\partial_t - K - m^2 t^2 \right) \vec{v} = 0 \end{cases}$$

となり，常微分系のパラメータ a による変形となった．t に

関する微分方程式は更に

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v} = \left(\frac{1}{t-ia}\begin{pmatrix} \ell-1 & \xi \\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{t+ia}\begin{pmatrix}0&0\\ \eta & -\ell-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\kappa & \lambda \\ \mu & -\kappa\end{pmatrix}\right)\vec{v} \\ \kappa^2+\lambda\mu = m^2 \\ 2\ell\kappa + \xi\mu + \eta\lambda = 0\end{cases}$$

と書き直せる．この特異点の位置から，monodromy 不変の条件が Painlevé V（Painlevé Ⅳ の4個の特異点のうちの一組が合流したもの）の解で表せることがわかる。（$[\partial_t, \partial_a]=0$ を具体的に書けばよい．）

もう少し増しなやり方として τ 関数を使う方法がある．

$$\frac{d\log\tau(a)}{da} = \frac{\xi\eta}{a} + i(\xi\mu-\eta\lambda) - 2i\kappa$$

が，一般論

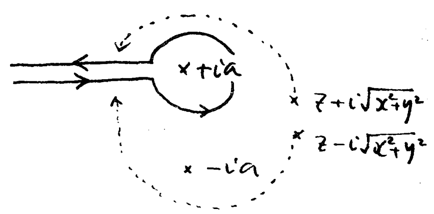
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \left(\sum \frac{A_\mu}{x-a_\mu}\right) Y \Rightarrow d_{a_1\cdots a_n}\log\tau(a_1\cdots a_n) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\, A_\mu A_\nu\, d\log\tau(a_1\cdots a_n)$$

の特別な場合として得られ，変形の方程式は

$$\sigma(a) = a\frac{d\log\tau(a)}{da}$$

$$\left(\frac{a}{m}\sigma''(a)\right)^2 = -\left(4(\sigma - a\sigma') - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{m}\right)^2 + 2\ell - 2\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\sigma'}{m}\right)^2 + (2\ell-3)^2\right)\left(\left(\frac{\sigma'}{m}\right)^2+(2\ell+3)^2\right)$$

となる．$V(t) = (\vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t))$ とおき，モノドロミー行列 $V(t)\mapsto V(t)M$ を考察しよう．図のような積分路の場合には，$z\pm i\sqrt{x^2+y^2}$ が積分路にひっかかるので，$x^2+y^2=0$ の余法



線にも特異点が現れる可能性がある．それを消す必要からモノドロミーに制限がつく．$t=\pm ia$ におけるモノドロミーは

$$V(t)=\hat{V}_{\pm}(t)(t\mp ia)^{\begin{pmatrix}\pm l-1 & \\ & 0\end{pmatrix}}$$

$t=\infty$ におけるモノドロミーは

$$V(t)\begin{pmatrix}1 & \\ e^{2\pi il} & 1\end{pmatrix}=\hat{V}_{\infty}(t)\frac{1}{t}\begin{pmatrix}e^{mt} & \\ & e^{-mt}\end{pmatrix}$$

(∧をつけたのは正則な部分である．z 軸上の特異性を消すためには

$$u^{(+)}(0,0,z)=-e^{-2\pi il}u^{(-)}(0,0,z)$$

とすればよい．ここに

$$u^{(+)}(0,0,z)=\int\frac{e^{-m(z-t)}}{z-t}\vec{v}_1(t)dt$$

$$u^{(-)}(0,0,z)=\int\frac{e^{m(z-t)}}{t-z}\vec{v}_1(t)dt$$

しかるに

$$(1-e^{2\pi il})\vec{v}_1(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int\frac{e^{-m(t-z)}-e^{2\pi il}e^{m(t-z)}}{t-z}\vec{v}_1(t)dt$$

同様に $\vec{v}_2$ についても

$$(1-e^{2\pi il})\vec{v}_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-m(t-z)}-e^{m(t-z)}}{t-z}\vec{v}_2(t)dt$$

という積分表示があるから．これから上を確かめることができる．